А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков

Геометрические задачи на построение

Издательство МЦНМО
Москва, 2010

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Блинков А. Д., Блинков Ю. А.

Б69 Геометрические задачи на построение.— М.: МЦНМО, 2010.— 152 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-599-3

Четвёртая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена геометрическим задачам на построение и предназначена для занятий со школьниками 7–9 классов. В неё вошли разработки девяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Приведён также большой список дополнительных задач. Большинство задач, рассмотренных в книжке, являются «классическими» для этого раздела геометрии.

В приложениях содержатся исторические сведения, а также рассматриваются некоторые вопросы повышенной трудности, связанные с геометрическими задачами на построение.

Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям геометрии.

Александр Давидович Блинков, Юрий Александрович Блинков

Геометрические задачи на построение

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 25.02.2010 г.
Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 9 $^1/_2$ печ. л.
Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография "Наука"»
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-599-3 МЦНМО, 2010

Предисловие

Предлагаемая книжка содержит девять тематических занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя: несколько подробно разобранных типовых задач по теме; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя.

Кроме того, отдельно представлен обширный список задач на построение различного уровня трудности (наиболее сложные из них отмечены знаком *), которые можно использовать на усмотрение учителя (или обучающегося). Для этих задач приведены, как правило, краткие указания к решениям, иногда — краткие или полные решения. Для удобства, в конце каждого занятия приведён список задач этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля освоения и углубления. Следует учесть, что ряд задач отнесены к нескольким занятиям (поскольку допускают различные способы решения), а некоторые задачи не вошли в эти списки.

Раздел приложений содержат ряд исторических сведений, а также некоторые вопросы повышенной трудности, связанные с геометрическими задачами на построение. В конце книги приведён список литературы, на которую делаются ссылки в тексте. Большую часть этих изданий и публикаций можно использовать в качестве дополнительной литературы.

Поскольку, на наш взгляд, в последние годы культура решения задач на построения в рамках освоения школьного курса геометрии в значительной степени утеряна, то изначально имеет смысл договориться о терминологии.

Что такое геометрическая задача на построение и что значит её решить?

Задача на построение — это задача, в которой требуется построить геометрический объект, пользуясь только двумя инструментами: циркулем и линейкой (односторонней и без делений).

Решение таких задач состоит не в том, чтобы проделать «руками» соответствующие построения, а в том, чтобы найти **алгоритм решения**, то есть, описать решение задачи в виде последовательности уже известных стандартных построений.

В этом смысле решение задач на построение хорошо иллюстрирует один из основных принципов решения любых математических задач: решить задачу это значит свести её к какой-либо задаче, уже решённой ранее!

Какие построения циркулем и линейкой считать стандартными?

Это вопрос предварительной договорённости. На наш взгляд, к стандартным построениям можно отнести следующие:

1) построение прямой, проходящей через две заданные точки;

2) построение окружности с данным центром и данным радиусом;

3) построение отрезка, равного данному;

4) построение угла, равного данному;

5) построение середины отрезка (серединного перпендикуляра к отрезку);

6) построение биссектрисы угла;

7) построение перпендикуляра к прямой, проходящего через заданную точку (*два случая*).

На основе стандартных построений легко осуществляется построение треугольников **по трём основным элементам**:

1) двум сторонам и углу;

2) стороне и двум углам;

3) трём сторонам.

При этом очень важно донести до сознания учащихся, что все **линейные элементы** в условиях задач заданы в виде **отрезков** (а не их длин), а все угловые — в виде **углов** (а не чисел, выражающих их величину)!

К тем же стандартным построениям сводятся также построения равнобедренных и прямоугольных треугольников по их основным элементам, а также построение прямой, параллельной данной и проходящей через заданную точку. Так как эти задачи (наряду со стандартными построениями) рассматриваются во всех основных школьных учебниках (см., например, [2] и [11]), то их решения мы разбирать не будем.

Таким образом, можно провести некоторую аналогию между решением задач на построение и строительством домов: стандартные построения — это «кирпичи», задачи на построение различных видов треугольников по их основным элементам — «блоки».

