А.Д.Блинков

ГЕОМЕТРИЯ В НЕГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Демо-версия

Предисловие

Обратиться к заявленной теме автора побудила не только любовь к школьной геометрии и наличие давно собираемой большой коллекции задач, допускающих геометрические методы решения (часть из которых были мне известны еще до того, как они были опубликованы в тех или иных книгах для учителя). Исходя из многолетнего опыта работы со школьниками, отмечу, что многие школьники воспринимают школьные курсы алгебры и геометрии (а впоследствии и раздел тригонометрии) как совершенно независимые, в то время как они (и не только они) являются частью одной науки – математики. Вместе с тем, наиболее красивые, а часто и наиболее рациональные решения многих задач возникают, если привлекать для решения методы из других разделов математики. В частности, очень мощным является «геометрический подход» к решению некоторых задач, условие которых сформулировано на языке арифметики, алгебры, комбинаторики, тригонометрии или математического анализа. Это объясняется прежде всего тем, что геометрия – наиболее наглядный раздел математики. Использование геометрических способов решения задач в каком-то смысле «возвращает» нас к математикам древности, которые большинство математических объектов и операций воспринимали с точки зрения геометрии.

В этой книжке серии «Школьные математические кружки», посвященной геометрическому решению негеометрических задач, сделана попытка продемонстрировать, каким образом можно перевести условие задачи на язык геометрии, после чего показать красоту и эффективность геометрического метода ее решения. Книжка содержит девять занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя: несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя. Многие из предлагаемых задач имеют и другие, не геометрические решения, которые сознательно оставлены «за рамками» этого издания.

В разделе приложений представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть – дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в наиболее простых случаях – ответы и указания). Для удобства, в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые отнесены к нескольким занятиям (поскольку допускают различные подходы). Несколько задач (Д58 – Д60 и, в какой-то мере, Д56 и Д57) трудно отнести к какому-то из занятий, но их решение позволяет расширить область применения геометрических методов. В этом же разделе помещен список литературы и список авторов задач.

Разбиение материала на занятия носит, в какой-то степени, условный характер: в одних случаях тема занятия соответствует тому или иному разделу математики, а в других случаях – отражает тот или иной «подход» к решению задач.

Занятие 1
Расстояния на прямой и не только

Разберем несколько несложных задач с геометрическим содержанием, которые дают «ключ» к решению ряда задач, связанных с понятием модуля числа.

Прежде всего напомним:

1) ***Модулем числа x называется расстояние на координатной прямой от точки с координатой x до нуля***.

2) Пусть на координатной прямой отмечены точки $A(a)$ и $B(b)$. Тогда расстояние между этими точками вычисляется по формуле $AB = |a - b|$, а середина C отрезка AB имеет координату $c = \frac{a+b}{2}$ (см. рис. 1.1).

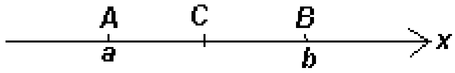


Рис. 1.1

Первую из этих формул можно доказать, рассмотрев различные случаи расположения точек A и B по отношению к друг другу и точке O(0), а вторая формула следует из первой, если записать равенство AC = BC, используя координаты этих точек.

Начнем с очень простого практического вопроса: где надо вырыть колодец, чтобы расстояние до него от двух домов было одинаковым? Естественный ответ: в середине отрезка, соединяющего эти дома.

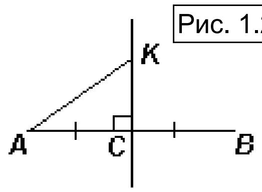


Рис. 1.2

Формально этот ответ не совсем точен. Для школьников, уже изучавших геометрию, можно напомнить, что ***геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от двух данных точек, является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки***.

Но с точки зрения здравого смысла из всех таких точек разумно выбрать ту, для которой требуемые расстояния не только равны, но являются и наименьшими из возможных. Действительно, если K – произвольная точка серединного перпендикуляра к отрезку AB, а C – середина этого отрезка, то KA > CA, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета (см. рис. 1.2).

Пример 1.1. Решите уравнение: $|x - 2| = |x - 4|$.

