

Ю. А. Блинков, Е. С. Горская

Вписанные углы

Издательство МЦНМО
Москва, 2017

Предисловие

Вписанные углы, по мнению авторов, являются одной из самых интересных тем из курса школьной геометрии. Они создают богатейшие возможности по выявлению равенств и соотношений между углами, поднимают на новый уровень работу с ГМТ и задачами на построение.

Отметим, что задачи по этой теме присутствуют в задачаниках В. В. Прасолова, И. Ф. Шарыгина, Р. К. Гордина, Я. П. Понарина и т. д., но на теорию и методические аспекты обучения данной теме обращено, на наш взгляд, недостаточно внимания. В данной книге мы постараемся частично восполнить этот пробел.

В брошюре содержатся: 10 занятий геометрического кружка; приложение, в котором рассматривается важное понятие **антипараллельности**, помогающее при решении многих задач, связанных со вписанными углами; дополнительные задачи и раздаточный материал к каждому занятию.

Каждое занятие книги представляет собой вариант кружка на соответствующую тему и состоит из теоретического материала, комментариев для учителя, примеров задач, которые, на наш взгляд, стоит разобрать в начале кружка, и задач для решения. При этом, разбирать ли теоретический материал, добавлять или убирать задачи — всё остаётся на усмотрение учителя. Некоторые занятия по объёму материала достаточно велики и, возможно, удобно будет их разбить на несколько занятий кружка. Мы этого не делали, чтобы сохранить целостность подачи материала.

Отметим, что в книге содержатся занятия двух типов.

Первый тип — занятия на определённый факт или метод. К ним относятся занятия 1, 2, 3, 4, 5 и 7. Второй тип занятий — на определённую геометрическую конструкцию. К ним относятся занятия 6, 8–10. Отметим, что, по мнению авторов, после того как учащиеся овладели основными методами и фактами полезно показывать их применение в различных геометрических конструкциях.

Также полезно предлагать учащимся «серии» задач, то есть в одной геометрической конструкции из одной задачи следует другая, постепенно усложняя уровень задач. Примерами подобных занятий можно считать занятия 9 («Две окружности») и 10 («точка Микеля»).

В конце занятия приведён список задач, которые также можно использовать на занятии (из раздела «Дополнительные задачи»). При этом одна и та же задача может быть указана в разных занятиях. В некоторых случаях это означает, что её решение может потребовать знания материала из нескольких занятий. Для того, чтобы облегчить выбор учителю, в конце книги приведён рубрикатор задач, в котором про каждую дополнительную задачу указано, к каким занятиям её можно отнести.

Более того, возвращаться к одной и той же задаче в различных геометрических конструкциях авторы считают полезным для закрепления и глубокого понимания материала.

Мы включили в этот раздел много несложных задач, поскольку одной из целей брошюры является возможность обучения данной теме «с нуля».

Те же, кто более опытен, также могут найти себе задачи по уровню. Некоторые задачи весьма трудны и взяты из материалов олимпиад самого высокого уровня. Наиболее, на наш взгляд, сложные задачи отмечены знаком «*».

Отметим также, что некоторые задачи можно решать и без использования вписанных углов, но, исходя из тематики данной книги, мы эти решения не приводим.

К дополнительным задачам мы приводим только указания, причём в основном это не краткие решения, а комментарии, с какой геометрической конструкцией связана данная задача и какие факты из занятий можно применить.

Если материал из соответствующего занятия усвоен, то этого должно хватить для того, чтобы довести решение до конца. Если не получается — ничего страшного, можно ещё раз вернуться к занятию на эту тему, а задачу порешать позже.

Полные же решения почти всех задач можно легко найти на сайте problems.ru.

В рамках данной книги мы решили ограничиться десятью занятиями, однако, если использовать дополнительные задачи, то можно провести ещё несколько занятий, например: «Угол между радиусом и стороной», «Средины дуг», «Ортоцентр и угол 60° », «Вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями», «Прямая Симсона в задачах».

Отметим также, что в решениях задач мы не используем ориентированные углы, так как наша книга адресована широкому кругу читателей и мы готовы пожертвовать строгостью ради большей доступности изложения. Тем не менее, в некоторых задачах мы упоминаем про другие случаи расположения точек и приводим соответствующие рисунки, предлагая восстановить доказательство для этого случая (см. например, см. занятие 9).

Некоторые «классические» вещи не вошли в эту книгу. Например, свойства прямой Уоллеса-Симсона и задачи с ней связанные заслуживают отдельного занятия (возможно, и не одного). То же самое относится к окружностям Эйлера, Конвея и Тэйлора, о которых мы упоминаем «вскользь». Задачи на эти темы и более подробное исследование данных объектов можно найти в задачнике В. В. Прасолова и в статьях на сайте geometry.ru.

