П. В. Чулков

Арифметические задачи

Издательство МЦНМО
Москва, 2009

УДК 51(07)
ББК 22.1
Ч81

Чулков П. В.

Ч81 Арифметические задачи.— М.: МЦНМО, 2009.— 64 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-523-8

Третья брошюра серии ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ посвящена текстовым задачам, решаемым «арифметическим методом». В ней приведены шесть занятий, в которых подобраны задачи, ориентированные в основном на работу со школьниками 5–6 классов.

Все приведённые сюжетные задачи решаются путём прямых рассуждений, вытекающих из анализа конкретной ситуации. Конечно, большинство из них можно решить «алгебраически» (с помощью уравнений), но на начальном этапе обучения овладение арифметическим методом представляется очень важным для развития логического мышления школьников, для приобретения ими навыков анализа текста и умений рассуждать и делать правильные выводы.

Надеемся, что книжка будет интересна учителям математики, руководителям математических кружков, студентам педагогических вузов и всем, кто занимается со школьниками.

Павел Викторович Чулков

Арифметические задачи

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская* Рисунки *Д. М. Смирнова*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 16.06.2009 г.
Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 4 печ. л.
Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография ”САРМА”»

ISBN 978-5-94057-523-8

Предисловие

1. Арифметические задачи — традиционное название сюжетных задач, решаемых без составления уравнений, путём *прямых* рассуждений, вытекающих из анализа конкретной ситуации (такой метод решения называют «*арифметическим*»). Конечно, большинство сюжетных задач можно решить «*алгебраически*» (с помощью уравнений), но на начальном этапе обучения арифметический метод полезней.

Дело в том, что арифметический метод лучше приспособлен к стилю мышления большинства учащихся 5–6 классов: все проводимые рассуждения «предполагают совершенно наглядное и конкретное, осмысленное в области тех величин, о которых идет речь, истолкование»[1].

Последнее особенно важно, ведь школьники, как правило, не слишком хорошо разбираются в процессах, лежащих в основе сюжетов задач (движение, работа, производительность труда).

Таким образом, арифметический метод *прямо требует* от ученика построения наглядной модели, что важно при дальнейшем обучении: опыт показывает, что лучше составляют уравнения те учащиеся, которые хорошо умеют решать задачи арифметически!

2. В брошюре представлены материалы шести занятий, а также раздел **Дополнительные задачи.**

Задачи предназначены для учащихся 5–6 классов, решения к задачам по возможности «ориентированы» на пятиклассников и не требуют сведений, выходящих за пределы школьной программы. Ко всем задачам предложены решения, к некоторым — указания и комментарии для учителя. В качестве эпиграфов к заня-

[1]И.В. Арнольд [3]. См. также [8], [16], [17] в списке литературы.

тиям используются задачи-шутки, обсуждение которых поможет поднять настроение учащимся и, возможно, избежать некоторых типичных ошибок.

Занятие первое: знакомство с арифметическим методом.

Представлены примеры задач, решаемых арифметическим методом. В решениях отрабатывается использование словесных конструкций: «предположим, что...», «если..., то...», «пусть...», а также запись решения «по вопросам». Желательно проверять, удовлетворяет ли ответ условию задачи, используя при этом простейшие рисунки.

Занятия второе: задачи на проценты.

Это одна из самых трудных тем школьного курса, к которой необходимо возвращаться многократно. При решении задач на проценты важно осознавать, что именно принято за 100%, понимать, что «увеличить число на 32%» означает «умножить его на $1,32$», а «уменьшить на 32%» — «умножить на $0,68$». Поясним сказанное. Пусть дано некоторое число. Разрежем его на 100 равных частей. Уменьшить на 32% — значит, убрать 32 части. Останется 68 частей. Но того же результата можно достичь, умножая на $0,68$ — ведь тоже останется только 68 частей из 100!

Занятие третье: бассейны, работа и прочее.

Нередко учащиеся не видят за разными сюжетами этих задач общей математической основы, поскольку плохо представляют, что происходит при том или ином процессе. Задача преподавателя — помочь школьникам разобраться в этом.

Занятие четвертое: «увидеть» движение!

При решении задач на движение полезно использовать рисунки, на которых фиксируются те или иные «ключевые» моменты условия задачи.

