Логика для всех: от пиратов до мудрецов

И. В. Раскина

Школьные
Математические
Кружки

Предисловие

Когда я беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше, - сказал Шалтай презрительно.
Льюис Кэррол, «Алиса в зазеркалье»

Второй выпуск книжки «Логические задачи» состоит из десяти занятий, различных по цели, форме и уровню сложности.

Первые пять, а также восьмое занятие представляют собой элементарное введение в формальную логику. Тематика стандартна: высказывания (в том числе общие и частные) и их отрицания, закон исключенного третьего, союзы «и» и «или», следствие и равносильность. Уровень сложности и стиль изложения первых пяти и большей части восьмого занятий рассчитан в первую очередь на учеников 5-7 классов. Почти во все занятия (кроме второго) включены задачи, связанные с другими разделами математики. Особое внимание уделяется умению отличать решенную задачу от нерешенной, в частности, применимости примера и контрпримера. Активно используются графические иллюстрации. Отдельные задачи, требующие от пятиклассников дополнительных знаний (например, признаков делимости), могут быть ими пропущены или заменены аналогичными из задачника.

Надеемся, что материалы первой части книжки кому-то из учителей пригодятся при подготовке уроков для всего класса, а не только занятий кружка.

Вторая половина книжки построена на решении постепенно усложняющихся задач и адресована кружковцам второго и более года обучения.

Шестое занятие развивает навык рассуждать в соответствии с законами логики, сформулированными на предыдущих занятиях. Его можно проводить после них, а для подготовленных учащихся – и вместо них.

Седьмое занятие посвящено доказательству от противного. Многие школьники впервые встречаются с методом «от противного» на уроках геометрии. Результат известен: метод усваивается на уровне магического заклинания, применяемого для умиротворения учителя этого бессмысленного и беспощадного предмета. Хотелось бы надеяться, что встреча с методом от противного в предложенном мини-курсе логики окажется более естественной и плодотворной. Рекомендуем провести такое занятие в конце шестого класса или в начале седьмого, незадолго до первого применения метода в геометрии. Или хотя бы вскоре после него. Следующий подходящий момент связан с доказательством иррациональности квадратного корня из 2 в восьмом классе. Предложенные задачи не слишком просты и для большинства восьмиклассников.

Последние три главы посвящены метаголоволомкам (т.е. головоломкам о головоломках). В девятой главе представлены разнообразные метаголоволомки. В десятой и одиннадцатой – сценарии игровых занятий на основе задач о мудрецах. Когда мудрецы и колпаки настоящие, рассуждать не только веселее, но и гораздо проще.

Потребность детей в игре, движении, самовыражении можно также реализовать, предложив им разыграть отдельные сценки из вступлений к третьему, четвертому и пятому занятиям. Вступления к занятиям первой части – особенность этой книжки; они помогут читателю-школьнику самостоятельно разобраться с теорией, а учителю – построить вводную беседу. В остальном форма выпуска продолжает традиции серии «Школьные математические кружки»: каждое занятие предваряется методическими рекомендациями, ко всем задачам приведены ответы и решения, к некоторым – подсказки, обсуждения и комментарии. Завершают книжку дополнительные задачи, не вошедшие в занятия, а также раздаточный материал.

В большинство занятий включены соответствующие теме парадоксы. И классические, занимавшие умы философов всех времен. И придуманные недавно и связанные с трудностями перевода одной и той же мысли на разные языки: русский, английский, графический, формальный.

Возникает вопрос: а зачем вообще учить детей формальному языку даже на уровне таблиц истинности? Разве логические операции не соответствуют привычным словам родного языка? В том-то и дело, что соответствие это отнюдь не однозначное. Мы постарались затронуть на занятиях именно те места, где разница особенно заметна, а бытовая речь нелогична. Приведем пример. Допустим, сын никак не может найти ключи, а мама его ругает: «Если разбрасывать вещи где попало, потом ничего не найдешь!» С формальной точки зрения она делает две ошибки. Во-первых, путает следствие и равносильность, не уточняя, что если класть вещи на место, то найти их потом легко. Во-вторых, ее слова легко опровергнуть, найдя хотя бы одну вещь. Тем не менее, сын прекрасно понимает, что имела в виду мама. Он привыкает к соответствующей речи и с этим опытом приходит в школу.

Неудивительно, что школьники часто не отличают свойство от признака (и вообще прямую теорему от обратной), подменяют доказательство рассмотрением частного случая и делают другие логические ошибки. Удивительно скорее, когда учителей это удивляет. Мы так давно привыкли к правилам игры и считаем их настолько очевидными, что детям даже и сообщать их в соответствии с программой не требуется: пусть сами догадаются! И наиболее склонные к абстрактному мышлению дети действительно догадываются. А наиболее склонные к честной игре учителя считают своим долгом своевременно познакомить всех участников с ее правилами и терпеливо приучают не нарушать их. В помощь таким учителям и написана эта книга.

Автор благодарит К. А. Кнопа, А. В. Шаповалова и Д. Э. Шноля за предложенные задачи, методические идеи и подробные содержательные обсуждения.

Занятие 3. Вдоль по Африке *или примеры для некоторых и контрпримеры для всех*

Школьники часто начинают решение задачи с поиска подходящего примера. Но тут встают три вопроса. Как такой пример подобрать? В каких случаях приведения одного примера достаточно для полного решения задачи? Что делать в остальных случаях? На этом занятии мы постараемся научиться отвечать на самый простой вопрос, но от этого не менее важный: на второй. Умение отличать решенную задачу от нерешенной – основа математической культуры. Отвечать на первый вопрос помогут другие выпуски нашей серии, а на третий – только годы занятий.

При составлении этого занятия мы вновь постарались учесть интересы разнородного по составу кружка. Вопрос применимости примеров и контрпримеров актуален прежде всего для начинающих, сложность задач для самостоятельного решения на приведение примера разнообразна, а рассуждения про пустое множество и парадоксы про Деда Мороза достаточно сложны. Чисто логические вопросы можно разбавить конструктивами по вкусу.

Во введении обсуждается примененимость примеров (в том числе контрпримеров) к доказательству и опровержению частных и общих высказываний. Истинность таких высказываний предлагается определить и в большинстве задач. Но мы сознательно нарушили чистоту жанра, включив в занятие задачи 3.6 и 3.7 с вопросом «можно или нельзя?», в которых фактически требуется определить, что верно: частное высказывание или его отрицание.

Надеемся, что пяти- и шестиклассникам будет интересно разыграть сценку с Танечкой и Ванечкой в начале занятия. Текст четырем «артистам» стоит выдать заранее, но учить его наизусть незачем, пусть подглядывают в шпаргалки. Таблицу рекомендуем изобразить на доске, можно с сокращениями.

Более опытных кружковцев могут заинтересовать два сюжета. Первый связан с гипотезами Гольдбаха (задача 3.2). Это уникальный случай, когда формулировка совсем недавнего выдающегося математического достижения понятна школьнику. Участники кружка могут совместными усилиями проверить гипотезу Гольдбаха для чисел из первой сотни (если каждому поручить свой отрезок числового ряда), осознать необходимость доказательства, а затем узнать историю проблемы и вместе порадоваться успеху Хельфготта.

Второй тонкий вопрос – это истинность любого общего высказывания об элементах пустого множества (задачи 3.3, 3.4, 3.5 и 3.12). В школьной программе он игнорируется из-за несоответствия формального и житейского подхода к нему. Это приводит к неоднозначному толкованию условия некоторых задач (в частности, с параметром). Несложная задача 3.11 служит для повторения материала предыдущего занятия, а ее сюжет связан с гораздо более сложной следующей задачей-парадоксом. 3.12.

Завершающая занятие задача 3.13 не имеет отношения к его теме, она содержательно развивает наиболее сложную идею первого занятия, а сюжетно развивает тему Деда Мороза и помогает эффектно завершить занятие. Рекомендуем не печатать ее на общем листке, а дать «на сладкое» двум кружковцам, решившим другие задачи быстрее остальных. В задаче 3.12 обсуждается существование Деда Мороза. После этого самое время выпустить «на сцену» двух «артистов», которые неопровержимо докажут существование Деда Мороза!

Но папочка и мамочка уснули вечерком,
А Танечка и Ванечка - в Африку бегом, -
В Африку!
В Африку!
К. И. Чуковский

Однажды Танечка и Ванечка услышали про Африку. И подумали, что в Африке водятся большие звери. Они дождались, когда мама с папой уснули, и убежали в Африку. Там Танечка успела увидеть только мартышку, а Ванечка бегемота. Тут как раз проснулись родители. Они обо всем догадались и забрали детей из Африки домой. На обратном пути дети заспорили.

- Правда, африканские звери большие? Я же сам видел! - спросил у папы Ваня.

- Нет, африканские звери маленькие, - не соглашалась Таня, - Я тоже сама видела. Вот скажи, папа, кто из нас прав?

- А это смотря как понимать вопрос, - начал папа. - Можно так: «**Верно ли, что НЕКОТОРЫЕ африканские звери большие?**»

- Да, верно! – торжествующе посмотрел на сестру Ваня.- Например, бегемот, которого я видел.