Теперь, пользуясь этими «блоками», мы сможем решить большинство задач на построение треугольников, в которых могут быть заданы не только основные, но и **вспомогательные элементы**. Задачи, которые мы научимся решать, станут, образно говоря, «панелями», которые можно будет затем в готовом виде использовать для решения более сложных задач, в которых строятся не только треугольники, и т. д.

Отметим, что для того, чтобы научиться решать задачи на построение (впрочем, как и другие геометрические задачи) очень важно осознавать, что решать их надо **с конца**, то есть не пытаться строить всё, что умеешь, наугад, а представить себе, что искомый объект уже построен и, исходя из этого, восстановить цепочку возможных построений.

В заключение заметим, что эффективность освоения методов решения задач на построение, предлагаемых нами, во многом зависит от учёта особенностей реального школьного курса геометрии, изучаемого школьниками, и от учебника, который при этом используется в качестве базового. Подробное изучение методов решения задач на построение позволяет заодно повторить практически все разделы школьной планиметрии, а во многих случаях и существенно углубить свои знания.

В большинстве случаев занятия 1 и 2 целесообразно проводить, на наш взгляд, не ранее второго полугодия 7 класса. В материалах этих занятий сознательно делается акцент на поиски алгоритмов построений, а вопросы исследования (количество решений задачи) остаются за их рамками. Занятия 3 и 4 имеет смысл проводить не ранее первого полугодия 8 класса. В рамках этих занятий учащимся напоминаются все этапы решения задачи на построение, но основной акцент по-прежнему имеет смысл делать на поиски алгоритмов решений. Занятия 5 и 6 проводятся после изучения школьниками в курсе геометрии темы «Движения», то есть не ранее конца второго полугодия 8 класса (а может быть, и позже). Занятия 7 – 9 адресованы, по всей видимости, девятиклассникам или учащимся старшей школы.

Естественно, что преподаватель математического кружка может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Авторы благодарны А.В. Шаповалову за подробные обсуждения, способствовавшие существенному улучшению текста, Д.В. Прокопенко и Д.Э. Шнолю — за внимательное прочтение текста и ценные замечания, и Е.С. Горской — за выполнение чертежей.

Занятие 1

Метод вспомогательного треугольника

На этом занятии мы рассмотрим *решение задач на построение треугольников* по их различным элементам, как **основным**, так и **вспомогательным**.

К вспомогательным элементам треугольника чаще всего относятся: медианы, высоты, биссектрисы, периметр, радиусы описанной и вписанной окружностей. Иногда рассматривают также сумму (разность) двух сторон или двух углов.

В большинстве случаев такие задачи решаются **методом вспомогательного треугольника**. Суть данного метода — свести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решённой задаче на построение треугольника.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по боковой стороне и проведённой к ней высоте.

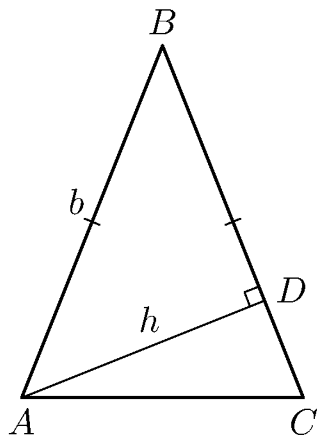

Рис. 1

Решение. Пусть искомый треугольник ABC по заданным стороне b и высоте h уже построен (см. рис. 1). Тогда на нашем чертеже образовался прямоугольный треугольник ABD, у которого заданы катет и гипотенуза. Поэтому задача сводится к построению **вспомогательного прямоугольного треугольника** ABD по катету и гипотенузе и к построению на его основе искомого треугольника (продолжим катет BD так, чтобы длина отрезка BC была равна $b\ldots$).

Обратите внимание на то, что при изложении решения мы говорим только **об алгоритме построения**, складывая его из основного «блока» и дополнительных «кирпичей»!

Отметим, что если не требовать, чтобы искомый треугольник был остроугольным, то задача будет иметь два решения. С нашей точки зрения разбирать этот вопрос сейчас преждевременно.