Примеры таких рисунков представлены в материалах данного занятия. Такая наглядная основа позволяет существенно облегчить нахождение решения.

Занятие пятое: путь, скорость, время.

Цель занятия — потренироваться в решении задач на движение, показать связь задач на движение с другими типами арифметических задач (совместная работа и другие непрерывные процессы), выявить взаимосвязи между основными параметрами движения (путь, скорость, время). Среди прочих приведены задачи, использующие понятие «средней скорости».

Занятие шестое: движение по реке.

Рассмотрены задачи на движение по реке и другие аналогичные задачи. При их решении используется идея «сложения скоростей», а также идея разумного выбора «системы отсчёта».

Приняты следующие соглашения:

1) Если тело движется «по течению», то его скорость складывается из скорости тела в стоячей воде v и скорости течения реки u: $w = v + u$.

2) Если тело движется «против течения», то его скорость считается равной $w = v - u$.

3) Плоты движутся со скоростью течения реки.

Дополнительные задачи: представлены задачи, предназначенные для самостоятельной работы учащихся и организации математических соревнований. Кроме приведённых задач учителю могут понадобиться их вариации, то есть задачи с изменёнными цифрами и наименованиями, но математически равносильные (например, задача 8 занятия 6 является вариацией задачи 3 того же занятия). Мы, как правило, вариаций не приводим, считая, что учитель сможет их создать самостоятельно.

Такие задачи можно найти в популярной литературе.

3. **Об организации занятий кружка.** Один из возможных вариантов построения кружкового занятия следующий: каждое занятие рассчитано примерно на 1 час 30 минут с небольшим перерывом и состоит из двух частей:

- **разбор нового материала.** Задачи предлагаются учащимся по одной. После того как задача решена кем-нибудь из учащихся, происходит коллективное обсуждение;
- **работа с «задачами для самостоятельного решения»** происходит либо в режиме «устной олимпиады», когда школьники рассказывают преподавателю решения устно, или в режиме «математической регаты», когда решения излагаются

письменно, и, после того как собраны решения очередной задачи, преподаватель рассказывает решения учащимся.

И в том и в другом случае желательно наличие помощников (учеников старших классов или студентов).

4. **Обсуждение задач.** Важный этап работы с задачами — обсуждение решений задач с участниками кружка. Рассмотрим пример такого обсуждения.

Задача. Пешком или на автобусе?

Если Аня идёт в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то на дорогу она тратит полтора часа. Если она едет в оба конца на автобусе, то весь путь занимает у неё тридцать минут. Сколько времени тратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она идёт пешком?

Ответ: 2 часа 30 минут.

Решение. Решаем «с вопросами».

1) Сколько времени тратит Аня на дорогу «в один конец», если едет на автобусе? 30 минут : 2 = 15 минут.

2) Сколько времени тратит Аня на дорогу «в один конец», если идёт пешком? 1 час 30 минут − 15 минут = 1 час 15 минут.

3) Сколько времени тратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она идёт пешком? 1 час 15 минут × 2 = 2 часа 30 минут.

Эта задача — хороший повод для обсуждения со школьниками того, какие предположения и упрощения мы делаем, чтобы перевести житейскую ситуацию на язык математики, и в какой мере такие предположения оправданы.

Ниже приведен примерный вариант обсуждения. Вопросы, скорее всего, придётся ставить учителю. Ответы лучше не давать школьникам в готовом виде, а подводить к ним.

Учитель. Постараемся выявить те условия, которые в задачи прямо не описаны, но подразумеваются.

Ответ. Мы предположили, что дорога «туда» пешком занимает столько же времени, сколько дорога пешком «обратно». (То же, если Аня ехала «туда» и «обратно» на автобусе.)

Учитель. В каком случае такое предположение оправдано?

Ответ. Если путь и средняя скорость «туда» и «обратно» соответственно равны, то одинаково и время. Для ходьбы пешком это обычно так, когда нет дополнительных указаний типа «дорога в гору» и «дорога под гору». Если ехать на автобусе, то ответ может зависеть от того, включаем ли мы в него время, затраченное, например, на ожидание автобуса. В данном случае можно, вероятно, предположить, что, время, потраченное на ожидание автобуса при дороге «туда» и «обратно», одно и то же и им можно пренебречь.

Учитель. Что ещё может влиять на несовпадение времён?