- Молодец, - похвалил папа. – Для ответа «Да» на вопрос про некоторых достаточно привести один пример.

- А если бы я не увидел бегемота? – забеспокоился Ваня. -Тогда из-за Танькиной мартышки ответ был бы «Нет, неправда»?

- Ну что ты! – успокоил его папа –размеры животных не зависят от того, видишь ли ты их. Даже если встретишь тысячу маленьких мартышек, отвечать «Нет» еще рано. Понимаешь, почему?

- Понимаю, - сказал Ваня. – Бегемот или другой пример мог просто хорошо спрятаться!

- Поэтому ответ «Нет» на вопрос про некоторых объяснить бывает непросто, - вздохнула мама. – Для этого требуется настоящее доказательство.

А папа продолжил:

- Но ваш вопрос можно понять и совсем по-другому: **Верно ли, что ВСЕ африканские звери большие?**

- Откуда мы знаем? Мы же не успели увидеть всех зверей, –начал было Ваня, но Танечка его перебила:

- А вот и знаем! Не все. Ведь я же видела маленькую мартышку!

- Хорошо, что ты ее увидела, - похвалил папа. – Твоя мартышка – прекрасный…

- Пример! – перебила Танечка.

- Почти, - согласился папа. – Только пример, который помогает опровергнуть предположение, называется КОНТРПРИМЕР. И для ответа «Нет» на вопрос про всех достаточно привести один контрпример.

- А если ответ был бы «Да»? – хором спросили дети, – Как называется нужный пример?

- Никак не называется, - ответил папа. – Потому что его нет. Никакими примерами не убедишь, что где-нибудь ВСЕ звери большие.

- Поэтому ответ «Да» на вопрос про всех объяснить бывает непросто, - вздохнула мама. – Для этого требуется настоящее доказательство.

- А если ты уже тысячу зверей встретил, и все они большие? – с надеждой спросил Ванечка.

- Ну и что? – победно вскричала Танечка. – Хоть миллион! Моя маленькая мартышка тем более могла спрятаться! Еще получше твоего бегемота!

Пока Танечка и Ванечка выясняют, кто лучше прячется, опишем с помощью таблицы два типа утверждений

О чем речь?	О некоторых	Обо всех
Пример утверждения	НЕКОТОРЫЕ африканские звери большие	ВСЕ африканские звери большие
Как доказать	Привести пример (найти бегемота)	???
Как опровергнуть	???	Привести контрпример (найти мартышку)

Там, где стоят знаки вопроса, общего рецепта нет, для каждой задачи приходится искать свое доказательство.

Задача 3.1.Определите, какие из утверждений верны. Где можно, подтвердите свой ответ примером (контрпримером). В остальных случаях обоснуйте его по-другому.

1. Все нечетные числа простые.
2. Все простые числа нечетные.
3. Некоторые нечетные числа простые.
4. Некоторые простые числа нечетные.

5. Все четные числа составные.
6. Все числа вида p+7, где p – простое, являются составными.

<u>Ответ</u>. Верны утверждения 3, 4, 6.

<u>Решение</u>. Привести контрпримеры к утверждениям 1, 2, 5 и примеры к утверждениям 3, 4 предоставляем читателю. Для доказательства утверждения 6 рассмотрим два случая. Если p=2, то число p+7=9 – составное. Если простое число p≠2, то оно нечетное, поэтому p+7 – четное и больше 2, следовательно, составное.

Задача 3.2. Верно ли высказывание: «Любое нечетное число, большее 5, можно представить в виде суммы трех простых чисел»?

<u>Обсуждение</u>. На первый взгляд это утверждение мало отличается от сформулированных в предыдущем задании. Попробуем рассуждать так же. Для начала поищем контрпример (как в пунктах 1,2 и 5 предыдущей задачи):7=2+2+3, 9=3+3+3, 11=3+3+5 и т.д. Не получается? Что ж, попытаемся доказать, что утверждение верно (как в пункте 6). Тоже не получается? Не огорчайтесь, Вы не одиноки! Еще в 1742 году Кристиан Гольдбах предложил эту задачу Леонарду Эйлеру. Позже она получила название тернарной проблемы Гольдбаха. Ей занимались многие математики, но лишь в 2013 году американский математик Харальд Хельфготт окончательно доказал, что гипотеза Гольдбаха верна. А бинарная проблема Гольбаха, упоминавшаяся на первом занятии, не решена до сих пор.

Задача 3.3. (*) Верно ли утверждение: «Все дожившие до наших дней тиранозавры умеют вышивать крестиком»?

<u>Обсуждение</u>. Утверждение звучит странно и на первый взгляд кажется неверным. Что ж, попробуем его опровергнуть. Для этого нужно привести контрпример. То есть дожившего до наших дней тиранозавра, не умеющего вышивать крестиком. Поскольку его не существует, то утверждение верно.

<u>Ответ</u>. Да, верно.

*<u>Комментарий 1.</u> Сравним две последние задачи. Поиск контрпримера в обеих оказался затруднительным. Но эти затруднения разного характера. Контрпример к проблеме Гольдбаха мы найти не могли, но не были уверены, что его не сможет найти и кто-то более умный или терпеливый. Поэтому вывода сделать не могли (а Харальд Хельфготт смог!). А вот живого тиранозавра не только мы с вами не можем найти, но и уверены, что никто другой не найдет. <u>Комментарий 2.</u> Аналогично можно верно высказываться не только о живых тиранозаврах, но вообще обо всем, чего на самом деле нет. Например, все кролики, проглотившие удава, остались голодными (Не верите? Тогда найдите кролика, проглотившего удава, и поинтересуйтесь, сыт ли он). А все четные числа, оканчивающиеся на 5, оканчиваются на 7. С точки зрения формальной логики **любое высказывание обо всех элементах пустого множества верно**, потому что к нему не может быть приведен контрпример.*

Есть и другая причина считать верными высказывания о современных тиранозаврах и прочих несуществующих объектах. Начнем с несомненно истинного высказывания «Все числа, кратные 12, четны». Дополнив условие, мы получим следствие из него, которое тоже должно быть истинным. Например, «Все трехзначные числа, кратные 12, четны». Или «Всякое число с суммой цифр 30, кратное 12, четно». Или «Всякое число с суммой цифр 100, кратное 12, четно». А теперь заметим, что числа с суммой цифр 100, кратные 12, такие же несуществующие объекты, как и современные тиранозавры.

Задача 3.4. (*) Рассмотрим два высказывания:

A: Некоторым Мишиным одноклассникам 12 лет.

B: Всем Мишиным одноклассникам 12 лет.

Можно ли Вы, ничего не зная про Мишу, утверждать, что: 1) если верно A, то верно и B; 2)если верно B, то верно и A?

Обсуждение. Если бы речь шла об одном конкретном Мише, вопрос был бы неинтересен. Например, Миша учится в шестом классе, у него двадцать одноклассников, и всем им по 12 лет; тогда оба высказывания, A и B, истинны. Однако, поставленные вопросы требуют понять, может ли для какого-нибудь Миши первое высказывание оказаться верным, а второе нет (т.е. возможен ли контрпример).

Решение. 1) Нельзя. Контрпример очевиден: пусть у Миши 5 (или любое другое натуральное число) одноклассников, которым двенадцать лет, и 20 (или любое другое натуральное число) тринадцатилетних одноклассников. Тогда A истинно, а B ложно.

2) Как ни странно, тоже нельзя! Для построения контрпримера предположим, что Мише три года, и никаких одноклассников у него вообще нет. Верно ли утверждение B? Верно! Кто не согласен, пусть предъявит контрпример – Мишиного одноклассника другого возраста. А утверждение A, означающее , что существует хотя бы один Мишин двенадцатилетний одноклассник, неверно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.5. Землянин Вася сказал: «Все марсиане лжецы». Прав ли Вася?
Задача 3.6. Есть 30 гирек, которые весят 1г, 2г, 3г, …, 30г. Можно ли разложить их: 1) на две кучки одинакового веса; 2) на три кучки одинакового веса?
Задача 3.7. 1) Можно ли заполнить таблицу 3 × 3 натуральными числами так, чтобы сумма чисел в каждой строке была четным числом, а в каждом столбце – нечетным? 2) А таблицу 4 × 4?

Задача 3.8. Верно ли, что периметр любого четырехугольника, целиком находящегося внутри данного квадрата, меньше периметра этого квадрата?

Задача 3.9. Верно ли, что все числа вида 2^n+15, где n – натуральное число, простые?

Задача 3.10. Рассмотрим натуральные числа, в записи которых нет нулей.
1) Найдется ли среди них десятизначное число, делящееся на сумму своих цифр?
2) А стозначное?

Задача 3.11. 1) Какие из следующих высказываний означают одно и то же?
2) Будем считать высказывание A истинным. Какие из других высказываний в таком случае наверняка истинны?

A: Дед Мороз – волшебник.
B: Существует хотя бы один дед-волшебник.
C: Существует ровно один дед-волшебник.
D: Некоторые деды – волшебники.
E: Некоторые волшебники – деды.