Рассмотрим более сложную задачу.

Пример 2. Постройте треугольник по двум его углам и периметру.

Отметим ещё раз, что периметр треугольника задан в виде отрезка.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC с данным периметром P и углами α и β при вершинах A и B соответственно — построен. «Развернём» его, то есть на прямой AB отложим отрезок AD, равный AC, и отрезок BE, равный BC. Полученные точки D и E соединим с точкой C (см. рис. 2).

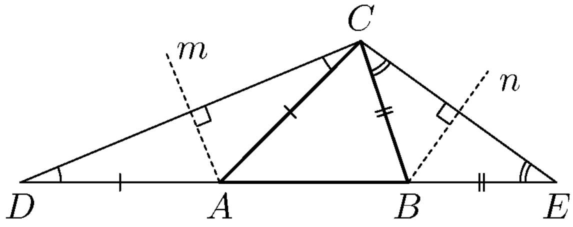

Рис. 2

Заметим, что треугольник ACD — равнобедренный, угол CAB — внешний для этого треугольника, поэтому $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично, $\angle CEB = \angle ECB = \frac{\beta}{2}$.

Таким образом, задача сводится к построению **вспомогательного треугольника** CDE по стороне и двум прилежащим к ней углам ($DE = P$, $\angle CDE = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CED = \frac{\beta}{2}$). Для того, чтобы теперь получить вершины A и B искомого треугольника, достаточно, например, провести серединные перпендикуляры m и n к отрезкам CD и CE соответственно.

Отличие этой задачи от предыдущей — **вспомогательного треугольника** не было, но мы его создали дополнительным построением.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев, когда задана сумма (или разность) каких-либо отрезков, полезно сделать дополнительное построение, в результате которого заданный отрезок появляется на чертеже. Такой метод иногда называют «спрямлением» (и он применяется не только в задачах на построение).

Подчеркнём ещё раз, что решение задач на построение напоминает строительство домов или игру с детским конструктором: начав с «кирпичиков» (деталей), мы собираем из них «блоки» и уже можем пользоваться ими, не обращая внимания на кирпичи, из которых эти блоки составлены; затем из «блоков» можно собирать более крупные «блоки» («панели») и ими мы также сможем пользоваться и т. д.

В рассмотренных примерах таким «блоком» является **построение вспомогательного треугольника**, то есть решение задачи сводится к уже известному нам построению какого-либо треугольника.

Ещё раз обращаем внимание на то, что в приведённых примерах намеренно обсуждался только алгоритм решения. Если подходить формально, то в условиях предложенных задач слово «Постройте ...» надо заменить на словосочетание «Объясните, как построить ...», и мы этого не сделали только отдавая дань сложившейся традиции.

В заключение отметим, что в любом случае для построения треугольника достаточно задать **три** его элемента, среди которых хотя бы один — **линейный**.

Почему именно **три** элемента? Это связано с наличием признаков равенства треугольников. Действительно, если рассматривать только **основные элементы** треугольника, то наборы из трёх элементов, хотя бы один из которых линейный, либо в точности соответствуют условиям признаков равенства треугольников (три стороны; две стороны и угол между ними; сторона и два прилежащих к ней угла), либо легко сводятся к ним (сторона и два угла, один из которых лежит напротив этой стороны). То есть по таким трём основным элементам треугольник определяется однозначно.

Единственным исключением является такой набор: две стороны и угол, лежащий напротив одной из них. В этом случае могут существовать два треугольника, удовлетворяющих условию задачи.

Действительно, пусть надо построить треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда, построив угол A, равный α, и отложив на одной из его сторон отрезок AB длины c, проводим окружность с центром B и радиусом a. Эта окружность может не пересечься с другой стороной построенного угла (тогда задача решений не имеет), может касаться этой стороны (одно решение, при этом искомый треугольник — прямоугольный), а может пересечь её в двух точках (см. рис. 3). В последнем случае мы получим два треугольника, удовлетворяющих условию задачи: ABC_1 и ABC_2.

