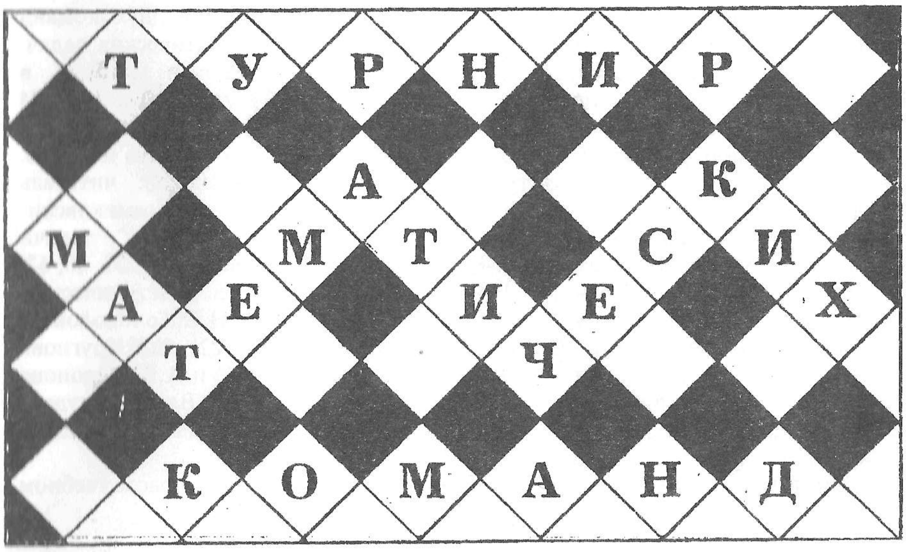
Иваново

1994-1995 учебный год



7 класс

Турнир математических команд.
(Иваново, 1994–95 учебный год, VII класс.)

Составители: Е.В.Власов, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов.
Компьютерный набор: Е.Хашина.

Брошюра содержит задачи командного математического турнира (турнира матбоев), проходившего в 1994–95 учебном году, технические результаты этого турнира и информацию о матбое Кострома–Иваново. Ко всем задачам даны ответы, указания либо краткие решения.

Предисловие.

Математический бой (сокращенно – матбой) – состязание двух команд (численностью, как правило, по 6–8 человек) в решении математических задач. Турнир, команды–участницы которого встречались друг с другом в матбоях, в нашем городе впервые был проведен (для учащихся 10–11 классов) в 1993–94 учебном году. О том турнире и задачах, предлагавшихся школьникам, можно прочесть в брошюре [5]. В ней, а также в книге [2] приводятся правила матбоев. В 1994–95 учебном году состоялись турниры семи–восьмиклассников: читатель имеет здесь возможность познакомиться со всеми задачами турнира семиклассников. Многие из этих задач имеются в книгах [1]–[4] и журнале "Квант"; задачи 12, 13, 43, 47, 59, 66, 89, 91, 94, 99, 103, 104 составил А.В.Шаповалов, 33, 37, 40, 52, 54, 78, 84, 105, 116 – С.И.Токарев, 113, 114, 118 – Р.Г.Женодаров. В методическом плане турнир удался, и основной вклад в это внесли учителя: Н.С.Колоколова и Г.В.Сычёва (школа–лицей 33), О.В.Карасева (школа–лицей 22), Е.А.Круглова (школа 4), Т.М.Лебедева (школа 30), И.В.Ликсонова (школа 66) и А.В.Шеронова (школа–лицей 67). В жюри работали преподаватель ИвГУ Е.В.Власов, студент этого же вуза Е.Соколов и учащиеся школы–лицея 33 – призеры Всероссийской олимпиады А.Грибалко и Д.Шаповалов.

В проведении математических турниров мы готовы помочь и в новом учебном году; звоните по телефонам

(0932)–30–02–42 (ИвГУ) – Власов Евгений Викторович,
(0932)–38–01–47 (ИГЭУ) – Токарев Сергей Иванович.

Литература.

1. Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.М.Тоом. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986.
2. С.А.Генкин, И.В.Итенберг, Д.В.Фомин. Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1994.
3. А.В.Спивак. Избранные математические задачи. – в рукописи.
4. Д.В.Фомин. Санкт–Петербургские математические олимпиады. – С.–Пб.: Политехника, 1994.
5. Е.В.Власов, А.В.Шаповалов. Организация и проведение математических боев. – Иваново, 1994.

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ.

"Планигоны" - "Четвёрка"

1. На клетчатом поле 3x3 играют двое. Ходят по очереди и каждый ставит своим ходом крестик или нолик (любой из этих знаков, причем можно разные на разных ходах) в любую свободную клетку. Выигравшим считается тот, после хода которого на какой–либо горизонтали, вертикали или диагонали окажутся три одинаковых знака. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

2. – Бабушка, сколько лет твоему внуку?

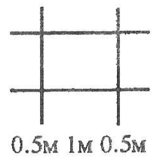
– Моему внуку столько месяцев, сколько мне лет. А вместе нам 65 лет. Сколько же лет внуку?

3. Докажите, что из любых 6 целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на 5.

4. Один человек пошел в ларек с некоторой суммой денег и занял у продавца столько же денег, сколько у себя имел. Из этой суммы он истратил 10000 рублей. С остатком пошел в другой ларек, где опять занял столько же денег, сколько у себя имел. В этом ларьке также истратил 10000 рублей. Потом пошел в третий и четвертый ларьки, где повторилось то же самое, а когда отошел от четвертого ларька, не имел ничего. Сколько денег у этого человека было вначале?

5. Если 1994 и 1982 разделить на одно и то же число, то получим соответственно остатки 5 и 6. Найдите делитель.

6. В семье много детей. Семеро из них любят капусту, шестеро – морковь, пятеро – горох, четверо – капусту и морковь, трое – морковь и горох, двое – капусту и горох, а один – и капусту, и морковь , и горох. Сколько детей в этой семье?



7. Какое наибольшее число пауков может ужиться на паутине , показанной на рисунке? Паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем 1,1 метра.

8. Разбейте квадрат на возможно меньшее число остроугольных треугольников.

"Медиана" - КВМ

9. Стрелка на часах показывает 12 часов. За один ход разрешается сдвинуть ее по часовой стрелке на два или на три часа. Играют двое, ходят поочередно и выигравшим считается тот, кто поставит стрелку на 11 часов. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

10. В турнире по мини-футболу за победу в матче дают 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Четыре команды сыграли друг с другом по разу. "Спартак" набрал 5 очков, "Динамо" – 2, "Торпедо"– 1. Какое место заняла команда "Текстильщик"?