Задача 3.12. (*) Найдите ошибку в рассуждениях. Рассмотрим три высказывания:
A: Существует хотя бы один дед-волшебник.
B: Дед Мороз – волшебник.
C: Все деды – волшебники.

Можно ли утверждать, что если верно C, то верно и A? Нет, контрпримером является ситуация, когда множество дедов пусто (аналогично задаче про Мишиных одноклассников).

С другой стороны, если верно C, то верно и B (иначе Дед Мороз служил бы контрпримером к высказыванию C). Но если верно B, то верно и A (для доказательства существования достаточно привести пример, в данном случае Дед Мороз – пример). Итак, если верно C, то верно и A.

Задача 3.13. (*) Прокомментируйте доказательство существования Деда Мороза, изложенное в виде диалога двух логиков.

Первый. Если я не ошибаюсь, Дед Мороз существует.

Второй. Разумеется, Дед Мороз существует, если Вы не ошибаетесь.

Первый. Следовательно, мое утверждение истинно.

Второй. Разумеется!

Первый. Итак, я не ошибся, а Вы согласились с тем, что если я не ошибаюсь, то Дед Мороз существует. Следовательно, Дед Мороз существует.

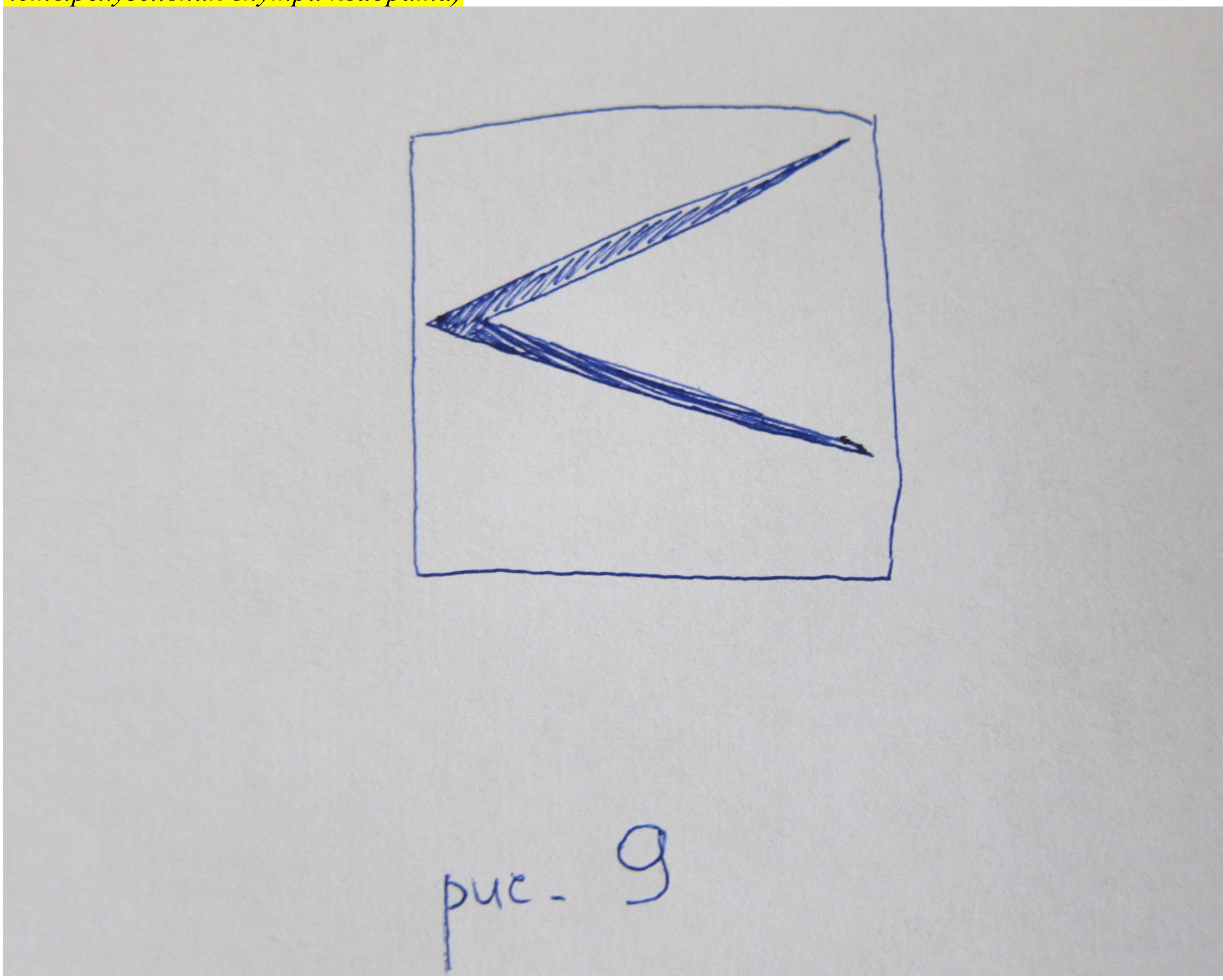
Решения, ответы и комментарии

3.5. *Прав, если считать, что марсиан не существует, и поэтому любое высказанное о них утверждение истинно.*

3.6. *1) Нельзя, так как сумма масс $1+2+\ldots+30=31\cdot15$ – нечетное число. 2) Можно. Пример можно построить, например, так. Сначала сформируем пятнадцать пар гирек вес 31: 1+30, 2+29 и т.д. Затем возьмем в каждую из трех куч по пять любых пар.*

3.7. *1) Предположим, что таблицу заполнить удалось. Если найти сумму чисел во всех строках, то она окажется четным числом, а если во всех столбцах – то нечетным. Но это одно и то же число. Ответ. Нельзя. 2) Для приведения примера достаточно заполнить первую строку двойками, а остальные – единицами. Заметим, что если заполнить квадрат 3×3 как попало, а остальные числа ставить в соответствии с условием, пример не может не получиться! Ответ. Можно.*

3.8. *Нет. Контрпример изображен на рис. 9 (подходящий невыпуклый четырехугольник внутри квадрата)*



3.9. *Нет. Контрпример: $2^7+15=128+15=143=11*13$.*

Комментарий. В настоящее время неизвестно ни одной формулы для вычисления простых чисел.

3.10. *Приведем несколько из многих возможных примеров:*

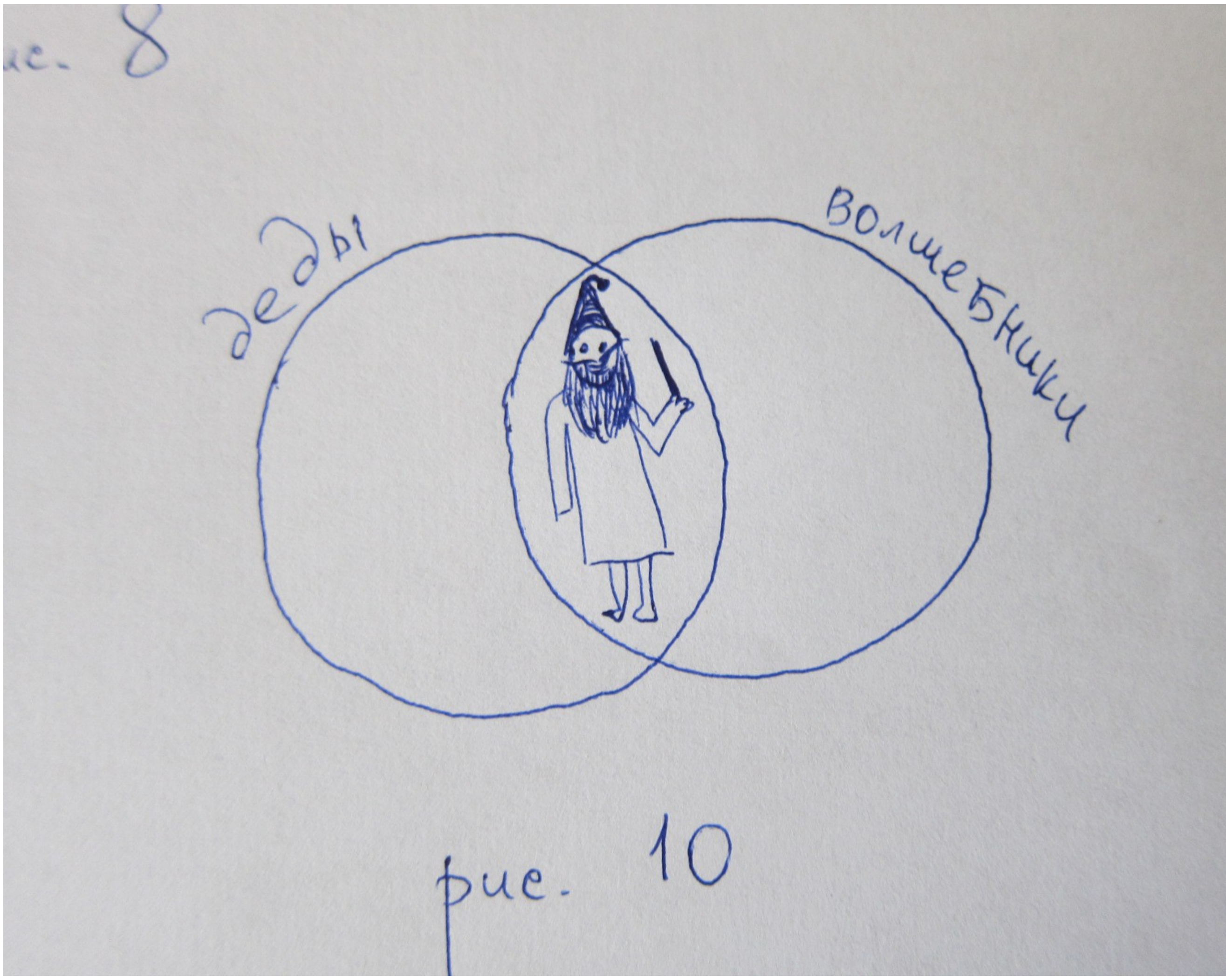
1) 1111111212 делится на 12, 1111111125 делится на 15, 1111111432 делится на 16.