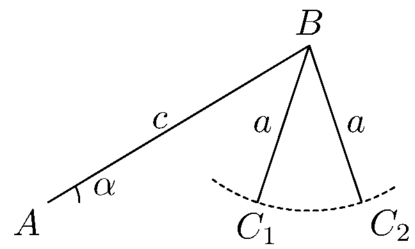

Рис. 3

О том, как именно зависит количество решений задачи от соотношения между заданными величинами, имеет смысл говорить после изучения школьниками метрических теорем в произвольном треугольнике (обычно это происходит в 9 классе).

Задачи

Задача 1. Объясните, как построить углы, имеющие величину: а) $45°$; б) $60°$; в) $30°$.

Задача 2. Объясните, как построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе, проведённой к боковой стороне.

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:

а) стороне и проведённым к ней медиане и высоте;

б) двум углам и высоте (*рассмотрите два случая*);

в) двум сторонам и медиане (*рассмотрите два случая*);

г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

Задача 4. Объясните, как построить прямоугольный треугольник, если даны его острый угол и разность гипотенузы и катета.

Ответы и решения

Обсуждаются только алгоритмы построения, сведённые к крупным «блокам».

Задача 1. а) *Два способа*: построить биссектрису прямого угла или построить равнобедренный прямоугольный треугольник, задав его катет произвольно.

б), в) *Два способа*: построить равносторонний треугольник с произвольной стороной и биссектрису любого его угла или построить прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза в два раза больше катета.

Задача 2. Решение сводится к построению вспомогательного треугольника ABL по стороне и двум углам (см. рис. 4; $AL = l$, $\angle ABL = \beta$, $\angle BAL = 45^\circ - \frac{1}{4}\beta$). Искомый треугольник ABC получится, если на луче BL отложить отрезок BC, равный AB.

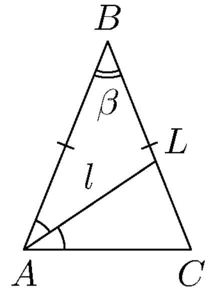

Рис. 4

Задача 3. а) Решение сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника BHM по катету и гипотенузе (см. рис. 5; $BH = h$, $BM = m$). Искомый треугольник ABC получится, если на прямой MH отложить отрезки MC и MA, равные $0,5b$.

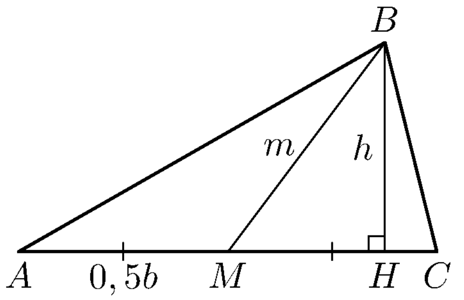

Рис. 5

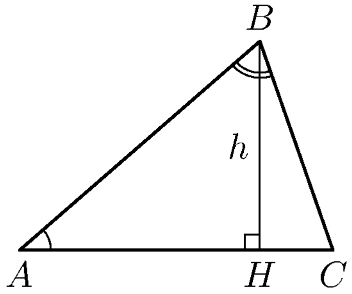

Рис. 6

б) Пусть данная высота искомого треугольника ABC проведена из вершины B. Поскольку по двум углам треугольника третий угол определяется однозначно, то можно считать, что заданы углы BAC, равный α, и ABC, равный β (см. рис. 6). Тогда решение сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника ABH по катету и острому углу ($BH = h$, $\angle BAH = \alpha$) и откладыванию от луча BA в нужную полуплоскость угла CBA, равного β (точка C — пересечение прямой AH со стороной построенного угла).

При желании можно обратить внимание учащихся на то, что искомый треугольник ABC может получиться не только остроугольным, но также тупоугольным или прямоугольным (в зависимости от величин заданных углов).

в) Пусть в искомом треугольнике ABC заданы стороны $AB = c$ и $BC = a$. Если медиана проведена к одной из данных сторон, например, $AM = m$, то решение сводится к построению вспомогательного треугольника ABM по трём сторонам (см. рис. 7а; $AB = c$, $AM = m$, $BM = 0,5a$) и его очевидному достраиванию до искомого треугольника.