Наша же цель была не пытаться объять всё, а подроб-

но разобрать основные факты и идеи, которые встречаются при решении классических задач. Тем же обусловлен и выбор задач для самостоятельного решения (дополнительных задач).

Многие занятия данной книги возникли в результате обсуждений, обмена мнениями и материалами с А. Д. Блинковым, Д. В. Прокопенко, Д. В. Швецовым, за что авторы им очень благодарны.

Более того, часть задач на темы «Угол между радиусом и стороной» и «Прямая Симсона в задачах» были взяты из соответствующих занятий Д. Швецова, идея рассмотрения конструкции из двух окружностей (занятие 9) предложена Д. В. Прокопенко, а некоторые задачи на вспомогательную окружность (занятие 4) — А. Д. Блинковым.

Отдельная благодарность — А. В. Шаповалову и А. Д. Блинкову: за полезные обсуждения, внимательное прочтение книги и исправление ошибок и опечаток.

Мы не приводим авторов задач, за что заранее просим извинить. В большинстве случаев это задачи, давно ставшие классикой, и задачи олимпиад различного уровня, которые нам нравятся и соответствуют целям и задачам этой брошюры.

Занятие 1

Вписанный угол, опирающийся на диаметр

Занятие рассчитано на учеников 7–8 класса. Рекомендуется его проводить после того, как учащиеся будут иметь представление об окружности, описанной около треугольника и основных геометрических местах точек (сокращённо ГМТ). К задачам на данную тему рекомендуется возвращаться и позже (см. задачи для самостоятельного решения).

Вспомним следующие утверждения:

1. Свойство и признак прямоугольного треугольника.

- а) В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине.
- б) Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

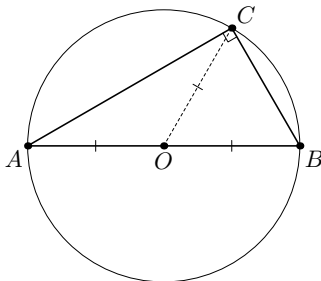


Рис. 1.1

Мы не приводим доказательства данных фактов, так как они входят в школьную программу.

2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр. Расположение центра описанной окружности прямоугольного треугольника.

- а) Вписанный прямой угол опирается на диаметр.
- б) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.
- в) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы.

Комментарий. Утверждение 2а следует из 1а, утверждение 2б следует из 1б, утверждение 2в следует из 2а (см. рис. 1.1).

Отметим, что на данном этапе нецелесообразно вводить чёткое определение вписанного угла. Это можно сделать позже (см. занятие 2). Пока что, на наш взгляд, хватит наглядного представления.

Полезно обсудить с учениками как формулируются данные утверждения, используя слова «если ..., то ...», какое из утверждений является свойством, а какое — признаком и. т. д.

3. ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, является окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, исключая точки A и B .

Комментарий. Утверждение следует из 2а и 2б.

Отметим, что понятие ГМТ является ключевым при решении задач на вписанные углы.

Отметим также, что утверждение 3 нам позволит, в том числе, доказывать принадлежность четырёх точек одной окружности.

Пример 1.1. Нарисована окружность с неотмеченным центром. Восстановите его при помощи чертёжного угольника.

Решение. Воспользуемся тем, что вписанный в окружность прямой угол опирается на диаметр (утверждение 2а). Расположим угольник так, чтобы вершина прямого угла находилась на окружности, а стороны пересекали окружность (см. рис. 1.2), причём сделаем

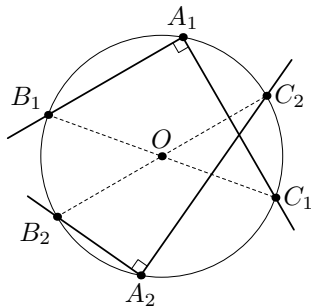


Рис. 1.2

это дважды. Пусть A_1 и A_2 — вершины прямых углов, а B_1, C_1, B_2 и C_2 — точки пересечения сторон угольника с окружностью. Поскольку $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2 = 90^\circ$, то B_1C_1 и B_2C_2 — диаметры окружности, следовательно, точка их пересечения — центр окружности.

Обратите внимание, что мы воспользовались не определением центра, а тем, что он принадлежит диаметру окружности, и получили центр, как *пересечение множеств*.

Пример 1.2. Пусть AB — диаметр окружности. Докажите, что если точка M лежит внутри окружности, то угол AMB тупой, а если вне — острый.

Перед разбором доказательства можно задать школьникам вопрос: а почему этот угол не может быть прямым?