2) 111…1151121792 делится на на 128 (все пропущенные цифры - единицы), 222… 22399925 делится на 225 (все пропущенные цифры - двойки).

<u>Ответ</u>. Да.

<u>Комментарий</u>. Для проверки примеров достаточно выполнить деление в столбик. А придумать их можно с помощью признаков делимости: для делимости на 12 надо обеспечить делимость на 3 и 4, для делимости на 15 – на 3 и 5, на 225 – на 9 и 25. Но при сумме цифр 12 или 15 число заведомо кратно 3, а при сумме цифр 225 – кратно 9. Поэтому достаточно с помощью последних цифр обеспечить делимость соответственно на 4, 5 и 25, а затем лишь подобрать нужную сумму цифр. Кроме того, признаки делимости на 2 и 4 можно обобщить: число делится на n-ю степень двойки тогда и только тогда, когда на нее делится число, составленное из n последних цифр исходного. В частности, делимость на 16 проверяется по четырем последним цифрам, а на 128 – по семи. Остальные цифры многозначного числа выбираем любые, лишь бы сумма их была соответственно 16 или 128. Предлагаем читателю самостоятельно составить стозначное число с сумой цифр 144, делящееся на 144.

3.11. *1) Высказывания B, D и E равносильны. Они означают одно и то же: множества дедов и множество волшебников имеют хотя бы один общий элемент (см. рис. 10). На рисунке 10 два круга, вокруг одного подпись «деды», вокруг второго – «волшебники», в пересечении нарисован старик с бородой в колпаке и с волшебной палочкой.)*



2) Если A истинно, то истинны и высказывания B, D и E (для них Дед Мороз является подтверждающим примером). А вот C может быть как истинным, так и ложным.

3.12. *<u>Подсказка</u>. Верите ли Вы в Деда Мороза?*

<u>Решение</u>. Парадокс связан с различным пониманием высказывания «Дед Мороз - волшебник».

Первый вариант: существование Деда Мороза считается заранее известным, а в B утверждается лишь, что он является волшебником. Тогда если верно C, то верно и B, а если верно B, то верно и A. В таком случае действительно если верно C, то верно и A, никакого контрпримера и противоречия здесь нет: раз мы договорились верить в существование Деда Мороза, то множество дедов не может быть пустым.

Второй вариант: заранее ничего не известно; в B утверждается, что существует Дед Мороз, являющийся волшебником. Тогда если B верно, то и A верно. Но утверждать, что если верно C, то верно и B, нельзя (контрпримером является ситуация, когда множество дедов пусто), поэтому вывод «если верно C, то верно и A» делать тоже нельзя.

3.13. *<u>Обсуждение</u>. Что останется, если убрать театрализацию? Утверждение «Если это утверждение истинно, то Дед Мороз существует». Истинно ли оно? Если да, то Дед Мороз существует. Но именно это в нем и сказано, то есть оно истинно. А раз оно истинно, то Дед Мороз существует.*

<u>Ответ.</u> Проблема в том же месте, что и в задачах 1.4 и 1.10 первого занятия: классическая логика избегает утверждений, связанных с истинностью их самих: их нельзя считать ни истинными, ни ложными.

Занятие 7. Доказательство от противного

С методом от противного каждый школьник неизбежно сталкивается (неожиданно, и поэтому, порой, жестко) на уроках геометрии. Надеемся, что ученик, разобравшийся с материалом предыдущих занятий, воспримет метод от противного как естественное продолжение знакомства с логикой и будет избавлен от неуместных формальных трудностей при изучении геометрии.

Задача 7.1 служит вводным упражнением, показывающим логическую основу метода от противного. С формальной точки зрения он состоит в замене доказательства того, что из А следует Б, на доказательство того, что из неБ следует неА. Как показывает задача 7.2, иногда такой простой трюк существенно облегчает задачу.

Однако настоящая мощь метода от противного проявляется при более широком его понимании. Пусть дано А, а доказать требуется Б. Предположив противное, мы получим уже *два условия*: А и неБ, а с двумя условиями работать легче, чем с одним. Из них требуется получить два *любых* противоречащих друг другу высказывания: В и неВ. Задачи 7.2, 7.3 и 7.4 демонстрируют, что В может как совпадать с одним из условий А или Б, так и быть новым утверждением.

Иногда метод от противного удается применить при решении задач, в формулировке которых условия А и Б явно не выделены (см. задачу 7.6 и комментарий к ней). Достаточно усвоить идею «Предположим противное и поищем противоречие».

Задача на доказательство не всегда начинается со слова «докажите». Иногда решающий должен сам выбрать верный ответ на вопрос типа «Можно ли…», «Существует ли …» и т.п., а потом доказать правильность ответа. Если ответ отрицательный, часто бывает удобно предположить, что он положительный, а затем прийти к противоречию. Такое рассуждение от противного применяется в задачах 7.6 и 7.11, а также Д32 и Д35.

Немного рекламы.

1) Доказательство от противного порадует любителей перебора: мы просто рассматриваем все случаи (часто их всего два, но может быть и больше), исключаем приводящие к противоречию и делаем вывод, какой из случаев выполняется.

2) Противное значит хорошее. От противного удобно доказывать "отрицательные" качества: неделимость, иррациональность, бесконечность. Ведь, предположив противное, мы тогда сразу получим что-то хорошее, с дополнительными свойствами (делимость на простое число, числитель и знаменатель рациональной дроби, размер конечного множества).

3). Метод от противного не помешает даже там, где он не нужен. Пусть дано А, и из этого без всякого «противного» можно доказать Б. Но мы этого не заметили и зачем-то предположили неБ. И только после этого из А (без использования неБ) получили Б. Вот и хорошо! Б и неБ противоречат друг другу, метод от противного сработал.

А теперь антиреклама.

1) Если метод от противного сработал описанным только что образом, самое время упростить доказательство и выбросить из него «противную» оболочку.

2) Недостаток логической культуры может привести к некорректному «доказательству» от противного. Одна из целей этого занятия, да и всей книжки – научить, как таких ошибок избегать. В частности, задача 7.5 еще раз напоминает о неравносильности обратных друг другу высказываний.

3) Одно дело – понять, что надо искать противоречие, и совсем другое – уметь его находить. Поиск противоречия часто связан с владением специфической техникой (подсчет двумя способами, инварианты, раскраски, свойства делимости, принцип Дирихле, неравенства и оценки и т.д.) Мы постарались включить в занятие задачи, которые можно решить (а отмеченную звездочкой хотя бы понять) без специальной подготовки.

Этого не может быть никогда, потому что если бы люди жили на луне, то заслоняли бы для нас магический и волшебный свет ее своими домами и тучными пастбищами.

А. П. Чехов, «Письмо к ученому соседу»

Задача 7.1. 1) Если рыцарь встречает дракона, то рыцарь вступает в бой. Составьте к этому высказыванию обратное, противоположное и противоположное обратному.

2) Известно, что рыцарь вступил в бой. Означает ли это, что он встретил дракона?

3) Рыцарь не вступил в бой. Означает ли это, что он не встретил дракона?

Ответ. 1) Обратное: Если рыцарь вступает в бой, то рыцарь встречает дракона. Противоположное: Если рыцарь не встречает дракона, то рыцарь не вступает в

бой. Противоположное обратному: Если рыцарь не вступает в бой, то рыцарь не встречает дракона.
2) Не означает. Рыцарь мог вступить в бой не только с драконом. Например, с ветряными мельницами. Как мы не раз убеждались, истинность прямого и обратного высказывания никак не связаны.
3) Означает. Ведь если бы он встретил дракона, то вступил бы в бой, что противоречит условию. То ***есть истинному прямому высказыванию соответствует истинное высказывание, противоположное обратному****. А это значит, что их можно заменять друг на друга.*

Задача 7.2. Многозначное число не содержит повторяющихся цифр. Докажите, что оно не может быть произведением двух меньших чисел, состоящих только из единиц и нулей.