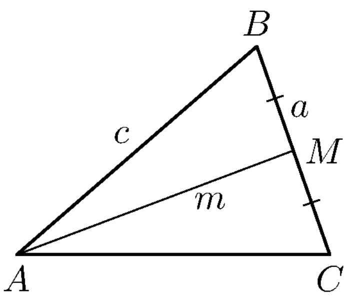

Рис. 7а

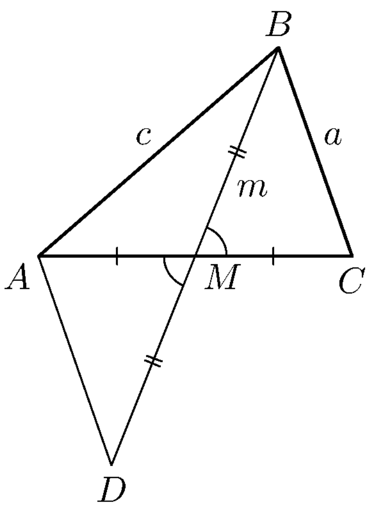

Рис. 7б

Если медиана проведена к третьей стороне, то есть $BM = m$, то для получения вспомогательного треугольника необходимо сделать дополнительное построение: на луче BM отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 7б). Тогда треугольники CBM и ADM равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AD = BC = a$. Тем самым решение сведётся к построению вспомогательного треугольника ABD по трём сторонам ($AB = c$, $AD = a$, $BD = 2m$). Разделив отрезок BD пополам, получим точку M, после чего построение искомого треугольника становится очевидным.

г) Пусть в искомом треугольнике ABC: $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB + BC = s$. Тогда, отметив на луче AB точку D так, что $DB = BC$, получим вспомогательный треугольник ACD, который можно построить по двум сторонам и углу между ними (см. рис. 8; $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AD = s$). Вершину B искомого треугольника можно получить на отрезке AD, проведя, например, серединный перпендикуляр к отрезку CD, либо отложив от луча CD в нужную полуплоскость угол BCD, равный углу ADC.

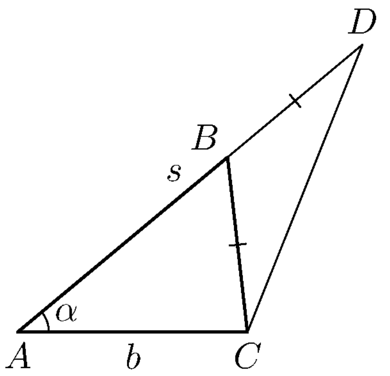

Рис. 8

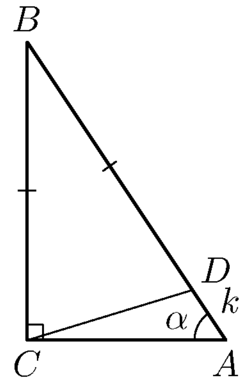

Рис. 9

Задача 4. Пусть в искомом треугольнике ABC: $\angle BCA = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $AB - BC = k$. Тогда, отметив на отрезке AB точку D так, что $BD = BC$, получим, что $AD = k$ (см. рис. 9). Кроме того, $\angle ABC = 90° - \alpha$, поэтому, $\angle BDC = \angle BCD = 45° + \frac{1}{2}\alpha$, тогда $\angle ADC = 135° - \frac{1}{2}\alpha$.

Следовательно, можно построить вспомогательный треугольник ACD по стороне и двум прилежащим углам ($AD = k$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ADC = 135° - \frac{1}{2}\alpha$). Различные способы его достраивания до искомого треугольника — очевидны.

Отметим, что если вместо угла BAC задан угол ABC, то задача легко сводится к предыдущей.

К теме данного занятия также относятся задачи 1*а* – *в*, *е*, *к*, 2*а* – *в*, 3*а*, *б*, 4, 5, 19*д* из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Раздаточный материал

Занятие 1

Задача 1. Объясните, как построить углы, имеющие величину: а) 45°; б) 60°; в) 30°.