11. По кругу выписаны 12 чисел. Известно, что сумма любых трех идущих подряд чисел равна 7. Найдите сумму всех чисел.

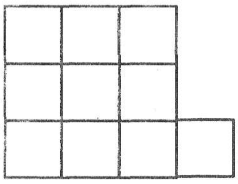
12. На каждой перемене Робин Бобин съедает по две конфеты. Сколько конфет он съел на переменах за неделю с понедельника по субботу, если всего было 35 уроков ?

13. Найдите все пары цифр y и x, для которых выполняется равенство (x+y)/5=x,y.

14. На шахматной доске стоят 7 белых фигур. Докажите, что можно поставить на доску черного коня так, чтобы он ни на кого не напал.
15. Может ли прямая пересечь все стороны какого–нибудь десятиугольника , не проходя через его вершины?
16. Для каких натуральных n квадрат можно разрезать на n меньших квадратов?

"Парабола" – "Гипербола"

17. Полем для игры в крестики – нолики служит десятиклеточная фигура, изображенная справа. Играют двое: один крестиками, другой – ноликами, ходят поочередно. Выигравшим считается тот, кто поставит три свои знака подряд по горизонтали, вертикали или диагонали. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?



18. Можно ли клетки квадратной таблицы 3x3 заполнить числами так, чтобы сумма всех чисел была положительна, а сумма чисел в любом квадрате 2x2 – отрицательна?
19. Про длины сторон треугольника ABC известно, что AC=3,8, AB=0,6, а длина стороны BC выражается целым числом. Найдите это число.
20. Четыре девочки – Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше всех, а Лена спела 5 песен – меньше всех. Сколько песен было спето?
21. Клетчатый прямоугольник 5x7 разрежьте по линиям сетки на 7 прямоугольников так, чтобы любые два прямоугольника состояли из разного количества клеток.
22. Клетчатый прямоугольник 5x7 разрезан по линиям сетки на 8 прямоугольников. Докажите, что найдутся два прямоугольника, в которых клеток поровну.
23. Матч дворовых футбольных команд закончился со счетом 37:28. Докажите, что был момент, когда первая забила столько мячей, сколько второй осталось забить.
24. Проведите на плоскости 6 прямых так, чтобы среди частей, на которые разобьется плоскость, оказалось как можно больше треугольников.

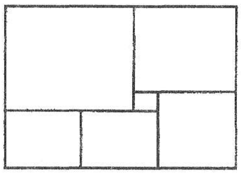
"Дивизоры" – "Великолепная семерка"

25. Два игрока по очереди берут спички из коробки. Брать разрешается не более 70% спичек, имеющихся там на момент хода. Первоначально в коробке 300 спичек. Победителем считается тот, после хода которого останется одна спичка. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?
26. Одно положительное число поделили на другое. Найдите частное, если известно, что оно в 8 раз меньше делителя и в 4 раза больше делимого.
27. Петя и Витя взвесили свои портфели. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда они положили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг.
– Разве два плюс три равно шести?– воскликнул Петя.
– У весов сдвинута шкала, – ответил Витя.
Сколько же весили портфели на самом деле?
28. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на четыре равнобедренных треугольника.

29. Можно ли целые числа от 1 до 17 выписать в строку так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом?

30. Можно ли целые числа от 1 до 17 выписать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом?

31. Прямоугольник на рисунке составлен из квадратов. Найдите их стороны, если сторона самого маленького равна 1.



32. Используя цифры 1, 9, 9, 4 в указанном порядке, арифметические действия и скобки, запишите числа от 1 до возможно большего натурального числа. Пример: 392= (1–99)·(–4)

"Планигоны"–"Медиана"

33. На квадратном клетчатом поле 4x4 играют двое. Ходят по очереди и каждый своим ходом заштриховывает любую из еще не заштрихованных клеток. Запрещается образовывать квадрат 2x2 из четырех заштрихованных клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

34. Для новогодних подарков приготовили 184 мандарина, 138 яблок и различные сладости. Какое наибольшее число подарков можно подготовить, чтобы в них было поровну мандаринов и поровну яблок?

35. Если к задуманному числу прибавить его половину, к сумме – ее треть, к новой сумме ее четверть, то получится 95. Какое число задумано?

36. Повышение температуры по Цельсию на 1 градус означает повышение ее по Фаренгейту на 1,8 градуса. Зная, что +10 градусов по Цельсию и +50 градусов по Фаренгейту– это одна и та же температура, определите, когда холоднее: при –30 градусов по Цельсию или при –30 градусов по Фаренгейту?

37. Допустим, что сейчас угол между часовой и минутной стрелками такой же, какой был полчаса назад. Найдите этот угол.

38. На какое наименьшее число кусков следует разрезать кусок проволоки длины 12м, чтобы из них можно было спаять каркас куба с ребром 1м? (проволоку разрешается сгибать).

39. Планигон–это такой многоугольник, копиями которого можно замостить всю плоскость(без щелей и перекрытий). Может ли какой–нибудь семиугольник быть планигоном?

40. Решите ребус ИЭИ·У=ИГЭУ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).

"Четвёрка"–КВМ

41. По кругу выписаны 11 минусов. За один ход можно исправить на плюсы один или два соседних минуса. Выигравшим считается тот, кто исправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

42. Можно ли в 12–угольнике провести некоторые диагонали так, чтобы из каждой вершины выходило ровно 5 диагоналей?

43. Четверо друзей измеряли длину удава в попугаях. Получилось целое число. Через неделю они стали вспоминать, какое же это число.Удав сказал:"Меньше 50". Слоненок сказал: "Меньше 45". Мартышка сказала: "Меньше 44". А попугай сказал: "Меньше 43". Известно, что ровно двое из них ошиблись. Какова же длина удава?

44. Решите уравнение

$1993 = 1+8(1+8:(1-8:(1+4:(1-4:(1-8:x)))))$.

45. Восстановите пропущенные цифры в примере на деление:

```
_****1 | 11*
 ***   |----
 ---     **
 _***
  ***
  ---
    0
```

(Могут быть и еще единицы).

46. В круге отметили точку. Разрежьте круг на 3 части так, чтобы из них можно было составить новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.

