Л. Э. Медников

Чётность

Издание четвертое, стереотипное

Издательство МЦНМО
Москва, 2013

УДК 51(07)
ББК 22.1
М42

Медников Л. Э.

М42 Чётность.— 4-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2013.— 60 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0078-0

Книжка посвящена задачам, связанным с понятием чётности. В неё вошли разработки четырёх занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности и методическими указаниями для учителя. Приведён большой список дополнительных задач с решениями. Большинство задач, рассмотренных в книжке, являются «классическими» для этого раздела математики. Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, а также всем любителям математики.

Первое издание книги вышло в 2009 г.

Леонид Эммануилович Медников

Чётность

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская* Рисунки *Д. М. Смирнова*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 11.02.2013 г.
Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 3 $^3/_4$ печ. л.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в типографии ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-5-4439-0078-0

От редколлегии

«Мастеръ Гамбсъ этимъ полукресломъ
начинаетъ новую партію мебелі ...»
И. Ильф, Е. Петров «Двенадцать стульев»

Вы держите в руках первую книжку из новой серии ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ. По нашему замыслу брошюры этой серии будут отличаться от многих популярных математических книг тем, что наш главный адресат — *школьный учитель математики.* Учитель, который понимает, что для пробуждения интереса к математике и для развития школьников часто не хватает времени школьных уроков. Учитель, который готов вести в своей школе математические кружки или факультативы. Надеемся, что книги этой серии позволят любому учителю сэкономить силы и время на подготовку занятий, и окажутся особенно полезны тем, у кого не хватает опыта.

Мы планируем издать книжки, содержание которых будет по возможности полно охватывать традиционную тематику математических кружков. Авторы книг серии — учителя и руководители кружков, которые поделятся своим богатым опытом. Ещё раз подчеркнём, что брошюры будут составлены таким образом, что с их помощью сможет вести занятия с *обычными* школьниками *учитель* (или студент-математик), даже не обладающий подобным опытом. Надеемся также, что книжки нашей серии будут интересны школьникам и их родителям и окажутся полезными для самообразования.

В брошюру по каждой теме войдут разработки нескольких занятий с изложением необходимой теории, разобранными примерами, задачами, которые автор рекомендует решить на данном занятии (к ним приводятся подробные решения), и *методическими указаниями для учителя*. Помимо этого, каждая брошюра будет содержать список дополнительных задач по теме и различные приложения (исторические сведения, дополнительный теоретический материал и пр.). При желании её можно использовать как дидактический материал (копируя то или иное занятие), либо делать выборки для проведения конкретного занятия или для составления *массовой* математической олимпиады.

Важно, что изложение каждой темы будет начинаться практически «с нуля» или во всяком случае там, где заканчиваются стандартные школьные учебники. Кроме того, авторы постараются дать *конкретные методические рекомендации*: для какого возраста целесообразно проводить то или иное занятие и какими предварительными знаниями должны владеть школьники, с которыми планируется изучить ту или иную тему.

Мы будем благодарны за любые замечания и пожелания, которые просим направлять координатору проекта по электронной почте по адресу `blinkov@mccme.ru`.

Предисловие

Понятие чётности очень важно для развития математической культуры школьника. Идейно это понятие простое и обычно не вызывает трудностей. Задачи же, связанные с чётностью, могут варьироваться от очень простых до очень сложных. Эти задачи позволяют на простом материале ввести школьника в разнообразный круг математических идей. Прежде всего, тема «Чётность» является как бы введением в более общую тему «Делимость и остатки», которая близко примыкает к школьной программе. Но, несмотря на простоту ряда задач, их решение требует каких-то логических умозаключений, что тоже позволяет развить математическую культуру. С другой стороны, в предлагаемых задачах в зачаточной или более серьёзной форме встречаются более далёкие от школьной программы, но часто встречающиеся на олимпиадах идеи, такие как *инвариант*, *периодичность*, *раскраски*, *математическая индукция* и др. Чётность часто используется как инструмент при решении задач на *процессы*, *игры*, *графы* и т. д.

Основной материал разбит на четыре занятия. Информация для учителя набрана более мелким шрифтом. Задачи, которые (при недостатке времени) можно опустить, помечены звёздочкой (их можно включить в домашнее задание). В приложении собраны задачи, которые можно использовать для домашних заданий, самостоятельной работы учащихся, школьных олимпиад и т. п.

Для понимания материала и решения большинства задач не требуется знаний, выходящих за рамки начальной школы: понятие натурального и простого числа, признак делимости на 2, начала алгебры.