Решение. Рассмотрим координатную прямую. Условие задачи означает, что на ней надо найти точку, которая равноудалена от точек $A(2)$ и $B(4)$. Понятно, что это середина отрезка AB, то есть $C(3)$. Следовательно, решением уравнения является $x = 3$ (см. рис. 1.3а).

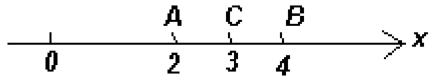


Рис. 1.3а

Ответ: 3.

Более того, с той же легкостью можно решать и некоторые неравенства, например, $|x + 1| \geq |7 - x|$.

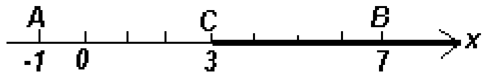


Рис. 1.3б

Действительно, из определения модуля следует, что ***модули противоположных чисел равны***, а для того, чтобы использовать формулу расстояния между точками, под знаком модуля должна стоять разность координат. Поэтому, данное неравенство удобно переписать в таком виде: $|x - (-1)| \geq |x - 7|$.

Тогда его решением будут все точки координатной прямой, для которых расстояние до точки $A(-1)$ не меньше, чем расстояние до точки $B(7)$. Понятно, что этим свойством обладает точка $C(3)$ – середина отрезка AB, а также все точки лежащие правее точки C (см. рис. 1.3б). Таким образом, решением неравенства являются все числа, большие или равные трем, то есть $x \geq 3$.

Обычно этот результат записывают в виде промежутка [3; +∞), но можно ограничиться словесной формой или записью соответствующего простейшего неравенства.

Переформулируем исходную задачу. Пусть колодец требуется вырыть так, чтобы сумма расстояний от него до двух домов была наименьшей. Интуиция подсказывает, что колодец надо строить на отрезке, соединяющем эти дома, но в какой точке?

Оказывается, что в любой точке этого отрезка! Действительно, ***какую бы точку M на отрезке AB мы не выбрали, сумма расстояний от нее до концов отрезка одна и та же, и она равна длине отрезка AB***.

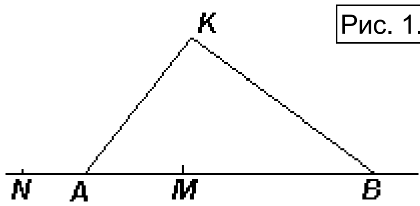


Рис. 1.4

Если же выбрать произвольную точку N на прямой AB вне отрезка, то сумма расстояний от нее до точек A и B, очевидно, будет больше, чем длина AB. Аналогично, если точка K не лежит на прямой AB, то $KA + KB > AB$ по неравенству треугольника (см. рис. 1.4).

Полученный факт позволяет решать простейшие задачи о сумме двух модулей.

Пример 1.2. Найдите наименьшее значение выражения $|x + 4| + |x - 2|$.

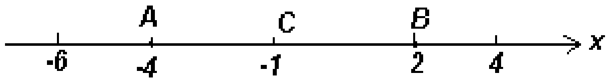
Решение. Рассмотрим на координатной прямой точки A(–4) и B(2). Условие задачи означает, что на ней надо найти такие точки, для которых сумма расстояний до точек A и B будет наименьшей. Эти точки, как было доказано, лежат на отрезке AB, а искомая сумма равна длине отрезка AB, то есть равна 6 (см. рис. 1.5а).

Рис. 1.5а

Ответ: 6.

Пример 1.3. Решите уравнение: $|x + 4| + |x - 2| = 10$.

Рис. 1.5б



Решение. Условие задачи означает, что на координатной прямой надо искать точки, сумма расстояний от которых до точек $A(-4)$ и $B(2)$ равна 10. Понятно, что на отрезке AB они лежать не могут, иначе эта сумма была бы равна 6, значит, они лежат вне этого отрезка. Искать их можно, например, так: заметим, что для любой точки N, лежащей на координатной прямой вне отрезка, сумма $NA + NB = 2NC$, где $C(-1)$ – середина отрезка AB (*подумайте*, *почему*?).

Таким образом, искомые точки удалены от точки $C(-1)$ на расстояние 5. Получим, что решением уравнения являются два числа: 4 и –6 (см. рис. 1.5б).