47. Есть ли среди натуральных чисел такое, что если сумму его цифр умножить на произведение его цифр, то получится 1995?

48. На сколько частей могут разбивать плоскость 4 прямые?

"Парабола"–"Дивизоры"

49. На клетчатом поле 4x4 играют двое. Ходят поочередно, и каждый ставит своим ходом крестик либо нолик (любой из этих знаков по своему усмотрению) в любую свободную клетку. Запрещается делать ход, после которого два одинаковых знака окажутся в соседних (имеющих общую сторону) клетках. Проигравшим считается тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

50. Могут ли 9 одинаковых конфет стоить меньше 1000 рублей, а 10 таких же конфет– больше 1100 рублей?

51. Решите ребус УР+РА+АУ=УРА (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).

52. Король обошел шахматную доску 8x8, побывав на каждом поле ровно по одному разу и вернувшись последним ходом на исходное поле. Докажите, что число диагональных ходов, сделанных королем, четно.

53. На столе стояли 3 стакана с водой. Из первого стакана перелили 1/3 имевшейся в нем воды во второй, затем 1/3 содержимого второго стакана перелили в третий и, наконец, 1/3 воды из третьего стакана перелили в первый. В результате в стаканах стало по 100г воды. Сколько ее было в каждом из стаканов первоначально?

54. Про четырехугольник ABCD известно, что углы DAC, BAC, ABD и CBD равны между собой, и что углы BCA, DCA, CDB и ADB тоже равны между собой. Докажите, что ABCD – квадрат.

55. Повышение температуры на 1 градус Цельсия означает повышение ее на 1,8 градусов Фаренгейта. Известно, что +10 градусов по Цельсию и +50 градусов по Фаренгейту – одна и та же температура. Какая температура выражается одинаковым числом градусов и по Цельсию, и по Фаренгейту?

56. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость три треугольника?

"Гипербола"–"Великолепная семерка"

57. Соты с медом (квадратики 1x1) расположены в виде квадрата 9x9. В центральном квадратике вместо меда – деготь. Играют двое, и за один ход разрешается сделать вертикальный или горизонтальный разрез (по сторонам квадратиков) и съесть любой из отрезанных кусков. Ходят по очереди, и тот, кто вынужден съесть деготь, считается проигравшим. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

58. На верхней грани кубика написано 25, на правой – 7, на передней – 66. На остальных гранях написаны простые числа так, что суммы чисел для каждой пары противоположных граней одинаковы. Какое число написано на нижней грани?

59. Каждым ударом силач Шварценеггер может разбить один кусок бетона на три части. За сколько ударов он расколет бетонную плиту на 1995 кусков?

60. Пусть некоторые буквы заменены цифрами , причем одинаковые буквы одинаковыми цифрами ,а разные – разными. Даны четыре слова: 1234, 5678, 9608, 5454. Это слова ПАПА, ПЕТЯ, ЖЕНЯ, ДИМА, только, может быть, в другом порядке. Определите, какая цифра что означает и расшифруйте фразу:

3434 34967 1236 5676 2 9606 361 2 1963.

61. Дама сдает в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Чемодан весит больше, чем рюкзак. Саквояж и рюкзак вместе тяжелее, чем корзина и чемодан вместе, а корзина и саквояж вместе весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Определите среди вещей самую легкую и самую тяжелую.

62. Средний возраст 11 футболистов на поле – 20 лет. Одного игрока удалили. Средний возраст оставшихся – 19 лет. Сколько лет удаленному?

63. Докажите , что если треугольник можно разрезать на два равных друг другу треугольника, то он – равнобедренный.

64. За один ход разрешается к числу прибавить 1 или умножить его на 2. За какое наименьшее число ходов можно из 0 получить 81?

"Четвёрка"–"Медиана"

65. Двое играют на шахматной доске, передвигая по очереди короля. Допускаются только ходы на одно поле влево, вниз или влево вниз по диагонали. Вначале король стоит в правом верхнем углу доски. Выигравшим считается тот, кто поставит его в левый нижний угол. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

66. В 120–квартирном доме два 60–квартирных подъезда. Все жильцы купили новые номера квартир, при этом двузначные номера стоили вдвое, а трехзначные –втрое дороже однозначных. Второй подъезд израсходовал 8460 рублей. Сколько рублей израсходовал первый подъезд?

67. На Нью–Васюковской валютной бирже за 33 тугрика дают 42 динара, за 22 рупии – 21 динар, за 5 крон – 2 талера, а за 10 рупий – 3 талера. Сколько тугриков дают за 13 крон?

68. На белый тетрадный лист посадили фиолетовую кляксу, разлетевшуюся мелкими брызгами. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 1см друг от друга.

69. Каждый из четырех гномов – Беня, Веня, Сеня и Женя – либо всегда говорит правду, либо лжет. Мы подслушали такой разговор:

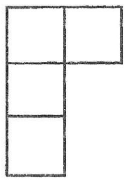
Беня (Вене): Ты врун.

Женя (Бене): Сам ты врун.

Сеня (Жене): Да они оба вруны. (Подумав). Впрочем, и ты тоже.

Кто из гномов правдив, а кто всегда говорит неправду?

70. Можно ли числа 1,2,3,...,10 расставить по кругу так, чтобы разность любых двух соседей была равна 2 или 3?



71. Разрежьте квадрат на такие два равных многоугольника, периметры которых равны периметру этого квадрата.

72. В клетчатом квадрате 8x8 закрасьте наименьшее число клеток так, чтобы в оставшуюся часть нельзя было поместить четырехклеточную фигуру, показанную на рисунке.

"Планигоны" – КВМ

"Гипербола" – "Дивизоры"

73. Полем для игры служат 13 клеток, расположенные по кругу. Каждый из двух играющих ставит либо крестик, либо нолик (по своему желанию) в любую свободную клетку. Запрещается делать ход, после которого два одинаковых знака окажутся в соседних клетках. Ходят поочередно, и проигравшим считается тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

74. На плоскости даны отрезки длиной 40см и 55см. Как, пользуясь только линейкой и циркулем, построить отрезок длиной 50см?

75. Собрание акционеров общества "Навар" ведет его президент, который может ставить на голосование любые вопросы. Все решения принимаются большинством голосов, причем каждый член АО голосует за какое–либо предложение, когда оно выгодно лично ему. Докажите, что если в АО не меньше трех голосующих, то президент сможет забрать в свою пользу половину доходов каждого из остальных членов "Навара".