Ответ. Ходьба не влияет, если остановки «туда» и «обратно» расположены недалеко друг от друга. Езда на автобусе может дать разницу, если пути туда и обратно разные или если средние скорости автобуса туда и обратно не одинаковы (скажем, в школу едут в час пик, много пробок).

Учитель. Что же в итоге?

Ответ. Можно предположить, что туда и обратно Аня едет по одному и тому же маршруту и время ожидания автобуса в дорогу не включается.

В комментариях, приложенных к решениям некоторых задач, имеются ответы на вопросы, которые, возможно, стоит обсудить с учащимися. Предложенные указания являются примерными. Учитель на основе собственного опыта может внести в них необходимые изменения. Автор заранее благодарен за любые замечания и рекомендации.

В заключение: автор выражает признательность А. Д. Блинкову, Ф. А. Пчелинцеву, А. В. Шаповалову и А. В. Шевкину, которые прочитали рукопись и чьи замечания существенно способствовали её улучшению.

Занятие 1

Знакомство с арифметическим методом

В одной семье два отца и два сына.
Сколько это человек?

Старинная задача.

Представлены примеры задач, решаемых арифметическим методом. В решениях отрабатывается использование словесных конструкций: «предположим, что...», «если..., то...», «пусть...», а также запись решения «по вопросам». Желательно проверять, удовлетворяет ли ответ условию задачи, используя при этом простейшие рисунки.

Задача 1. По грибы. Вася нашел на 36 грибов больше, чем Лена. По дороге домой сестра стала просить Васю: «Дай мне несколько грибов, чтобы у меня стало столько же грибов, сколько и у тебя!» Сколько грибов должен брат отдать Лене?

Ответ: 18 грибов.

Решение. Предположим, что брат отложит свои «лишние» грибы в корзинку, тогда у брата и сестры грибов станет поровну. Для достижения требования задачи брат должен отдать сестре половину лишних грибов.

Задача 2. На скотном дворе гуляют гуси и поросята. Петя сосчитал количество голов, их оказалось 30, потом сосчитал, сколько всего ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

Ответ: 12 поросят и 18 гусей.

Решение. Предположим, что на дворе гуляют только гуси. Сколько у них ног? 60 ног. Откуда взялись 24 «лишних» ноги?

Они принадлежат поросятам — по 2 ноги на каждого. Итак, на дворе гуляют 12 поросят. Остальные — гуси.

Можно рассуждать иначе: предположим, что все поросята передними лапами встали на бревно. Понятно, что в этом случае земли касается 60 ног, а остальные 24 ноги — это ноги поросят, стоящие на бревне. Следовательно, на дворе 12 поросят.

Задача 3. На поляне паслись ослы. К ним подошли несколько мальчиков. «Сядем на ослов по одному», — предложил старший. Двум мальчикам ослов не хватило. «Попробуем сесть по двое», — снова предложил старший. Тогда один осёл остался без седока. Сколько ослов и сколько мальчиков было на поляне?

Ответ: шесть мальчиков и четыре осла.

Решение. Представим сначала, что мальчики сели на ослов по одному и двум мальчикам ослов не досталось.

Посадим мальчиков на ослов по двое. Сделаем так:

1) один из мальчиков пересаживается к кому-нибудь вторым, — один осёл без седока, как и требуется;

2) два других мальчика, — те, кому первоначально ослов не хватило, подсаживаются вторыми. Итог: три осла «заняты», один — «свободен». Следовательно, мальчиков — 6, ослов — 4.

Задача 4. Сколько лет Ване? Когда Ваню спросили, сколько ему лет, он подумал и сказал: «Я втрое моложе папы, но зато втрое старше Серёжи». Тут подбежал маленький Серёжа и сообщил, что папа старше его на 40 лет. Сколько лет Ване?

Ответ: 15 лет.

Решение. Папа в три раза старше Вани, который в три раза старше Серёжи, следовательно, папа в девять раз старше Серёжи.

Другими словами, папа старше Серёжи на восемь возрастов Серёжи, что составляет 40 лет. Следовательно, Серёже 5 лет.

Ваня старше Серёжи втрое, — ему 15 лет.

В задачах данного типа, как правило, принято учитывать только «полные» года. Об этом стоит сказать учащимся.