Ответ: –6; 4.

Аналогично можно решать и неравенства, в частности, из предыдущих рассуждений следует, что решением неравенства $|x + 4| + |x - 2| > 10$ является объединение двух промежутков: $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$.

Усложним задачу. Пусть теперь вдоль прямой дороги стоят семь домов, причем расстояния между соседними домами не обязательно одинаковы. В какой точке дороги надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

Обозначим дома по порядку точками A_1, A_2, ..., A_6, A_7 на прямой, а искомую точку – через X (см. рис. 1.6). Для того, чтобы сумма $XA_1 + XA_7$ была наименьшей точка X должна находится на отрезке A_1A_7. Сумма $XA_2 + XA_6$ – наименьшая, если точка X лежит на отрезке A_2A_6, а сумма $XA_3 + XA_5$ – наименьшая, если X лежит на отрезке A_3A_5. Следовательно, сумма $XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_5 + XA_6 + XA_7$ – наименьшая, если точка X принадлежит всем трем отрезкам, то есть лежит на отрезке A_3A_5. Осталось сделать наименьшим расстояние от X до A_4. Понятно, что это произойдет в том случае, если эти точки совпадают. Таким образом, колодец надо строить около четвертого дома, причем полученный результат никак не зависит от расстояний между соседними домами!

Рис. 1.6

Пример 1.4. Найдите наименьшее значение суммы: $|x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 11|$.

Решение. Условие задачи означает, что на координатной прямой надо найти точку, сумма расстояний от которой до точек $A_1(1)$, $A_2(2)$, ..., $A_{11}(11)$ будет наименьшей. По аналогии с только что рассмотренной задачей получим, что это точка $A_6(6)$. Остается подсчитать сумму расстояний от этой точке до остальных: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)\cdot 2 = 30$.

Ответ: 30.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.1. Решите уравнение или неравенство: а) $|x| = |x - 3|$; б) $|5 + x| \le |5 - x|$.

1.2. Найдите наименьшее значение выражения $|a - 100| + |100 + a|$.

1.3. Решите уравнения или неравенства: а) $|x - 1| + |x - 2| = 3$; б) $|x - 1| + |x - 2| < 3$; в) $|x| + |1 + x| = 1$; г) $|x| + |1 + x| \ge 1$; д) $|6 + x| + |6 - x| = 8$.

1.4. а) На одной стороне улицы стоят подряд десять домов (*расстояния между соседними домами не обязательно одинаковые*). В каком месте надо построить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

б) Найдите наименьшее значение суммы: $|a| + |a + 1| + |a + 2| + ... + |a + 100|$.

1.5. а) Расстояние между деревнями *A* и *B* равно 3 км. В деревне *A* живут 300 школьников, а в деревне *B* – 200 школьников. В каком месте надо построить школу, чтобы сумма всех расстояний, пройденных школьниками по дороге в школу, была наименьшей?

б) Найдите наименьшее значение каждого из выражений:

1) $3|x - 2| + 2|x - 5|$; 2) $|8x + 40| + |5x + 40|$.

1.6. В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется провести шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в таком месте, чтобы сумма расстояний всех переездов была наименьшей. Нью-Йоркские мастера считают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что турнир надо проводить в городе, который является «центром тяжести» всей совокупности мест, в которых живут шахматисты. Кто из них прав?

1.7. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1 км/ч, 2 км/ч и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч им надо выбрать, чтобы сумма времён, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

Занятие 2
Расстояния на координатной плоскости

В занятии 1 было, в частности, показано, что ряд алгебраических выражений с одной переменной можно эффективно интерпретировать в виде расстояний на координатной прямой. Аналогично, при решении многих алгебраических задач, в которых фигурируют выражения с двумя переменными, удобно использовать координатную плоскость.

Напомним, что расстояние между точками $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Напомним также, что линейное уравнение с двумя переменными задает на координатной плоскости прямую, а уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задает окружность с центром $C(a;\ b)$ и радиусом $R \geq 0$. Геометрической основой решения многих задач этого занятия служит неравенство треугольника: ***для любых точек A, B и C плоскости выполняется неравенство |AC – BC| ≤ AB ≤ AC + BC, причем равенство достигается только в случае, когда точки лежат на одной прямой***.