76. 12 фишек разных цветов стоят в ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли расположить все фишки в обратном порядке?

77. Три девочки – Лена, Саша и Наташа – ели конфеты. Лена и Саша съели на 11 конфет больше Наташи, а Наташа и Лена – на 7 конфет больше Саши. Сколько конфет съела Лена?

78. Треугольники ABC и ABC таковы, что AB=A'B', AC=A'C', а углы ABC и A'B'C' равны между собой и не острые. Докажите, что эти треугольники равны.

79. Пете в 1995 году исполняется столько лет, какова сумма цифр его года рождения. В каком году родился Петя?

80. На плоскости отмечены все вершины и середины сторон правильного n–угольника , $3 \le n \le 8$. Расставьте числа 1,2,3,...,2n в отмеченных точках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне была одна и та же.

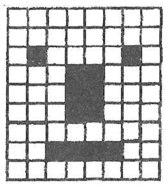
"Парабола"–"Великолепная семёрка"

81. На доске написано число 50. Два игрока ходят поочередно, и каждый из них увеличивает своим ходом число, записанное последним, на любой из его делителей, меньший самого числа. (Например, после 50 можно записать 51, 52, 55, 60 или 75). Выигравшим считается тот, кто первым напишет трехзначное число. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

82. Одно число поделили на другое. Докажите, что если делимое меньше нуля, то частное не равно делителю.

83. Докажите, что сумма всех трехзначных чисел делится на 7.

84. В треугольнике ABC известны углы: BAC=33°, BCA=67°. Из вершины B провели медиану и высоту и продолжили их за сторону AC на расстояния, равные им. Получили точки P и Q. Чему равен угол PCQ?



85. На сторонах BC и CD прямоугольника ABCD вне его построили равносторонние треугольники BPC и CQD. Докажите, что треугольник APQ также равносторонний.
86. Докажите, что фигуру из 60 клеток, изображенную на рисунке, нельзя разбить на прямоугольники из трех клеток. (Закрашенные клетки в фигуру не входит).

87. В комнате – 12 человек; некоторые из них честные – всегда говорят правду; остальные всегда лгут. "Здесь нет ни одного честного человека", – сказал первый. "Здесь не более одного честного человека", – сказал второй. Третий сказал, что честных не более двух, четвертый – что не более трех и т.д., до двенадцатого, который сказал, что честных в этой комнате – не более одиннадцати. Сколько же там честных людей?
88. Задумано шестизначное число, в записи которого каждая из цифр 1,2,3,4,5,6 встречается по одному разу. За один вопрос про любые две цифры можно узнать, которая из них в записи числа расположена левее. Какое наименьшее число вопросов требуется для того, чтобы наверняка определить задуманное число?

"Четвёрка"–"Гипербола"

89. Назовем месяц хорошим, если в нем суббот больше чем понедельников. Могут ли два месяца подряд быть хорошими?
90. На шахматной доске стоят несколько (не менее четырех) королей. Докажите, что их можно разбить на четыре группы так, чтобы короли каждой группы друг друга не били.
91. Можно ли квадрат разрезать на два многоугольника P и S так, чтобы площадь P составляла не более половины площади S, а периметр S составлял не более половины периметра P?
92. Написали числа 1,2,3,4,6,12 и от каждого числа провели стрелку ко всем его делителям. Затем числа заменили звездочками, а часть стрелок стерли. Восстановите исходное положение.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & * & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ * & \leftarrow & * & \leftarrow & * & \rightarrow & * & \leftarrow & * \end{array}$$

93. За неделю каждый из учеников класса получил не более пяти двоек. Известно, что a_1 учеников получили, по крайней мере, одну двойку, a_2 учеников получи ли не менее двух двоек, a_3 учеников получили не менее трех двоек, a_4 учеников получили не менее четырех двоек, a_5 учеников получили не менее пяти двоек. Сколько всего двоек в этом классе?
94. В XIX – XX веках Россией правили шесть царей династии Романовых. Вот их имена – отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович и Павел Петрович. При смене царя один раз престол унаследовал брат, в остальных случаях – сын предыдущего царя. В каком порядке правили цари, если известно, что последнего звали Николаем?
95. Если к двузначному числу прибавить сумму его цифр, его цифры поменяются местами. Что это за число?

96. Точка B – середина отрезка AC. По разные стороны от AC построены равносторонние треугольники ABK и ABL. Найдите величину угла KCL.

"Великолепная семерка"–"Медиана"

97. Можно ли переставить цифры в десятичной записи степени двойки (то есть числа вида 2^k, где k –любое целое неотрицательное число) так, чтобы получилась степень тройки?

98. По кольцевой линии курсируют 24 поезда. Они идут в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на 20%?

99. Можно ли квадрат разрезать на 4 многоугольника так, чтобы у одного из них было 33 вершины, а у остальных – по 10?

100. Девочки играют в классики. На земле нарисованы 10 квадратов в ряд. Любе надо пропрыгать по всем квадратам по разу и снова вернуться на первый, при этом прыгать с любого квадратика на соседний нельзя, а перепрыгнуть через три (например с 2 на 6) или больше квадратиков у Любы не хватит сил. Как Любе выполнить задание?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

101. Найдите 67 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

102. Восстановите цифры в записи примера на умножение.

```
   *2*
x   *7
  ***
 ****
 *****
```

103. В семейном ансамбле "Ласковый лай" участвуют Тит Фомич, Фома Титович, Фома Фролович, Фрол Фомич и Фрол Фролович Собакины. Один из них поет, его отец играет на шарманке, брат держит микрофон, а дети бьют в барабан. Как зовут певца?

104. Участники международного турнира разбиты на 10 одинаковых по числу спортсменов отборочных групп. Известно, что спортсменов от каждой страны не более 10. Докажите, что можно перераспределить спортсменов по отборочным группам так чтобы число спортсменов в группах осталось прежним, но все спортсмены каждой страны попали в разные группы.

"Гипербола"–"Медиана"

105. Матбой длился более двух, но менее трех часов. Найдите его продолжительность с точностью до минуты, если известно, что числа, обозначающие на электронных часах часы и минуты, поменялись за время матбоя местами. (Часы показывают двадцатичетырехчасовое время).

106. Существуют ли числа X и Y такие, что $X+Y=X\cdot Y=X:Y$?