<u>Обсуждение</u>. Как подступиться к этой задаче? Чисел без повторяющихся цифр много, и общие выводы делать о них затруднительно. Попробуем вместо прямой задачи решить противоположную обратной: докажем, что число, являющееся произведением двух чисел, состоящих только из единиц и нулей, содержит повторяющиеся цифры.

<u>Решение</u>. Предположим, что число является произведением двух чисел, состоящих только из единиц и нулей. Что может быть его последней цифрой? Только 1 или 0. А последней ненулевой цифрой? Только 1 (потому что произведение последних ненулевых цифр сомножителей – это произведение двух единиц). А что может быть первой цифрой? Тоже только 1. Но по условию число не может содержать двух единиц. Значит, первая единица и является последней ненулевой цифрой. Но в таком случае в каждом из сомножителей только одна единица в записи. Но так как оба числа больше 1 (иначе другое равно произведению), то оба заканчиваются на 0, и в произведении найдутся два нуля.

<u>Комментарий</u>. Задача решена методом от противного: мы предположили, что доказываемое утверждение неверно и пришли к противоречию. Одно из противоречащих друг другу утверждений – условие (число не содержит повторяющихся цифр), а другое – его отрицание.

Задача 7.3. Двое играют в «крестики-нолики» на бесконечной доске. «Крестик» ходит первым. Выигрывает тот, кто смог поставить пять своих значков подряд по вертикали, горизонтали или диагонали. Докажите, что «крестик» может как минимум не проиграть.

<u>Обсуждение.</u> Поясним, что значит «может». Вдруг «крестик» - первоклассник, а «нолик» - выпускник, игравший в «крестики-нолики» на всех уроках в течение одиннадцати лет? Однако в подобных задачах рассматривается игра не реальных людей, а идеальных игроков, способных просчитывать игру на какое угодно число ходов вперед. Исход партии между такими игроками предрешен правилами игры и не зависит от их настроения и самочувствия. Либо у идеального «крестика» есть беспроигрышная стратегия (т.е. возможность ходить так, чтобы не проиграть при любых действиях»нолика»), и тогда он ей непременно воспользуется и сможет не проиграть. Либо нет, т.е. у «нолика» есть возможность выигрывать всегда, независимо от ходов первого (то есть выигрышная стратегия).

<u>Решение</u>. Предположим противное. Пусть у первого игрока - «крестика» - нет беспроигрышной стратегии. Это означает, что у второго есть выигрышная стратегия. В таком случае «крестик» может сделать первый ход куда угодно, а затем руководствоваться выигрышной стратегией второго игрока. Если эта стратегия говорит ему поставить «крестик» туда, где он уже стоит, надо просто поставить его куда угодно, от этого хуже не будет. Таким образом, если выигрышная стратегия есть у нолика, то она есть и у крестика. Но у них не может быть одновременно выигрышных стратегий. Полученное противоречие

показывает, что предположение неверно, и «крестик» при безошибочной игре не проиграет.

Комментарий. В этой задаче одно из противоречащих друг другу утверждений – то, что требуется доказать («крестик» может как минимум не проиграть), а второе – его отрицание («нолик» может выиграть).

Задача 7.4. В вершинах куба расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Докажите, что есть ребро, числа на концах которого отличаются не менее, чем на 3.

*Решение. **Предположим противное**: числа на концах любого ребра отличаются не более, чем на 2. От одной вершины до любой другой вершины можно добраться по одному, двум или трем ребрам. Поэтому числа в вершинах куба отличаются друг от друга не более, чем на 6. Однако среди них есть 1 и 8, отличающиеся на 7. **Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно**, числа на концах хоть какого-нибудь ребра должны отличаться не менее, чем на 3.*

Комментарий. В этой задаче метод от противного применен в широком понимании: противоречащее друг другу утверждения («Числа в любых двух вершинах куба отличаются не более, чем на 6» и «Существуют два числа в вершинах куба, отличающиеся на 7») не сформулированы явно ни в условии задачи, ни в предположении, а получены из них.

Задача 7.5. Острова архипелага связаны мостами так, что с каждого острова можно дойти до любого другого. Не более чем с двух островов ведет нечетное число мостов, а с остальных – четное. Докажем, что можно обойти архипелаг, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

Предположим противное: хотя бы с трех островов ведет нечетное число мостов. Заходя на остров, мы «тратим» два моста: по одному вошли, по другому вышли. Поэтому мосты, выходящие с каждого острова, можно объединить в пары. Нечетное число мостов может быть только на самом первом острове (мы с него вышли первый раз, не заходя перед этим) и на последнем (зашли, но не вышли). Если островов с нечетным числом мостов хотя бы три, приходим к противоречию, и пройти по всем мостам ровно один раз нельзя. А если таких островов не более двух, то можно.

Верно ли доказательство?

Решение. Обозначим данное в задаче условие буквой А: Не более чем с двух островов ведет нечетное число мостов, а с остальных – четное. То, что требуется доказать, обозначим как Б: Можно прогуляться по архипелагу, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Итак, требуется доказать А$\Rightarrow$Б. А что доказано? Что если «нечетных» островов хотя бы три, то обойти архипелаг, пройдя по разу по каждому мосту, нельзя. То есть доказано (вполне, кстати, верно) неА$\Rightarrow$неБ – противоположное утверждение, которое, как уже обсуждалось в задаче 6.1, отнюдь не равносильно нужному. И неверна в доказательстве именно последняя фраза: «А если таких островов не более двух, то можно». Вот Б$\Rightarrow$А действительно равносильно неА$\Rightarrow$неБ.

Комментарий. 1) Итак, слова «предположим противное» и «пришли к противоречию» сами по себе не являются магическим заклинанием. Распространенная ошибка – вместо требуемого утверждения доказать обратное ему. 2) Само утверждение про архипелаг верно, но доказывается сложнее, чем обратное.

Задача 7.6*. Конечно или бесконечно множество простых чисел?

Обсуждение. Не правда ли, вопрос естественный? Недаром его еще древние греки поставили. И кажется очень сложным? Во всяком случае, конечно ли множество пар простых чисел-близнецов (т.е. отличающихся друг от друга на 2), неизвестно до сих *пор. Как не найдено и никакой формулы, позволяющей бесконечно вычислять одно простое число за другим. А некоторые простые по формулировке вопросы теории чисел решены весьма сложными современными методами (например, великая теорема Ферма или тернарная проблема Гольдбаха). Но вот вопрос о бесконечности множества простых чисел древние греки смогли не только поставить, но и решить. Приведем удивительное по красоте и простоте доказательство от противного, восходящее к «Началам» Евклида.*

Решение. Пусть множество простых чисел конечно. Тогда можно выписать все простые числа: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. *Произведение всех этих чисел делится на каждое из них. А если его немножко «испортить», прибавив 1, то полученное число :* $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n.+1$ *не будет делиться ни на одно из простых чисел* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. *Можно ли это число разложить на простые множители? Если можно, то среди этих простых множителей нет известных нам чисел* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *(то есть мы выписали не все простые числа!) А если нельзя, то это число само простое, причем большее всех выписанных нами чисел. В любом случае выписать все простые числа не удалось. Значит, их множество бесконечно.*

Комментарий. Является ли приведенное доказательство доказательством от противного? Если да, то требовалось бы доказать, что из А следует Б. А мы вместо этого доказывали бы, что из неБ следует неА. Но где же условие А? В задаче вообще ничего не дано!

Условие А появится, если переформулировать задачу так: «Пусть дано множество всех простых чисел. Доказать, что оно бесконечно.» Предположив, что множество простых чисел конечно, мы убедились, что рассмотрели не все простые числа.

Метод «от противного» оказался эффективен, потому что помог от бесконечного количества, с которым непонятно что делать, перейти к конечному, которое можно перечислить. А затем придумать, как по любому конечному набору простых чисел указать еще одно простое число. Теперь, когда решение придумано, его можно изложить и без характерных для метода от противного слов: возьмем произвольный набор простых чисел, к ним можно добавить еще одно, затем еще одно и т.д. Так можно делать сколько угодно раз, поэтому простых чисел бесконечно много. Еще раз убеждаемся, что сила метода от противного не в магических заклинаниях: он и без них работает!

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 7.7. Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли он что-то лишнее?

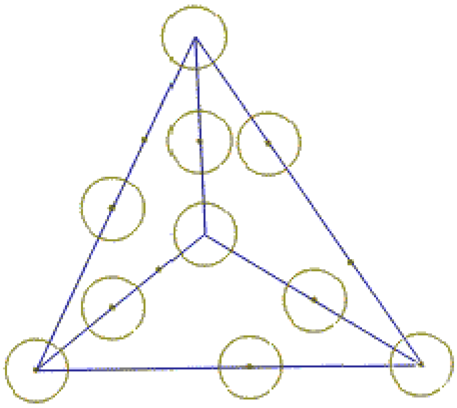
Задача 7.8. Все знают: когда Петя готов к уроку, он всегда поднимает руку. И вдруг…

1) Двоечник Вася точно знает, что сегодня Петя не готов к уроку. «Значит, он не будет поднимать руку», - думает Вася. Верно ли он рассуждает?
2) Марья Ивановна видит, что Петя не поднимает руку. «Ага, значит, он к уроку не готов. Вот сейчас вызову и двойку поставлю!» - думает коварная Марья Ивановна. Верно ли она рассуждает?