Решение. Пусть точка M_1 лежит внутри окружности (см. рис. 1.3), а луч AM_1 пересекает окружность в точке M . Тогда, согласно утверждению 26, $\angle AMB = 90^\circ$ (опирается на диаметр), а угол AM_1B — внешний в треугольнике BMM_1 . Следовательно, $\angle AM_1B = \angle AMB + \angle MBM_1 > \angle AMB = 90^\circ$.

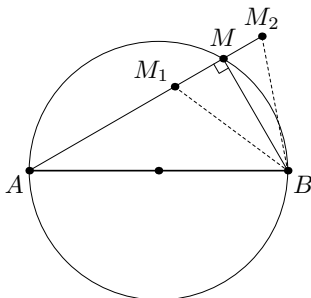


Рис. 1.3

Пусть теперь точка M_2 лежит вне окружности, а M — точка пересечения окружности и отрезка AM_2 . Тогда угол AMB — внешний в треугольнике BM_2M , следовательно, $\angle AMB = \angle AM_2B + \angle M_2BM$, откуда $\angle AM_2B < \angle AMB = 90^\circ$.

Стоит обратить внимание учащихся на доказанное утверждение. В дальнейшем оно нам пригодится (см. занятие 4).

Заметим, что верно и обратное утверждение, которое можно доказать методом от противного.

Можно обратить внимание, что мы доказали утверждение для угла с вершиной в *любой* точке, сравнив его со *специально построенным*

прямым углом. Окружность дала нам возможность выбора *удобного* прямого угла из *многих возможных*.

Пример 1.3. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 , H — точка их пересечения. Докажите, что:

- а) точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности.
- б) точки C, H, A_1 и B_1 лежат на одной окружности.

Решение. Пусть треугольник ABC — остроугольный (см. рис. 1.4а). Воспользуемся утверждением 3. Поскольку $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$, точки B_1 и A_1 принадлежат окружности, построенной на AB как на диаметре. Аналогично, точки B_1 и A_1 принадлежат окружности, построенной на отрезке CH как на диаметре.

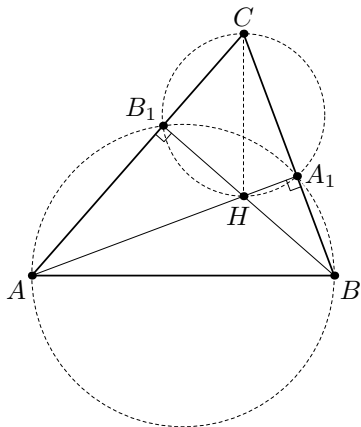


Рис. 1.4а

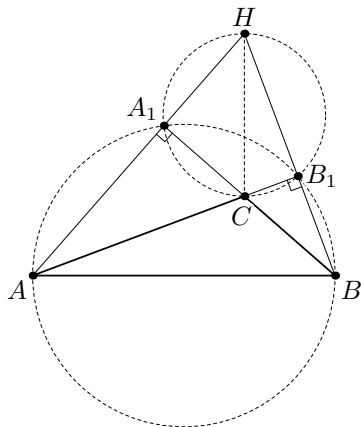


Рис. 1.4б

Случай, когда треугольник ABC — тупоугольный, рассматривается аналогично, при этом точки C и H , а также точки A_1 и B_1 меняются местами (см. рис. 1.4б).

Можно было также воспользоваться утверждением 2в и доказать, что описанные окружности двух треугольников совпадают (например, для треугольников AB_1B и AA_1B).

Пример 1.4. На окружности отмечена точка. Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

Решение. Пусть O — центр окружности, A — данная точка (см. рис. 1.5). Рассмотрим произвольную (отличную от диаметра) хорду AB . Точка M является её серединой тогда и только тогда, когда $\angle AMO = 90^\circ$. Воспользовавшись утверждением 3 получаем, что геометрическое место точек M есть окружность, построенная на отрезке AO , как на диаметре, исключая точку A .

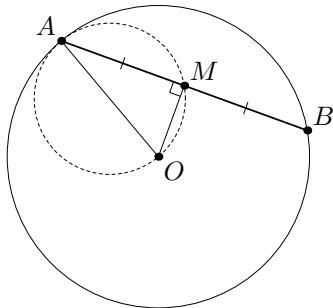


Рис. 1.5

Можно обратить внимание, что мы определили рассматриваемое множество точек по-другому, *более удобным* для нас образом.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку, расположенную вне окружности.

Задача 1.2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

Задача 1.3. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника как на диаметрах, лежит на прямой BC .

Задача 1.4. Даны окружность w и две точки M и K внутри неё. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

Задача 1.5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC , как на диаметре построена окружность w , которая пересекает гипотенузу AB в точке D . Через точку D проведена касательная к окружности. Докажите, что она пересекает катет BC в его середине.