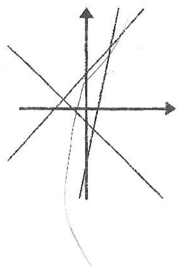
107. Три одинаковых бумажных треугольника разрезáны по трем разным медианам. Докажите, что из полученных шести кусков можно сложить треугольник.

108. Одна из медиан треугольника перпендикулярна одной из его биссектрис. Докажите, что одна из сторон треугольника вдвое больше другой.

109. Какое наибольшее число прямоугольников 1x5 можно вырезать из квадрата размера 8x8?

110. Даны дроби 30/19 и 33/95. Найдите наибольшее из чисел, при делении на которое каждой из этих дробей получаются целые числа.

111. Можно ли подобрать такие числа A,B и C, чтобы графики функций y=Ax+B, y=Bx+C и y=Cx+A располагались так, как показано на рисунке?



112. В выходной день каждый из учеников класса один раз побывал на катке. Известно, что любые два одноклассника там встретились. Докажите, что был момент, когда все ученики класса находились на катке.

Технические результаты.

I подгруппа.

					очки	место
"Плагитоны"		35:46	55:41	35:53	125:140	4
(Новоталицкая с. ш.)		0	2	0	2	
"Четверка"	46:35		46:50	51:42	143:127	1
(шк. N° 4)	2		0	2	4	
"Медиана"	41:55	50:46		43:30	134:131	2
(школа–лицей 33)	0	2		2	4	
КВМ	53:35	42:51	30:43		125:129	3
(школа–лицей 22)	2	0	0		2	

II подгруппа.

					очки	место
"Парабола"		34:50	40:37	35:39	109:126	4
(Мат. кружок ИГЭУ)		0	1	0	1	
"Гипербла"	50:34		36:35	47:59	133:128	2
(шк. N° 30)	2		1	0	3	
"Дивизоры"	37:40	35:36		40:38	112:114	3
(шк. N° 66)	1	1		1	3	
"Великолепная семер-ка"(школа–лицей 67)	39:35	59:47	38:40		136:122	1
	2	2	1		5	

Полуфиналы: "Четверка" – "Гипербола" 40:43,
"Великолепная семерка" – "Медиана" 24:33.

Финал: "Гипербола" – "Медиана" 30:41.

Призеры турнира:
I место – "Медиана",
II место – "Гипербола",
III место – "Четверка" и "Великолепная семерка".

Матбой Кострома – Иваново.

Команда ивановских семиклассников в составе:

- Косарев Илья (с.ш. 30)
- Муницына Маша (лицей 33)
- Садыков Ильдар (с.ш. 13)
- Скотников Рома (Ново–Талицы)
- Трутнев Петя (с.ш. 4)
- Филатов Женя (лицей 22)
- Фирсов Сережа (Ново–Талицы)
- Хашина Катя (лицей 33)

провела 14 марта в Костроме бой против команды "хозяев поля". Счет – 33:21 в пользу костромичей. Приводим задачи этого состязания.

113. Имеется бумажный прямоугольник размерами 20·10 см. Можно ли разрезать его на такие 8 одинаковых частей, из которых можно сложить прямоугольник с отношением сторон 4:1?

114. В однокруговом футбольном турнире участвовали 6 команд. За победу в матче начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В итоге турнира команды набрали (в порядке в порядке занятых мест): 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. Сколько матчей закончилось в ничью?

115. Натуральное число кратно 11. Может ли оно иметь сумму цифр, равную 111?

116. Семеро друзей несколько раз ходили вместе в кино. Каждый раз они занимали семь подряд идущих мест в одном ряду. Могло ли оказаться, что любые двое сидели рядом ровно один раз?

117. На отрезке AB отмечена точка C. На отрезках AC и BC по одну сторону от отрезка AB построены равносторонние треугольники AMC и CNB. Докажите, что середины отрезков AN и MB вместе с точкой C служат вершинами равностороннего треугольника.

118. За круглым столом сидят 12 человек: математики и астрологи. Математики всегда говорят правду, а астрологи не всегда. Каждый сидящий сказал: "Один из моих соседей – математик, а другой – астролог". Какое наибольшее число математиков могло быть за этим столом?

Ответы и указания к задачам.

1. Выигрывает начинающий.

2. Если внуку x лет, то бабушке $12x$ лет. Из условия $12x+x=65$ находим $x=5$.

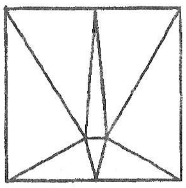
3. При делении целого числа на 5 имеется только пять возможных значений для остатка: 0,1,2,3 или 4. Поэтому среди 6 чисел обязательно найдутся два, дающих одинаковые остатки.

4. Задача решается "с конца". Последовательно выясняем, что перед четвертым ларьком у человека было 5000 рублей, что перед третьим – 7500 рублей, перед вторым – 8750 рублей, перед первым – 9375 рублей.

5. Пусть x – искомый делитель. Тогда разности $1994-5=1989$ и $1982-6=1976$, а также $1989-1976=13$ должны делиться на x. Число 13 имеет всего два делителя (1 и 13), из которых только один годится в качестве ответа: $x=13$.

6. Дадим каждому ребенку по одному экземпляру каждого из любимых им овощей. Тогда всего будет роздано $7+6+5=18$ овощей, причем три овоща окажутся у одного из детей, по два овоща – у $(4-1)+(3-1)+(2-1)=6$ детей, а число "однолюбов" можно вычислить так: $18-1\cdot 3-2\cdot 6=3$. Всего в семье, следовательно, $1+6+3=10$ детей.

7. Нетрудно разместить четырех терпящих друг друга пауков. Для доказательства максимальности этого количества заметим, что паутина разбивается на четыре одинаковых "креста", в каждом из которых не может быть более одного паука.



8. Разбиение на 8 остроугольных треугольников показано на рисунке. Можно доказать, что число 8 здесь – минимальное возможное.

9. Выигрывает начинающий.

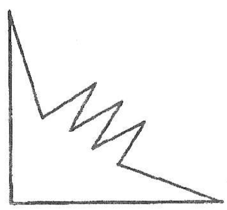
10. Во всех 6 матчах разыграно $6\cdot 2=12$ очков. "Текстильщик", собравший $12-(5+2+1)=4$, занял второе место.

11. Так как все числа можно разбить на четыре тройки, то искомая сумма равна $4\cdot 7=28$.