Задача 7.9. В клетках шахматной доски как-то расставлены все натуральные числа от 1 до 64. Докажите, что найдутся две соседние по стороне или по вершине клетки, числа в которых отличаются не меньше, чем на 9.

Задача 7.10. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал пять открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Задача 7.11. Можно ли в кружочках расставить все цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел по любому из шести отрезков была бы одной и той же?



Задача 7.12. Двое играют в игру «Щелк!». У них есть прямоугольная шоколадка, разделенная на дольки. Левая нижняя долька отравлена. Ходят по очереди. За ход можно съесть произвольную дольку и все находящиеся справа и сверху от неё. Съевший отравленную дольку проигрывает. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия на любой прямоугольной шоколадке, в которой больше одной дольки (предъявлять стратегию не обязательно).

Задача 7.13. Круг разбит на 25 секторов, пронумерованными в произвольном порядке числами от 1 до 25. В одном из секторов сидит кузнечик. Он прыгает по кругу, каждым своим прыжком перемещаясь по часовой стрелке на количество секторов, равное номеру текущего сектора. Докажите, что в некотором секторе кузнечик не побывает никогда.

Задача 7.14. 1) Несколько мальчиков стали в ряд, при этом разница в росте между двумя соседними не более 10 см. Потом их построили по росту. Докажите, что и теперь разница в росте между двумя соседними не более 10 см.

2) На уроке танцев 15 мальчиков и 15 девочек построили двумя параллельными колоннами, так что образовалось 15 пар. В каждой паре измерили разницу роста мальчика и девочки (разница берётся по абсолютной величине, то есть из большего вычитают меньшее). Максимальная разность оказалась 10 см. В другой раз перед образованием пар каждую колонну предварительно построили по росту. Докажите, что максимальная разность будет не больше 10 см.

Задача 7.15. Найдите ошибку в рассуждении:

Докажем от противного, что ленивых учеников больше, чем прилежных. Предположим, что прилежных не меньше, чем ленивых. Несомненно, ленивых учеников больше, чем надо. Значит, получается, что прилежных учеников тем более больше, чем надо?! С этим мы, учителя, согласиться никак не можем. Получили противоречие, значит, исходное предположение было неверно, и на самом деле ленивых учеников больше, чем прилежных.

Решения и ответы

7.7. *Утверждение «Если собаки рядом нет, то кот не шипит» противоположно обратному к утверждению «Если кот шипит, то рядом собака». Поэтому они равносильны, и достаточно было бы произнести любое из них. Ответ. Сказал.*

7.8. *1) Неверно, про Петино поведение при несделанных уроках никаких данных нет. Он мог, скажем, поднять руку, чтобы задать вопрос. 2) К сожалению, верно. Это можно доказать от противного: если бы Петя был готов к уроку, он бы поднял руку.*

7.9. *Предположим, что разность между числами, стоящими в любых двух соседних по стороне или вершине клетках, не превышает 8. Заметим, что расстояние между любыми двумя клетками не превышает семи королевских ходов. Поэтому разность* *между числами в любых двух клетках по предположению не превышает 7·8=56. Но разность 64-1=63>56. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно, и найдутся два числа в соседних клетках, отличающиеся не менее, чем на 9.*

7.10. *Решение 1. Предположим, что нет двух друзей, которые послали открытки друг другу. Тогда каждый мог получить не более четырех открыток – только от тех, кому сам не посылал. И даже если все открытки дошли, каждый получил меньше открыток, чем послал. Поэтому и общее число отправленных открыток больше числа полученных. Противоречие.*

Решение 2. Предположим, что нет двух друзей, которые послали открытки друг другу. Тогда послано не более 10·9 : 2 = 45 открыток, но по условию их было послано 5·10 = 50. Противоречие.

7.11. *Допустим, что это возможно. Пусть сумма чисел, стоящих в концах отрезков, равна A, сумма чисел, расположенных в серединах отрезков, равна B, а сумма трех чисел вдоль каждого отрезка равна C. Ясно, что A + B = 0 + 1 + 2 + … + 9 = 45. Каждая концевая точка принадлежит ровно трем отрезкам, а все середины различны. Поэтому, сложив сумму всех шести отрезков, получим: 3A + B = 6C. Отсюда 2A + 45 = 6C . Получили противоречие, т.к. слева нечетное число, а справа четное. Ответ. Нельзя.*

7.12. *Вничью игра закончиться не может. Предположим, что выигрышная стратегия есть у второго игрока. Долька, находящаяся в правом верхнем углу, съедена в любом случае после первого хода. Если у второго есть выигрышная стратегия, то у него есть выигрышный ответный ход на ход первого, состоящий в поедании только правой верхней дольки. Но этот выигрышный ход первый может с тем же успехом сделать сам с самого начала, а далее воспользоваться выигрышной стратегией второго.*

7.13. *Обсуждение. Задача кажется неприступной. Прежде чем нащупать «узкое место», хочется поэкспериментировать. Но как тут экспериментировать, когда секторов 25, да еще и порядок произвольный? А если секторов поменьше? Один или два – все получается тривиально. Три – не получается, но это легко доказать перебором. Четыре – снова получается. Пять - не получается. И видны две особенности пятерки: если попадешь в пятерку, оттуда никуда не уйдешь; зато если удается пройти почти все числа, то именно пятерка всегда остается. Интересно, почему?*

Решение. Предположим, что кузнечик побывал во всех секторах. Тогда сектор с номером 25 был последним, так как из него кузнечик не сможет переместиться в иной сектор. До этого кузнечик не мог побывать дважды в одном секторе, иначе бы его путь зациклился, и в 25-й сектор он бы не попал. А, побывав во всех секторах по разу, кузнечик переместился бы на 1 + 2 + … + 24 = 300 секторов, то есть на число, кратное 25. Значит, он начал свое путешествие в 25-м секторе, что невозможно.

7.14. 1) *Предположим, что после построения по росту Вася выше стоящего сразу за ним Никиты более чем на 10 см. Назовем Васю и стоящих перед ним мальчиков высокими, а Никиту и стоящих после него мальчиков низкими. Разница в росте между любым высоким и любым низким мальчикам больше 10см. Но при первоначальном построении, идя вдоль строя от Васи к Никите, мы на каком-то шаге перейдем от высокого к низкому. Эти два мальчика стояли рядом, поэтому разница в росте между ними не превышает 10см. Противоречие.* **2)** *Пусть мальчики и девочки построены в пары в порядке убывания роста. Предположим, что в одной из пар мальчик Ваня выше девочки Маши более, чем на 10 см. Тогда рост каждого мальчика, стоящего до Вани, отличается от роста каждой девочки, стоящей после Маши, еще сильнее. Поэтому при первом построении каждый из этих мальчиков, включая Ваню, мог стоять только с кем-то из девочек, стоящих перед Машей, но таких девочек на одну меньше, чем требуется. Противоречие. Если Маша выше Вани, рассуждения аналогичны.*

7.15. *Слово «надо» употребляется в разных смыслах. Сначала подразумевается «нужное количество ленивых учеников», а потом – «нужное количество прилежных учеников».*

Дополнительные задачи

Трудные задачи решаем немедленно,
невозможные - чуть погодя.

Все и некоторые

Задача Д1. На крыльце дома сидят рядом мальчик и девочка. Саша говорит «Я мальчик». Женя говорит «Я девочка». Хотя бы один из них врет. Кто мальчик, а кто девочка?

Задача Д2. В некоем конгрессе заседают 100 политических деятелей. Каждый из них либо продажен, либо честен. Известно, что:

- по крайней мере один из конгрессменов честен;
- из каждой произвольно выбранной пары конгрессменов по крайней мере один продажен.

  Сколько честных политических деятелей в этом конгрессе?

Задача Д3. Из трех мальчиков, которых зовут Антон, Ваня и Саша, только один всегда говорит правду. Антон сказал: "Ваня не всегда говорит правду", Ваня сказал: "Я не всегда говорю правду", а Саша сказал: "Антон не всегда говорит правду". Кто же из них всегда говорит правду, если известно, что по крайней мере один из них солгал?

Задача Д4. Истинно или ложно высказывание «Нет правил без исключения» ? (данное высказывание тоже является правилом)

Задача Д5. Сформулируйте отрицание к утверждению: «Каждый охотник желает знать, где сидит фазан». Предложите несколько вариантов.

Задача Д6. Встретились несколько жителей острова рыцарей и лжецов, и каждый заявил всем остальным: «Вы все — лжецы». Сколько рыцарей было среди них?

Задача Д7. Какие из четырех утверждений верны, а какие нет? Почему?