На своих занятиях автор предпочитает обходиться без раздаточного материала. Тем не менее, по просьбе редакции такой материал включён (см. Приложение). Он имеется в двух вариантах. Желательно использовать второй, куда включены только задачи с «длинными» условиями.

Конечно, автор не сам придумывал задачи. Многие из них известны уже давно, часть появилась в последние годы. Авторы некоторых задач нам известны, но поскольку нет никакой возможности установить авторство *всех* задач, нам пришлось вообще отказаться от указания авторства. Надеемся, что авторы задач нас простят.

Вводная задача.

Николай с сыном и Пётр с сыном пошли на рыбалку. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр — столько же, сколько его сын. Все вместе поймали 27 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

Сначала кажется, что в задаче не хватает данных: два неизвестных и одно уравнение. Затем кто-то должен сообразить, что условия задачи противоречивы. Действительно, отцы поймали столько же рыб, сколько и сыновья. Но тогда общее число рыб должно быть чётным, а по условию оно нечётно. (Вариант рассуждения: Николай с сыном вместе поймали *чётное* число рыб. То же верно и для Петра с сыном. Значит, и сумма этих чисел чётна. Если школьники сами не догадаются до одного из этих соображений, следует им немного подсказать).

Но никакого противоречия нет! К противоречию привело *неявное* предположение о том, что на рыбалке было четыре человека. Но их могло быть и три (Николай — сын или отец Петра). Из условия теперь следует, что все поймали рыб поровну, то есть по 9 штук.

С этой задачей (но не с её решением) желательно ознакомить школьников за несколько дней до начала первого занятия.

Занятие 1

Чётность суммы и произведения

Стоит начать с разбора и обсуждения вводной задачи. Она позволяет начать разговор об определении и свойствах чётности, а также вспомнить признак чётности.

Чтобы каждый раз не повторяться, договоримся, что все числа, о которых пойдет речь на этом занятии, — целые.

Прежде всего, мы использовали тот факт, что число вида $n+n$ чётно (отцы поймали столько же рыб, сколько сыновья, поэтому вместе они поймали *чётное* число рыб). Вот ещё одна задача, иллюстрирующая ту же идею.

Задача 1. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Решение. Сколько раз он прыгнул вправо, столько же прыгнул и влево (так как вернулся в исходную точку).

Далее следует довольно много формальных рассуждений. Они предназначены для въедливых школьников, которые требуют всё доказывать. Если есть уверенность в том, что школьники хорошо понимают *содержательный* смысл приводимых утверждений, то большую часть формальных рассуждений можно (на усмотрение учителя) опустить.

Откуда следует, что число вида $n+n=2n$ чётно? А это просто определение — чётным называется число, которое делится на 2. Таким образом, «общий вид» чётного числа $2n$, где n — произвольное целое число.

Речь идёт именно о целых, а не только о натуральных (то есть целых положительных) числах. В частности, важно понимать, что 0 — тоже чётное число.

Каков же «общий вид» *нечётного* числа? $2n+1$. Действительно, если от нечётного числа отнять 1, то оно станет чётным, то есть нечётное число равно сумме чётного числа $2n$ и единицы.

Часто используется запись нечётного числа и в виде $2n-1$.

Из определения чётного числа сразу следует, что *произведение любого (целого) числа на чётное число чётно.*

Формальное доказательство: $m \cdot 2n = 2(mn)$.

Несколько более сложно проверить, что *произведение двух нечётных чисел нечётно.*

Формальное доказательство: $(2m+1)(2n+1) = 2(2mn+m+n)+1$.

Мы говорим, что два числа имеют *разную* чётность, если одно из них чётно, а другое нечётно. В противном случае числа имеют *одинаковую* чётность.

Как определить чётность суммы?

- *Сумма двух чисел разной чётности нечётна.*
- *Сумма двух чисел одной чётности чётна.*

Доказательство: $2m+(2n+1) = 2(m+n)+1$; $2m+2n = 2(m+n)$, $(2m+1)+(2n+1) = 2(m+n+1)$.

Задача 2. Сформулируйте и докажите обратные утверждения.

Решение. *Если сумма двух чисел нечётна, то слагаемые имеют разную чётность.* Действительно, если бы они имели одинаковую чётность, то сумма была бы чётной.

Если сумма двух чисел чётна, то слагаемые имеют одинаковую чётность. Доказательство аналогично.

Задача 3. Числа m и n целые. Докажите, что число $mn(m+n)$ чётно.