Задача 5. «Старинная задача». Для покупки порции мороженого Пете не хватает семи копеек, а Маше — одной копейки.

Тогда они сложили все имевшиеся у них деньги. Но их тоже не хватило на покупку даже одной порции. Сколько стоила порция мороженого?

Ответ: 7 копеек.

Решение. Если бы у Пети была хотя бы копейка, то он дал бы её Маше, и им хватило бы на мороженое (ведь ей не хватало всего одной копейки!). Следовательно, у Пети денег не было совсем, а так как ему не хватало на мороженое семи копеек, то мороженое стоило семь копеек.

Здесь желательно рассказать о системах денежных единиц, об их изменении, динамике цен на мороженое и т. д. На всякий случай: очень вкусное фруктовое мороженое в 60-70-е годы стоило как раз семь копеек.

Задача 6. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, её не решивших. Кого в классе больше: решивших задачу или девочек?

Ответ: одинаково.

Решение. Прибавим к мальчикам (a человек), решившим задачу, девочек, решивших задачу (b человек). Что мы получим? Всех учеников, решивших задачу ($a + b$ человек).

Прибавим к девочкам, *не* решившим задачу (a человек), девочек, решивших задачу (b человек). На этот раз получим всех девочек ($a + b$ человек).

Мы прибавляли к равным количествам одно и то же, значит, снова получились равные количества. Следовательно, всего решивших задачу столько же, сколько девочек.

Решение задачи хорошо представить в виде таблицы.

	Решили задачу	Не решили задачу
Мальчики	a	
Девочки	b	a

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Стопки тетрадей. Если из одной стопки тетрадей переложить в другую стопку 10 тетрадей, то тетрадей в стопках станет поровну. На сколько больше тетрадей в первой стопке, чем во второй?

Задача 8. Шоколадки. Для покупки восьми шоколадок Тане не хватит 20 рублей. Если же она купит пять шоколадок, то у неё останется 100 рублей. Сколько денег у Тани?

Задача 9. Покупаем альбом. Для покупки альбома Маше не хватило 2 копеек, Коле — 34 копеек, а Васе — 35 копеек. Тогда они сложили свои деньги, но их всё равно не хватило на покупку одного альбома. Сколько стоит альбом?

Задача 10. Давным-давно. Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

Задача 11. Стулья и табуретки. В комнате стоят стулья и табуретки. У каждой табуретки — 3 ножки, у каждого стула — 4 ножки. Когда на всех стульях и табуретках сидят люди, то в комнате всего 39 «ног». Сколько стульев и сколько табуреток в комнате?

Задача 12. Ошибка при сложении. При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 6641 вместо 2411. Какие числа он складывал?

Ответы и решения

Задача 7. Ответ: на 20 больше.

Решение. Первая стопка уменьшилась на 10 тетрадей, а вторая увеличилась на 10 тетрадей, после чего стопки сравнялись в «объеме».

Задача 8. Ответ: у Тани 300 рублей.

Решение. 1) Предположим, Таня купила 5 шоколадок. Согласно условию задачи у неё осталось 100 рублей. Добавим ей ещё 20 рублей. Теперь в её распоряжении 120 рублей, на которые она может купить ещё три шоколадки. Следовательно, шоколадка стоит $120 : 3 = 40$ рублей.

2) Поскольку при покупке пяти шоколадок будет потрачено 200 рублей и ещё 100 рублей останется, то у Тани $200 + 100 = 300$ рублей.

Задача 9. Ответ: альбом стоит 35 копеек.

Решение. Так как у Коли на одну копейку больше, чем у Васи, то у него есть как минимум одна копейка, и при сложении денег к Машиным деньгам эта копейка добавится. Но денег на альбом в итоге не хватило, то есть к Машиным деньгам добавилось меньше чем две копейки, следовательно, у Васи вообще не было денег, то есть ему не хватало для покупки полной стоимости альбома.

Задача 10. Ответ: сыну — 12 лет, отцу — 36 лет.

Решение. Разница в возрасте между отцом и сыном неизменна и равна 24 годам. Так как сыну сейчас в три раза меньше лет, чем отцу, то 24 года — это удвоенный возраст сына.

Здесь полезно сделать рисунок.

Задача 11. Ответ: 4 стула и 3 табуретки.