12. Всего между уроками было 34 перерыва, из которых 5 "длинных" – между учебными днями. Следовательно, было $34-5=29$ перемен и съедено было $2\cdot 29=58$ конфет.

13. Равенство $(x+y)/5=x+y/10$ равносильно $y=8x$, откуда видно, что x может быть только нулем или единицей. Ответ:(0;0) и (1;8).

14. Фигурами занято 7 клеток, и для каждой фигуры имеется не более 8 клеток, с которых она может быть атакована. Так как $7+8\cdot 7<64$, то клетка для черного коня обязательно найдется.



15. Да; такой десятиугольник показан на рисунке.

16. Такое разрезание возможно для всех n, кроме 2, 3 и 5.

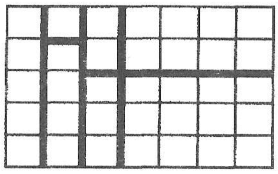
17. Выигрывает начинающий.

18. Да; запишем, например, в центральную клетку (–4), а во все остальные – единицы.

19. Так как $BC<AC+AB=4{,}4$ (неравенство треугольника), то $BC<4$, а так как $BC+AB>AC$, то $BC>AC-AB=3{,}2>3$. Поэтому $BC=4$.

20. Заметим, что суммарное число участий в исполнении должно делиться на 3. Перебором устанавливаем, что оно равно 27. Поэтому спето 27:3=9 песен.

21. На рисунке показано разрезание на прямоугольники из 1,2,3,4,5,8 и 12 клеток.



22. Допустим противное. Тогда суммарное количество клеток не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Но $5\cdot 7=35<36$. Противоречие.

23. Это момент, когда количество мячей, забитых обеими командами вместе, равнялось 28.

24. Наибольшее возможное число треугольников – 7.

25. Начинающий выигрывает, оставляя своему противнику последовательно 157, 47, 14, 4 и 1 спичку. Этот набор чисел можно найти, разобрав игру "с конца".

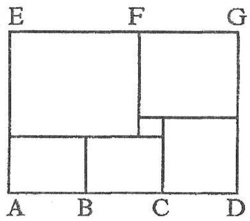
26. Из условия задачи следует, что делимое в 32 раза меньше делителя. Поэтому частное равно 1/32.

27. Пусть A и B – массы портфелей, X – "ошибка весов". Из условий $A+X=2$, $B+X=3$, $A+B+X=6$ находим $A=3$, $B=4$, $X=-1$.

28. Можно воспользоваться таким известным фактом: в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Тем самым прямоугольный треугольник делится на два равнобедренных. Осталось заметить, что любой треугольник можно разрезать на два прямоугольных.

29. Да: 1,16,3,14,5,12,7,10,9,8,11,6,13,4,15,2,17.

30. Нет, поскольку обязательно какие–нибудь два нечетных числа окажутся рядом, а их сумма будет составным числом.



31. Пусть $AB=x$ (см. рис.). Тогда $BC=x$, $CD=x+1$, $FG=x+2$, $EF=x+3$. Условие $AD=EG$ означает, что $x+x+x+1=x+2+x+3$, откуда находим $x=4$, $AD=EG=13$, $EA=GD=CD+FG=11$.

32 .Известны записи всех натуральных чисел от 1 до 8.

33. Выигрывает партнер начинающего. Разобьем клетки на пары так, как показано на рисунке (клеткам, входящим в одну пару, соответствует одна и та же буква). Партнер начинающего каждым ходом должен заштриховать клетку с той же буквой, которую имеет клетка, заштрихованная перед этим начинающим.

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

34. Число подарков должно быть делителем каждого из чисел 184 и 138. Поэтому искомое число равно НОД(184,138)= 46.

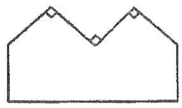
35. Прибавление к какому–нибудь числу его половины, трети или четверти означает умножение этого числа соответственно на 3/2, 4/3 или 5/4. Поэтому задуманное число равно $95:(5/4)/(4/3)/(3/2)=38$.

36. Понижение температуры на $10-(-30)=40$ градусов Цельсия означает понижение ее на $40\cdot 1{,}8=72$ градуса Фаренгейта. Поэтому –30 градусов по Цельсию и $50-72=-22$ градуса по Фаренгейту – одна и та же температура. Ответ: при –30 градусах по Фаренгейту холоднее.

37. Ответ: 82°30'или 97°30'. Нужно рассмотреть два случая: 1) минутная стрелка обогнала часовую и 2) обгона не было. В обоих случаях за последние 15 минут минутная стрелка продвинулась по циферблату на 90°, а часовая – на 7°30'. Но в первом случае угол пятнадцатиминутной давности между стрелками равен 0 (они совпадали), а теперешний 90°–7°30'=82°30'; во втором же случае угол пятнадцатиминутной давности равен 180°, а теперешний 180°–90°+7°30'=97°30'.

38. В каждой вершине должен находиться хотя бы один конец какого–нибудь куска. Поэтому концов должно быть не менее 8 и, значит, кусков не менее 4. Нетрудно найти способ разрезания проволоки на 4 нужных куска.

39. Да, например, семиугольник вида, показанного на рисунке.



40. Ответ: 151·7=1057, 151·9=1359 и 181·6=1086.

41. Выигрывает начинающий.

42. Да, например, в правильном 12–угольнике каждую вершину соединим с 5 наиболее удаленными от нее.

43. Перебором устанавливается, что искомая длина равна 44 попугаям.

44. Ответ: x=–392/387

45. В этом примере 10101 делится на 111.

46. Пусть O – центр круга, P – отмеченная точка. Вырежем из круга два маленьких (непересекающихся) кружка с центрами в точках O и P.

47. Да, например, число 1111357.

48. Частей может быть 5.8,9,10 или 11.

49. Выигрывает партнер начинающего.

50. Да, если, например, одна конфета стоит 111 рублей.

51. Ответ: 19+98+81=198.

52. Так как сделано 64 хода, то достаточно доказать четность числа недиагональных ходов. Они характеризуются тем, что меняют цвет поля, на котором находится король. Цвет же менялся четное число раз, поскольку маршрут замкнутый.

53. Решая "с конца", находим, что перед третьим переливанием в стаканах было 50, 100 и 150 г. воды, перед вторым переливанием – 50, 150 и 100 г., а первоначально – 75, 125 и 100 г.