1) Все прямоугольники – квадраты.
2) Все квадраты –прямоугольники.
3) Некоторые прямоугольники – квадраты.
4) Некоторые квадраты – прямоугольники.

Задача Д8. 1) Неверно, что все друзья моего друга – мои друзья. Что тогда верно?
2) Неверно, что все ананасы неприятны на вкус. Что тогда верно?
3) Неверно, что некоторые волки – оборотни. Что тогда верно?

Задача Д9. Во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и носороги, нет жирафов. Во всех зоопарках, где есть носороги и нет жирафов, есть гиппопотамы. Наконец, во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и жирафы, есть и носороги. Может ли существовать такой зоопарк, в котором есть гиппопотамы, но нет ни жирафов, ни носорогов?

Союзы и, или

Задача Д10. Аня просит купить яблоки и сливы. Боря – яблоки или абрикосы. Витя – абрикосы или персики. Галя – яблоки и персики. Денег у мамы хватает только на 3 вида фруктов. Как ей выполнить пожелания всех детей?

Задача Д11. Замените высказывания барона Мюнхгаузена на противоположные:
1) Луна сделана из сыра, а Солнце из масла;
2) Я видел медведя, а он меня – нет.
3) Я не боюсь ни львов, ни крокодилов.
4) Лошадь заблудилась или ее засыпало снегом.

5) Я отправился в разведку на коне или на ядре.

Задача Д12. Первого апреля кто-то поменял таблички на дверях в учительскую, столовую и спортзал. Ни одна из трех новых табличек: «столовая», «спортзал», «столовая или спортзал» не соответствует действительности. Куда ведет дверь с табличкой «спортзал»?

Задача Д13. Судья допрашивает трех свидетелей. Жан утверждает, что Жак лжет, Жак обвиняет во лжи Руссо, а Руссо уговаривает не верить ни Жану, ни Жаку. Кто из свидетелей говорит правду?

Задача Д14. Перед нами два жителя острова рыцарей и лжецов, A и B. A говорит: «Я лжец, а B рыцарь». Кто A и кто B?

Задача Д15. Как-то встретились три жителя острова рыцарей и лжецов: *Ах*, *Ох* и *Ух*. Один из них сказал: «*Ах* и *Ох* – оба лжецы», другой сказал: «*Ах* и *Ух* – оба лжецы» (но кто именно что сказал – неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трёх аборигенов?

Задача Д16. Житель Острова рыцарей и лжецов A в присутствии другого жителя этого острова B сказал: «По крайней мере один из нас лжец». Кто такой A и кто такой B?

Задача Д17. На острове живут рыцари, лжецы и хитрецы, которые могут как говорить правду, так и лгать. Путешественник встретил двух островитян. На вопрос «вы оба лжецы?» каждый ответил «да». Что можно узнать по этому ответу?

Задача Д18. Среди трех человек, A, B и C, есть рыцарь, лжец и хитрец. Они сказали:
A: Я хитрец.
B: И A, и C иногда говорят правду
C: B хитрец.
Кто из них рыцарь, кто лжец, а кто хитрец?

Задача Д19. Девять школьников, остававшихся в классе на перемене, были вызваны к директору. Один из них разбил окно в кабинете. На вопрос директора, кто это сделал, были получены следующие ответы:

Володя: «Это сделал Саша».
Аня: «Володя лжет!»
Егор: «Маша разбила».
Саша: «Аня говорит неправду!»
Рома: «Разбила либо Маша, либо Нина».
Маша: «Это я разбила!»
Нина: «Маша не разбивала!»
Коля: «Ни Маша, ни Нина этого не делали».
Олег: «Нина не разбивала!»

Кто разбил окно, если известно, что из этих девяти высказываний истинны только три? (ЕГЭ – информатика, ДЕМО-2011)

Задача Д20. Незнайка лжет по понедельникам, вторникам и пятницам, а в остальные дни недели говорит правду. В какие дни недели Незнайка может сказать: «Я лгал позавчера и буду лгать послезавтра»?

Задача Д21. На заседании Государственной Думы на острове рыцарей и лжецов часть депутатов утверждала, что и во фракции рыцарей, и во фракции лжецов четное число депутатов. Остальные же доказывали, что и в той, и в другой фракции нечетное число депутатов. Подводя итоги, спикер заметил, что всего в Думе 213 депутатов. Кто он, рыцарь или лжец?

Следствие

Задача Д22. Если волк встретит зайца, то сразу съест его. Волк, съевший зайца, радуется. По лесу идет радостный волк. Означает ли это, что он встретил зайца?

Задача Д23. Известно, что:

- Если Иван – брат Марьи или Иван – сын Марьи, то Иван и Марья – родственники.
- Иван и Марья – родственники.
- Иван – не сын Марьи.

Можно ли вывести следствие, что «Иван – брат Марьи»?

Задача Д24. Житель острова рыцарей и лжецов сказал, показав на другого жителя: «Если я рыцарь, то он – лжец». Можете ли Вы определить, кто есть кто?

Задача Д25. У одного из трех друзей: Львова, Волкова и Щукина дома живет кошка, у другого – собака, а третий разводит рыбок. Если у Щукина собака, то у Волкова кошка. Если у Щукина кошка, то у Волкова аквариум. Если у Волкова нет собаки, то и у Львова нет собаки. Если у Львова рыбки, то у Щукина – кошка. Кто у кого живет?

Задача Д26. Серый волк позвонил на Бейкер-стрит и заявил, что у него украли очень ценную вставную челюсть, инкрустированную бриллиантами. Подозреваемые – Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф. Известно, что:

- Каждый из троих подозреваемых в день кражи был у волка и никто другой в краже не участвовал;
- Если Ниф-Ниф виновен, то у него был ровно один сообщник;
- Если Нуф-Нуф невиновен, то невиновен также и Наф-Наф;
- Если Наф-Наф невиновен, то невиновен также и Нуф-Нуф;
- Если виновны двое, то Ниф-Ниф – один из них.

Кому Шерлок Холмс предъявит обвинение?

Задача Д27. У Кролика украли бочонок меда. Кролик подозревает в краже ослика Иа-Иа, Винни Пуха, Тигру и Пятачка. Неопровержимыми уликами доказано, что:

1) Кто-то из них обязательно виновен;
2) Никто больше не мог польститься на мед;
3) Пятачок всегда действует только вместе с Винни;
4) Если Иа-Иа виновен, то у него было ровно два соучастника;
5) Если виновен Тигра, то у него был ровно один соучастник.

Чья вина не вызывает сомнения?

Задача Д28. В строку записано 9 чисел. 1) Верно ли, что если сумма любых четырех соседних чисел положительна, то и сумма всех девяти чисел положительна? 2) Верно ли, что если сумма любых четырех из них положительна, то и сумма всех девяти чисел положительна?

Выводы

Задача Д29. Определите, какие из приведенных рассуждений истинны, а какие ложны.

1) Некоторые улитки являются горами. Все горы любят кошек. Значит, все улитки любят кошек.
2) Две поляны никогда не похожи одна на другую. Сосны и ели выглядят совершенно одинаково. Значит, сосны и ели не являются двумя полянами.

Задача Д30. Сделайте вывод (наиболее полный), если это возможно:

1) Ни у одного ископаемого животного не может быть несчастной любви. У устрицы может быть несчастная любовь.
2) Это свыше моего терпения! Со мной никогда не случалось ничего, что было бы свыше моего терпения.
3) Ни один император не стоматолог. Всех стоматологов боятся дети.
4) Дети нелогичны. Тот, кто управляет крокодилами, достоин уважения. Нелогичные персоны не достойны уважения.

5) Мои кастрюли – это единственное, что сделано из олова. Я считаю, что все твои подарки довольно полезны. Мои кастрюли – самые бесполезные вещи в доме.

Задача Д31. В магазине продаются два вида булочек: с изюмом и с джемом. Известно, что

- Булочки с изюмом всегда мягкие.
- Некоторые мягкие булочки привезены сегодня утром.
- Все мягкие булочки вкусные.

Следует ли из этого, что:

1) Все мягкие булочки – это булочки с изюмом;
2) Все булочки с изюмом вкусные;
3) Все булочки с джемом жесткие;
4) Некоторые вкусные булочки привезены сегодня утром;
5) Некоторые булочки с изюмом привезены сегодня утром;
6) Все вкусные булочки мягкие;
7) Все жесткие булочки невкусные;
8) Сегодня утром не привозили булочек с джемом?

Доказательство от противного

Задача Д32. Существует ли наименьшее положительное рациональное число?

Задача Д33. Каждый месяц Папа Карло зарабатывал разное число золотых, и за год – всего 60. Докажите, что в какой-то из месяцев он заработал нецелое число золотых.

Задача Д34. По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что какие-то два четных числа стоят рядом.

Задача Д35. *(*)* Можно ли бумажный круг разрезать на несколько частей по прямым линиям и дугам окружностей и составить из них квадрат той же площади?