Решение. Если бы в комнате стояли одни табуретки, то всего в комнате было бы не 39 «ног», как в условии, а не более 35. Почему? Потому что когда на табуретке сидит человек, то у каждой табуретки — 5 «ног», и количество «ног» кратно пяти, то есть если в комнате стоят 7 табуреток, то «ног» на 4 меньше, чем требуется по условию задачи. В этом случае недостаток «ног» можно компенсировать, если заменить 4 табуретки на 4 стула.

Если предположить, что комнате меньше семи табуреток, то «ног» — не более 30, и скомпенсировать недостаток «ног» не получится.

Задача 12. Ответ: 1941 и 470.

Решение. Поставив лишний ноль на конце одного из слагаемых, Коля тем самым увеличил это слагаемое в 10 раз. Таким образом, это слагаемое в 9 раз меньше разности $6641 - 2411 = 4230$. Следовательно, оно равно 470.

Приложение

Раздаточный материал

Занятие 1

Задача 1. По грибы. Вася нашел на 36 грибов больше, чем Лена. По дороге домой сестра стала просить Васю: «Дай мне несколько грибов, чтобы у меня стало столько же грибов, сколько и у тебя!» Сколько грибов должен брат отдать Лене?

Задача 2. На скотном дворе гуляют гуси и поросята. Петя сосчитал количество голов, их оказалось 30, потом сосчитал, сколько всего ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

Задача 3. На поляне паслись ослы. К ним подошли несколько мальчиков. «Сядем на ослов по одному», — предложил старший. Двум мальчикам ослов не хватило. «Попробуем сесть по двое», — снова предложил старший. Тогда один осёл остался без седока. Сколько ослов и сколько мальчиков было на поляне?

Задача 4. Сколько лет Ване? Когда Ваню спросили, сколько ему лет, он подумал и сказал: «Я втрое моложе папы, но зато втрое старше Серёжи». Тут подбежал маленький Серёжа и сообщил, что папа старше его на 40 лет. Сколько лет Ване?

Задача 5. «Старинная задача». Для покупки порции мороженого Пете не хватает семи копеек, а Маше — одной копейки. Тогда они сложили все имевшиеся у них деньги. Но их тоже не хватило на покупку даже одной порции. Сколько стоила порция мороженого?

Задача 6. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, её не решивших. Кого в классе больше: решивших задачу или девочек?

Список литературы

1. Абдрашитов Б. М., Абдрашитов Т. М., Шлихунов В. Н. *Учитесь мыслить нестандартно.* — М.: Просвещение, 1996.

2. Акулич И. Ф. *Задачи на засыпку и другие математические сюрпризы.* 2-е изд. — Мн.: ООО «Асар», 2001.

3. Арнольд И. В. *Принципы отбора и составления арифметических задач.* — М.: МЦНМО, 2008.

4. Бабинская И. Л. *Задачи математических олимпиад.* — М.: Наука, 1975.

5. Баврин И. П., Фрибус Е. А. *Занимательные задачи по математике.* — М.: Гуманит. изд. центр «Владос», 1999.

6. Горячев Д., Воронец А. *Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики.* — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

7. Грицаенко Н. П. *Ну-ка реши!* — М.: Просвещение, 1998.

8. Козлова Е. Г. *Сказки и подсказки (задачи для математического кружка).* 4-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2008.

9. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. *Математическая шкатулка.* — М.: Дрофа, 2006.

10. Нестеренко Ю. В. Олехник С. Н., Потапов М. К. *Задачи на смекалку.* — М.: Дрофа, 2003.

11. Островский А. И., Кордемский Б. А. *Геометрия помогает арифметике.* — М.: Физматгиз, 1960.

12. Савин А. П. *Занимательные математические задачи.* — М.: АСТ, 1995.

13. Романовский В. И. *Арифметика помогает алгебре.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

14. Спивак А. В. *Тысяча и одна задача.* — М.: Просвещение, 2003.

15. *Формирование приёмов математического мышления.* Под. ред. Н. Ф. Талызиной. — М.: Вентана-Граф, 1995.

16. Шевкин А. В. *Обучение решению текстовых задач в* 5–6 *классах.* — М.: Русское слово, 2003.

17. Шевкин А. В. *Сборник задач по математике для учащихся* 5–6 *классов.* — М.: Русское слово, 2003.

Оглавление