54. Используя тот факт, что сумма углов в треугольнике равна 180°, можно доказать, например, равенство углов DAC и DCA, после чего легко вывести равенство всех углов четырехугольника и равенство всех его сторон.

55. Искомое число T находится из уравнения 50–T=1.8·(10–T). Ответ: T=–40.

56. Наибольшее возможное число частей – 20.

57. Выигрывает партнер начинающего.

58. Ответ: 43.

59. Ответ: за (1995–1):2=997 ударов.

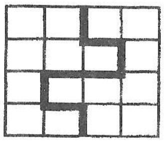
60. Ответ: "Мама мажет Диме, Пете и Жене мед и джем".

61. Ответ: самая легкая вещь – картина, самая тяжелая – саквояж.

62. До удаления игрока всем вместе было 11·20=220 лет, после удаления стало 10·19=190. Следовательно, удаленному игроку 220–190=30 лет.

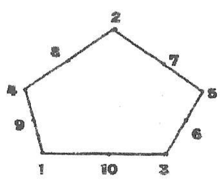
63. Треугольник можно разрезать на два только разрезом, проходящим через вершину. Пусть ABC – исходный треугольник, BM – соответствующий разрез. Отрезок BM является общей стороной двух равных треугольников и, поскольку против равных сторон должны лежать равные углы, имеем ∠BAM= ∠BCM, откуда AB=BC.

64. Можно получить за 9 ходов: 0→1→2→4→5→10→20→40→80→81, и это число ходов минимально возможное. В самом деле, очевидно, должно быть 0→1→2 и 80→81 а число 80 из числа 2 нельзя получить меньше, чем за 6 ходов.
65. Выигрывает партнер начинающего.
66. Для нумерации всех 120 квартир понадобилось $9\cdot1+90\cdot2+21\cdot3=252$ цифры, причем для квартир с номерами от 61 до 120 (т.е. второго подъезда) – $39\cdot2+21\cdot3=141$ цифры. Одна цифра обходилась, следовательно, в $8460/141=60$ рублей, а первый подъезд израсходовал $60\cdot(252-141)=6660$ рублей.
67. Ответ: 13 тугриков.
68. Пару точек одного цвета можно найти среди трех вершин равностороннего треугольника со стороной 1 см.
69. Ответ: Веня и Женя правдивы, а Беня и Сеня говорят неправду.
70. Годится такая последовательность:1,3,6,9,7,10,8,5,2,4.



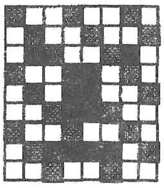
71. Смотри рисунок.

72. Наименьшее число закрашенных клеток – 21.
73. Выигрывает партнер начинающего.
74. Способ построения ясен из равенства: $50=4\cdot40-2\cdot55$.
75. На примере, когда АО насчитывает всего трех членов – Ваню, Васю и президента, а доход каждого из них равен первоначально 1000 руб., покажем, как может действовать президент. Ему достаточно поставить на голосование два вопроса: "Кто за то, чтобы Ваня отдал каждому из остальных членов по 500 руб.?" и (затем) "Кто за то, чтобы Вася отдал каждому из остальных членов по 500 руб.?"
76. Нет, поскольку, например, первая фишка слева может попасть только на нечетное место слева и, следовательно, не сможет стать первой справа.
77. Пусть X, Y и Z – количество конфет, съеденных Леной, Сашей и Наташей соответственно. Тогда имеем равенства $X+Y=Z+11$ и $Z+X=Y+7$, сложив которые, получим $2X+Y+Z=Y+Z+18$, т.е. $X=9$, Лена съела 9 конфет.
78. Если углы ABC и A'B'C' прямые, треугольники ABC и A'B'C' равны по катету и гипотенузе. Пусть теперь углы ABC и A'B'C' тупые. Из точек A и A' опустим перпендикуляры AP и A'P' на продолжения сторон CB и C'B' соответственно. Из равенства прямоугольных треугольников ABP и A'B'P' (по гипотенузе и острому углу) следует равенство прямоугольных треугольников ACP и A'C'P' (по катету и гипотенузе), а из обоих этих равенств следует равенство треугольников ABC и A'B'C'.
79. Очевидно, что если бы Петя родился до 1900 года, то сумма цифр его года рождения была бы меньше его нынешнего возраста. Пусть год рождения Пети – $1900+10\cdot X+Y$, где X, Y – цифры. По условию $1995-(1900+10X+Y) = 1 + 9+ X+Y$, откуда получаем равенство $11X+2Y=85$, которому удовлетворяет только одна пара цифр: X=7, Y=4. Следовательно, Петя родился в 1974 году.
80. На рисунке показан пример расстановки чисел для n=5.



81. Выигрывает начинающий. Выигрышная стратегия находится разбором игры с конца.

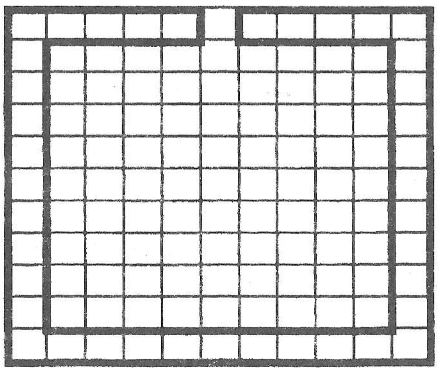
82. Достаточно заметить, что частное и делитель имеют разные знаки.
83. Все 900 трехзначных чисел разбиваются на 450 пар: (100;999),(101;998),... (449,450). Сумма чисел каждой пары равна $1099=7\cdot157$ и поэтому сумма всех трехзначных чисел делится на 7.
84. Пусть M – середина стороны AC, N – основание высоты, проведенной к этой сторон. Треугольники ABM и CPM равны (по первому признаку), причем $\angle MCP = \angle BAC = 33°$. Равны и прямоугольные треугольники BNC и QNC (по двум катетам), причем $\angle NCQ = \angle NCB = \angle BCA = 67°$. Отсюда $\angle PCQ = 67° - 33° = 34°$.
85. Поскольку AB=QC, BP=CP=DA, $\angle ABP = \angle QCP = \angle QDA = 90° + 60° = 150°$, то равны между собой (то первому признаку) три треугольника – ABP, QCP и QDA. Отсюда AP=PQ=QA.
86. Выделим некоторые клетки серым цветом, как показано на рисунке. Эти клетки выбраны так, что всякий трехклеточный прямоугольник содержит ровно одну выделенную клетку. Если бы удалось разбить нашу фигуру из 60 клеток на трехклеточные прямоугольники, то получилось бы 20 прямоугольников. Но выделенных клеток не 20, а 21.