Решение. Если числа m и n одинаковой чётности, то чётна их сумма $m+n$. Если же они разной чётности, то чётно их произведение mn. В любом случае произведение чисел mn и $m+n$ чётно.

Задача 4. Что можно сказать о чётности разности двух чисел?

Ответ: то же, что и о сумме.

Тут важно объяснить, что доказывать это отдельно *не требуется*: $m - n = m + (-n)$, то есть разность и сумма — одно и то же. Следует, правда, отметить, что *при смене знака числа его чётность не меняется.*

Заметим, что *чётность суммы двух чисел равна чётности их разности.*

При решении вводной задачи мы пользовались также признаком делимости на 2:

- *число чётно тогда и только тогда, когда чётна его последняя цифра*,

применив его для того, чтобы выяснить нечётность числа 27.

Доказательство: любое натуральное число n можно записать в виде $n = 10a + b$, где b — его последняя цифра. Первое слагаемое $10a = 2 \cdot 5a$ чётно. Следовательно, чётность суммы $10a + b$ совпадает с чётностью слагаемого b. Доказательство для отрицательных чисел сводится к замене знака и переходу к разобранному случаю натуральных чисел.

Задача 5. Сумма трех чисел нечётна. Сколько слагаемых нечётно?

Ответ: одно или три.

Решение. Нетрудно привести примеры, показывающие, что оба случая возможны. Остальные два случая (нечётных слагаемых два или их нет совсем) легко приводятся к противоречию.

Теперь можно перейти к наиболее общей формулировке.

- *Чётность суммы совпадает с чётностью количества* ***нечётных*** *слагаемых.*

Желательно, чтобы школьники сами сформулировали это правило (не обязательно этими же словами). Доказательство лучше оставить в качестве домашнего задания (в этом случае его следует разобрать на одном из следующих занятий) или опустить. Мы приведём его в занятии 4.

Задача 6. Не вычисляя суммы $1 + 2 + \ldots + 1999$, определите ее чётность.

Решение. В этой сумме 1000 нечётных слагаемых. Следовательно, она чётна.

Задача 7. На доске написаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 612 чисел?

Решение. Если сумма всех написанных чисел *чётна*, то количество *нечётных* слагаемых *чётно*. Следовательно, есть чётное слагаемое; его и надо стереть. Если же сумма всех написанных чисел *нечётна*, то количество *нечётных* слагаемых *нечётно*. Значит, оно больше нуля (0 — чётное число), и можно стереть нечётное слагаемое.

Для 612 чисел утверждение неверно. Если все слагаемые нечётны, то ни одно нельзя стереть, не «испортив» сумму.

Задача 8. В ряд выписаны все числа от 1 до 1998. Требуется расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать?

Ответ: не удастся.

Решение. Чётность числа не зависит от поставленного перед ним знака, поэтому при любой расстановке знаков будет 999 нечётных слагаемых. Поэтому в любом случае сумма будет нечётна.

Задача 9*. Можно ли числа 1, ..., 21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимальное число равнялось сумме всех остальных?

Ответ: нельзя.

Решение. При таком разбиении сумма чисел в каждой группе была бы чётна. А сумма всех чисел нечётна.

Домашнее задание. Учитель может оценить, насколько хорошо усвоили материал учащиеся, и выбрать один из двух рекомендованных вариантов домашнего задания: «простой» или «сложный» (или составить свой вариант). В вариантах указаны номера из раздела «Дополнительные задачи».

Решения задач из домашнего задания желательно обсуждать. Но не следует это делать в начале следующего занятия — тогда на само занятие времени не останется. Например, можно после двух занятий устроить промежуточное занятие, посвящённое только разбору домашних заданий.

Простой вариант: 1а – б), 2, 3, 5 – 10.
Сложный вариант: 1а – в), 4 – 6, 9, 11 – 16.

Приложение

Раздаточный материал

Занятие 1

Задача 1. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Задача 3. Числа m и n — целые. Докажите, что число $mn(m+n)$ чётно.

Задача 4. Что можно сказать о чётности разности двух чисел?

Задача 5. Сумма трех чисел нечётна. Сколько слагаемых нечётно?

Задача 6. Не вычисляя суммы $1+2+\ldots+1999$, определите ее чётность.

Задача 7. На доске написаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 612 чисел?

Задача 8. В ряд выписаны все числа от 1 до 1998. Требуется расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать?

Задача 9. Можно ли числа 1, …, 21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимальное число равнялось сумме всех остальных?

Оглавление