Рассмотрим примеры.

Пример 2.1. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Решение. Рассмотрим точки $A(0;\ 1)$ и $B(1;\ 0)$ в декартовой системе координат (см. рис. 2.1). Пусть $M(x;\ y)$, тогда $MA = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$; $MB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. По неравенству треугольника $MA + MB \geq AB$, поэтому данное выражение принимает наименьшее значение в том случае, когда достигается равенство, то есть если точка M лежит на отрезке AB.

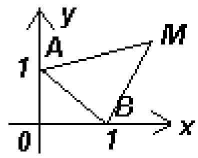


Рис. 2.1

В этом случае $MA + MB = AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Пример 2.2. При каких значениях a разность корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

В данном случае речь идет об уравнении с одной переменной и параметром, но заданное равенство можно также рассматривать и как уравнение с двумя переменными.

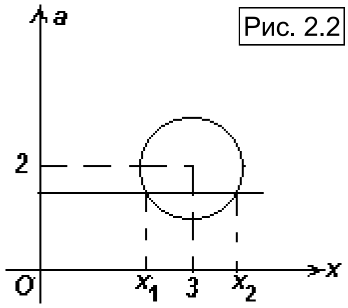


Рис. 2.2

Решение. Так как $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = (x^2 - 6x + 9) + (a^2 - 4a + 4) - 1 = (x - 3)^2 + (a - 2)^2 - 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 1$. Графиком этого уравнения в системе координат $(x;\ a)$ является окружность с центром в точке $(3;\ 2)$ и радиусом 1 (см. рис. 2.2).

Рассмотрим произвольную прямую, параллельную оси x и пересекающую окружность в двух точках. Абсциссы x_1 и x_2 этих точек являются корнями уравнения, а разность $x_2 - x_1$, где $x_2 > x_1$, равна длине хорды окружности. Эта разность будет наибольшей в случае, если рассматриваемая хорда является диаметром. Следовательно, искомое значение a равно 2.

Ответ: при $a = 2$.

Пример 2.3. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $y - x^2$, если $|x| + |y| \leq 13$.

Решение. Графиком уравнения $|x| + |y| = 13$ является контур квадрата с центром в начале координат, поэтому данному неравенству удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих этому квадрату (см. рис. 2.3).

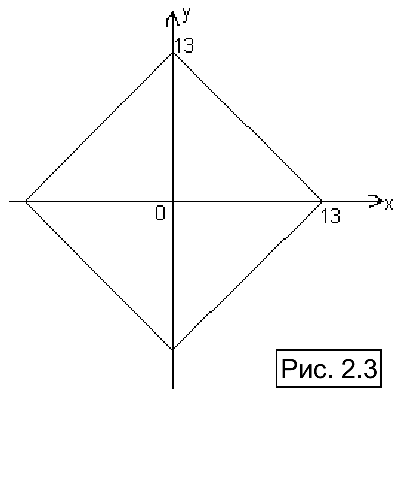


Рис. 2.3

Пусть $y - x^2 = t$, тогда решение задачи сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения переменной t, для которых график функции $y = x^2 + t$ имеет общие точки с найденным множеством.

Так как график указанной функции получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси y, то: 1) наибольшее значение t достигается, если вершиной параболы $y = x^2 + t$ является точка (0; 13), то есть, при $t = 13$; 2) наименьшее значение t достигается, если парабола $y = x^2 + t$ проходит через точки (13; 0) и (–13; 0), то есть, при $t = –169$.

Ответ: наибольшее значение равно 13, а наименьшее значение равно –169.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

2.1. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=5$?

2.2. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения: $(a – c)^2 + (b – d)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$.

2.3. Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + y^2$, если $|x-y|\le 2$ и $|3x+y|\le 6$.

2.4. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}$.

2.5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1, \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}. \end{cases}$.

2.6. Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{x}{y}$, если $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$.

2.7. Найдите наименьшее значение выражения $|x-y|+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$

2.8. Решите уравнение: $\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ + $\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}$ + $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ = 8.