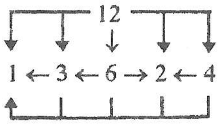
87. Ответ: 6.
88. Ответ: 10.
89. Нет, так как ни на каком (и на двухмесячном, в частности) промежутке времени число суббот не может превосходить число понедельников более, чем на 1.
90. Каждую из клеток доски пометим одной из цифр – 1, 2, 3 или 4, как показано на рисунке. Королей, стоящих на клетках с одинаковыми цифрами будем считать принадлежащими к одной группе, а стоящих на клетках с разными цифрами – к разным.

3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2

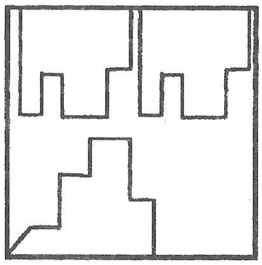
91. Можно; пример такого разрезания показан на рисунке, где квадрат состоит из 121 клетки размером 1x1 см². Многоугольник P (обведен двойной линией) имеет площадь 39 см² и периметр 80 см., а многоугольник S (остальная часть квадрата) имеет площадь 82 см² и периметр 38 см.



92.

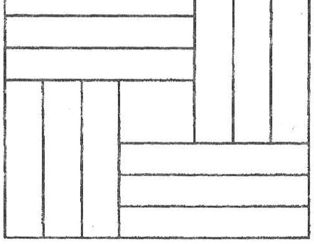


93. Число двоек равно $5a_5+4(a_4-a_5)+3(a_3-a_4)+2(a_2-a_3)+(a_1-a_2)=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$
94. Цари правили в следующем порядке: Павел Петрович, Александр Павлович, Николай Павлович, Александр Николаевич, Александр Александрович, Николай Александрович.
95. Пусть А и В – цифры искомого числа, $A>0$. Из условия следует, что $(10A+B)+(A+B)=10B+A$, откуда $5A=4B$. Поскольку $A>0$, то последнему равенству удовлетворяет только одна пара цифр: $A=4$, $B=5$. Поэтому искомое число равно 45.
96. Ответ: 60°.
97. Нет. Решение может основываться на признаке делимости на 3.
98. Ответ: 6.
99. Пример такого разрезания показан на рисунке.



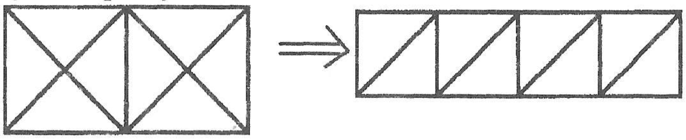
100. См. указание к задаче 70.
101. Например, 67, 2 и остальные – единицы.
102. Здесь 124 умножается на 97.
103. Певца зовут Фрол Фомич.
104. Сопоставим группам числа 1,2,...,10, расположенные по часовой стрелке. Выбрав одну страну, помещаем одного из ее спортсменов в группу 1, одного – в группу 2, и т.д.. Когда все спортсмены этой страны будут распределены, выбираем другую страну и, продолжая двигаться по часовой стрелке, распределяем ее спортсменов по одному в группу. Затем переходим к третьей стране и так далее.
105. Пусть матбой начался в А часов В минут, а закончился в В часов А минут. Если $A<22$, то $A<B$, откуда $A=B-3$ и продолжительность матбоя 2 часа 57 минут. Рассмотрение случая $A\geq22$ дает еще один ответ – 2 часа 22 минуты.
106. Имеем равенства $1/2+(-1)=1/2:(-1)=1/2\cdot(-1)$.
107. Занумеровав полученные шесть кусков числами от 1 до 6, как показано на рисунке, сложим треугольник, каждая сторона которого вдвое длиннее медианы какого–либо из разрезанных треугольников.

108. Доказав, что указанные медиана и биссектриса должны выходить из разных углов, рассмотрим треугольник АВС, в котором медиана АМ и биссектриса ВР пересекаются под прямым углом в точке О. Треугольники ОАВ и ОМВ равны (по катету и острому углу), причем $AB=BM$. Но тогда $BC=2AB$.



109. На рисунке показано, как можно вырезать 12 прямоугольников. Большего количества прямоугольников вырезать нельзя, поскольку площадь

квадрата (8·8=64) меньше площади 13 таких прямоугольников (13·5=65).
110. Искомое число равно НОД(30,33): НОК(19,95)=3/95.
111. Допустим, что нашлись такие числа. Из рассмотрения наклонов прямых к оси OX следует, что среди чисел A, B и C имеется два положительных. Однако, рассматривая значения функций при x=0, видим, что среди чисел A, B и C только одно положительное.
112. Рассмотрите момент появления на катке последнего ученика.
113. Можно; на рисунке показан способ разрезания исходного прямоугольника на 8 равнобедренных прямоугольных треугольников, из которых складывается нужный прямоугольник.



114. Пусть X матчей турнира закончились вничью. Тогда все команды–участницы таких матчей набрали в них 2X очков. Число остальных (не ничейных) матчей равно 15–X (поскольку всего в турнире сыграно (6·5)/2=15 матчей) и, следовательно, общее число очков всех команд равно 2X+3(15–X)=45–X. С другой стороны, оно равно 13+10+7+5+3+2=40. Поэтому X=5. На рисунке приведен пример турнирной таблицы такого турнира.

	A	B	C	D	E	F
A		1	3	3	3	3
B	1		3	0	3	3
C	0	0		3	1	3
D	0	3	0		1	1
E	0	0	1	1		1
F	0	0	0	1	1	

115. Да; таким числом является, например, 9999999999957.
116. Нет. Всего имеется (7·6)/2=21 пара друзей, на каждом киносеансе было 6 пар рядом сидящих друзей,а 21 на 6 нацело не делится.
117. Доказав равенство треугольников ANC и MCB, воспользуемся тем, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам равны: CK=CL, где K и L – середины отрезков AN и MB. Заметим также, что ∠ACK=∠MCL=60°.
118. Заметим, что среди любых трех подряд сидящих людей есть по крайней мере один астролог. Отсюда следует, что число математиков за столом не превосходит 8. С другой стороны, легко убедиться в том, что оно может равняться 8.