Задача Д36. (*) Каждый из голосующих на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии 10 кандидатов. На избирательном участке находится 11 урн. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит хотя бы один бюллетень и при всяком выборе 11 бюллетеней по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

Равносильность

Задача Д37. Каково наибольшее число утверждений из приводимых ниже, которые одновременно могут быть истинными:

1) Джо ловкач;
2) Джо не везет;
3) Джо везет, но он не ловкач;
4) Если Джо ловкач, то ему не везет;
5) Джо является ловкачом тогда и только тогда, если ему везет;
6) Либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно?

Метаголоволомки

Задача Д38. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит "да", "нет" или "не знаю", и по ответу на который Вы сможете понять, какие монеты ему достались.

Задача Д39. Мудрец встретил трех человек. Он знал, что среди них есть рыцарь, хитрец и лжец. Мудрец спросил первого: «Вы кто?» Тот ответил. «По такому ответу я не могу узнать, кто он», - подумал мудрец. Тогда он спросил о том, кем является первый, остальных двух. Они ответили, и все три ответа оказались разными по смыслу. Тогда мудрец подумал и сказал: «Теперь понятно». Кто же был этот первый?

Задача Д40. Судье известно, что один из двух подозреваемых, А и В, – рыцарь, а другой – шпион, который может как лгать, так и говорить правду. Судья спросил у А, шпион ли В. После ответа А он сразу понял, кто шпион. Кто же?

Задача Д41. *(*)*Перед судом предстали трое обвиняемых *A, B* и *C*. Суду было известно, что один из них рыцарь, другой лжец, а третий шпион (способный как говорить правду, так и лгать). Но кто есть кто, суд не знал.

Подсудимого *A* судья спросил:

– Вы шпион?

A ответил односложно (“да” или “нет”). Тогда судья спросил обвиняемого *B:*

– *A* сказал правду?

B также ответил односложно (“да” или “нет”). В этот момент *A* заявил:

– *C* не шпион. Судья ответил:

– Я и раньше знал это, а теперь я знаю, кто шпион.

1) Кто шпион? 2) Что сказал В?

Задача Д42. *(*)*В некотором королевстве живут граждане трёх типов: а) *дурак* считает всех дураками, а себя умным; б) *скромный умный* про всех знает правильно, а себя считает дураком; в) *уверенный умный* про всех знает правильно, а себя считает умным. В думе 200 депутатов. Премьер-министр провёл анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По данным анкет он не смог понять ответ. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он заполнил анкету про всю думу, включая себя, и прочитав её, премьер-министр всё понял. Сколько умных в думе могло быть (включая путешественника)?

Задача Д43. *(*)*Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали Грише и Лёше по 3 карты, а оставшуюся карту

1) спрятали;

2) отдали Коле.

Гриша и Лёша могут по очереди сообщать вслух любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Коля не смог вычислить местонахождение ни одной из тех карт, которых он не видит? (Гриша и Лёша не договаривались о каком-либо особом способе общения; все переговоры происходят *открытым текстом*.)

Задача Д44. *(*)* Петя, Дима, Миша, Саша и Илья играют в мафию. Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают только друг друга, комиссар знает роль каждого, мирные жители не знают роли других игроков. Мафиози всегда лгут. Комиссар и мирные жители говорят правду. Мальчики сделали следующие заявления (в указанном порядке):

Петя: «Я не знаю, кто Дима»;

Дима: «Я знаю, кто комиссар»;

Миша: «Я знаю, кто Петя»;

Саша: «Я знаю, что Миша – комиссар».

Кто Илья?

Задача Д45. *(*)* Трое гусар ехали по улице друг за другом. Каждому в руки упало по цветку от девушек на балконе. Гусары знают, кто был в строю, но каждый видел только,

кто и в каком порядке ехал впереди него, и кто им бросал цветы (а кто бросил ему самому – не знает). Полковник видел только то, что его дочь бросила цветок ровно одному из этих гусар, и гусары тоже это знают. Полковник знает, кто именно ехал, но в каком порядке – не знает. Он может вызывать гусар поодиночке и задавать им вопросы, на которые те честно отвечают «Так точно», «Никак нет» или «Не могу знать». Как полковнику за три вопроса узнать, кому из них бросила цветок его дочь?
Задача Д46. *(*)* Хватит ли полковнику четырех вопросов, чтобы узнать, кому из четырех гусар бросила цветок его дочь? А десяти вопросов, если гусар было десять?

Мудрецы и колпаки

Во всех задачах этого и следующего разделов считается, что мудрецы рассуждают быстро и безошибочно. Каждому известно, что остальные участники - тоже мудрецы. Если мудрец может точно ответить на заданный вопрос, он всегда честно отвечает. Если не может, то не пытается угадать, а говорит "Не знаю". Мудрецы, стоящие в колонне (в затылок друг другу), видят колпаки всех стоящих впереди, но не видят ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади мудрецов. Все мудрецы слышат ответы других мудрецов.

Задача Д47. Двум мудрецам принесли два черных и один белый колпак. Затем их поставили в затылок друг другу и надели на каждого по колпаку. После этого спросили сначала второго, а потом первого, знает ли он, какого цвета колпак на его голове. Второй мудрец сказал, что не знает. А первый правильно назвал цвет своего колпака. Какой именно?

Задача Д48. Трем мудрецам принесли три черных и два белых колпака. Затем их построили в затылок друг другу, после чего надели на каждого по черному колпаку. После этого стали по очереди спрашивать каждого мудреца, начиная с последнего, какого цвета у него колпак. На это мудрецы либо отвечают «Не знаю», либо называют цвет. Что будут отвечать мудрецы?

Задача Д49. *(*)* Десяти мудрецам принесли по три желтых, синих, красных и зеленых колпака. Мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку, а два оставшихся колпака спрятали. Затем по очереди, начиная с последнего, стали спрашивать каждого, какого цвета у него колпак. На это мудрецы либо отвечают «Не знаю», либо называют цвет.

1) Докажите, что кто-то из мудрецов ответит утвердительно.
2) Докажите, что утвердительно ответят не менее четырех мудрецов.

Задача Д50. Двадцати мудрецам принесли 10 белых и 50 черных колпаков. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по черному колпаку, а все ненадетые колпаки спрятали. После этого им развязали глаза и стали у каждого по очереди спрашивать, какого цвета колпак у него на голове. Какой мудрец сможет ответить? Что будут говорить следующие?

Задача Д51. (К. Кноп) Султан пригласил шестерых мудрецов в комнату с тремя дверьми: белой, красной и синей и достал 4 белых, 3 красных и 2 синих колпака. Мудрецы сели в круг и крепко зажмурились. После этого султан надел троим мудрецам белые колпаки, двоим красные и одному синий. Открыв глаза, мудрецы получили возможность видеть цвета колпаков у всех остальных, но не у себя. Каждую минуту раздаётся удар гонга, после которого все мудрецы, знающие цвет своего колпака, должны выйти в дверь соответствующего цвета. Сколько мудрецов смогут покинуть комнату?

Мудрецы и числа

Задача Д52. Каждому из двух мудрецов дали бумажку с написанным на ней натуральным числом и сообщили, что одно число вдвое больше другого. Когда мудрецы посмотрели на числа, между ними состоялся такой диалог:

А: Я не знаю твое число.

Б: И я не знаю твое число.

А: И я не знаю твое число.

…

Докажите, что рано или поздно кто-то из мудрецов сможет сказать: «Теперь я знаю твое число».

Задача Д53. *(*)* Султан вызвал 10 умнейших своих мудрецов и огласил правила нового испытания. Каждому мудрецу сообщат число от 1 до 1000 включительно, одно из чисел строго больше остальных. Затем каждого мудреца по очереди будут спрашивать, не у него ли максимальное число. Он может ответить "не знаю" либо "у меня". После ответа "не знаю" испытание продолжается, вопрос задают следующему мудрецу. Если последний мудрец ответил "не знаю", вопрос опять задают первому мудрецу и так далее. После ответа "у меня" испытание заканчивается. Если мудрец ответил правильно, всех мудрецов отпускают, если неправильно - всех мудрецов казнят.

Мудрецам запретили не только обмениваться какой-либо информацией во время испытания, но даже договариваться о чем-либо заранее. Испытание началось. Королевский палач сто раз обошел всех мудрецов, и сто раз каждый из них ответил "не знаю". Наконец, палач в сто первый раз спросил первого мудреца, не у него ли максимальное число.

"У меня!" - ответил мудрец. Конечно, ответ был правильный, всех мудрецов отпустили. Какое число было у первого мудреца?

Задача Д54. *(*)* Математик С предложил математикам А и В такую загадку:

–Я задумал три попарно различных натуральных числа, произведение которых не превосходит 50. Сейчас я конфиденциально сообщу А это произведение, а В – сумму задуманных чисел. Попробуйте отгадать эти числа.

Узнав произведение и сумму, соответственно, А и В вступили в диалог:

А: Я не знаю этих чисел, но если бы моё число было суммой, я бы их знал.

В: Я все равно не знаю их.

Докажите, что теперь А сможет определить числа.

Задача Д55. *(*)* В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

Задача Д56. *(*)* Каждому из трёх логиков написали на лбу натуральное число, причём одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?