Задача 2. Объясните, как построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе, проведённой к боковой стороне.

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:

а) стороне и проведённым к ней медиане и высоте;

б) двум углам и высоте (*рассмотрите два случая*);

в) двум сторонам и медиане (*рассмотрите два случая*);

г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

Задача 4. Объясните, как построить прямоугольный треугольник, если даны его острый угол и разность гипотенузы и катета.

Занятие 2

Задача 1. Объясните, как построить следующие ГМТ:

а) удалённых от данной прямой на заданное расстояние;

б) из которых данный отрезок виден под заданным углом (*рассмотрите три случая: заданный угол — прямой, острый и тупой*).

Задача 2. Объясните, как построить касательную к окружности, проходящую через заданную точку (*рассмотрите два случая*).

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по стороне, проведённой к ней медиане и радиусу описанной окружности.

Задача 4. Объясните, как построить окружность, которая касается данной прямой m в данной точке B и проходит через данную точку A, не лежащую на прямой m.

Задача 5. Даны три точки A, B и C. Объясните, как построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

Задача 6. Даны окружность и прямая m, её не пересекающая. Объясните, как построить окружность, которая касается данной окружности и данной прямой в заданной точке Q, принадлежащей этой прямой.

Задача 7. Объясните, как построить прямую, проходящую через заданную точку M так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.

Список литературы

1. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. *Геометрия для 8–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1991.

2. И. И. Александров. *Сборник геометрических задач на построение.* — М.: УРСС, 2004.

3. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. *Геометрия. Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений.* — М.: Просвещение, 1995.

4. Ю. Билецкий, Г. Филипповский. *Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда.* — К.: Факт, 2000.

5. В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, С. А. Шестаков, И. И. Юдина. *Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

6. Р. К. Гордин. *Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7–9 классов.* — М.: МЦНМО, 2004.

7. А. Кириллов. *О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма.* — Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №6, 1994.

8. Г. С. Коксетер, С. Л. Грейтцер. *Новые встречи с геометрией.* — М.: Наука, 1978.

9. Р. Курант, Г. Роббинс. *Что такое математика?* — М.: МЦНМО, 2001.

10. И. А. Кушнир. *Возвращение утраченной геометрии.* — К.: Факт, 2000.

11. *Математика в задачах.* Сборник материалов выездных школ г. Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду

/ Под. ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. — М.: МЦНМО, 2009.

12. Ю. Михеев. *Одной линейкой.* — Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №10, 1980.

13. А. В. Погорелов. *Геометрия* 7–11. *Учебник для* 7–11 *классов.* — М.: Просвещение, 1995.

14. Я. П. Понарин. *Элементарная геометрия.* Т. 1. — М.: МЦНМО, 2004.

15. В. В. Прасолов. *Геометрические задачи древнего мира.* — М.: «Фазис», 1997.

16. В. В. Прасолов. *Задачи по планиметрии*: *в* 2 *ч.* — М.: Наука, 1995.

17. В. Ю. Протасов. *Максимумы и минимумы в геометрии.* — М.: МЦНМО, 2005.

18. Г. Б. Филипповский. *Авторская школьная геометрия. Часть* 1. — К.: Библиотека Русановского лицея (*ротапринт*).

19. И. Ф. Шарыгин. *Геометрия.* 7–9 *кл.*: *Учебник для общеобразовательных учебных заведений.* — М.: Дрофа, 2000.

20. И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. *Сборник задач по геометрии.* 5000 *задач с ответами.* — М.: «Астрель», 2001.

21. Г. Штейнгауз. *Математический калейдоскоп.* — Библиотечка «Кванта», вып. 8, 1981.

22. *Энциклопедический словарь юного математика.* /Сост. А. П. Савин/ — М.: «Педагогика», 1985.

Список веб-ресурсов

1. `http://problems.ru/` — база задач по математике.

2. `http://geometry.ru/olimp.htm` — всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина.

3. `http://olympiads.mccme.ru/ustn/` — устные геометрические олимпиады.

Оглавление