Задача 1.6. Пусть O — центр вписанной окружности, а O_1 — центр внеписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны AB . Докажите, что точки A , B , O и O_1 лежат на одной окружности.

Задача 1.7. Даны две точки A и B . Две окружности касаются прямой AB (одна — в точке A , другая в точке B) и касаются друг друга в точке M . Найдите ГМТ M .

Ответы и решения

Задача 1.1. Пусть O — центр окружности, A — данная точка (см. рис. 1.6). Поскольку касательная перпендикулярна радиусу окружности, то точка касания B принадлежит геометрическому месту точек, из которых отрезок AO виден под прямым углом, то есть, окружности, построенной на AO как на диаметре (утверждение 3). С другой стороны, B должна принадлежать данной окружности. Таким образом, B есть точка пересечения этих окружностей.

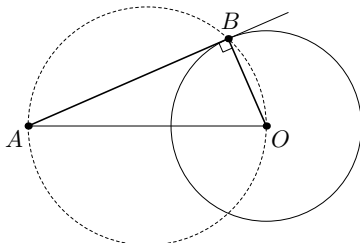


Рис. 1.6

Стоит обратить внимание школьников на то, что задача имеет два решения.

Отметим, что данная задача предназначена скорее для урока, чем для кружка. Тем не менее, напомнить о методе построения касательной полезно и с точки зрения дальнейшего изучения материала.

Задача 1.2. Пусть ABC — искомый прямоугольный треугольник ($\angle C = 90^\circ$, см. рис. 1.7). Согласно утверждению 3, ГМТ C есть окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре (исключая точки A и B). С другой стороны, все такие точки удалены от отрезка AB на одно и то же расстояние, равное высоте треугольника. Таким образом, вершина C есть одна из точек пересечения прямой, параллельной AB и отстоящей от нее на расстояние, равное высоте, и окружности, построенной на AB как на диаметре.

Отметим, что в отличие от предыдущей, эта задача имеет не более одного решения.

Заметим также, что можно было использовать утверждение 1а и метод вспомогательного треугольника (вначале построить треугольник COH , см. рис. 1.7).

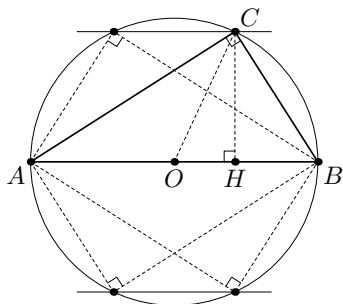


Рис. 1.7

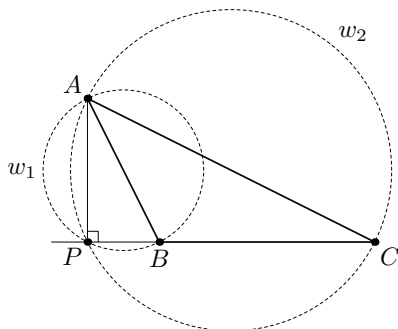


Рис. 1.8

Задача 1.3. Первый способ. Обозначим окружности, построенные на AB и AC , как w_1 и w_2 . Пусть P — точка пересечения w_1 и w_2 , отличная от точки A (см. рис. 1.8). Поскольку AB и AC — диаметры окружностей, то $\angle APB = 90^\circ$ и $\angle APC = 90^\circ$, следовательно, прямые PB и PC совпадают, то есть точки P , B и C лежат на одной прямой.

Второй способ. Обозначим через P основание высоты треугольника, опущенной из вершины A . Из точки P оба отрезка AB и AC видны под прямым углом, поэтому P лежит на обеих построенных окружностях.

Второе решение использует приём, называемый *подмена объекта*: вместо искомой точки мы используем точку с *другими* свойствами, для которой нужное утверждение очевидно верно. Зато нам приходится доказать, что такая точка является искомой.

Задача 1.4. Пусть ABC — искомый треугольник (см. рис. 1.9). Поскольку $\angle MBK = 90^\circ$, то точка B принадлежит окружности w_1 , построенной на отрезке MK как на диаметре (утверждение 3). Таким образом, точка B — любая точка пересечения окружностей w и w_1 . Дальнейшее построение очевидно.

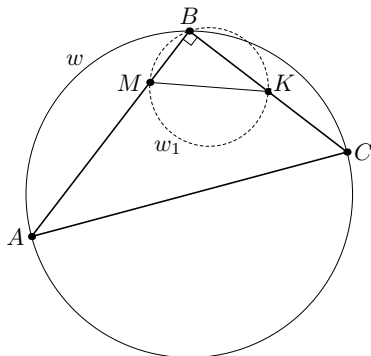


Рис. 1.9

Количество решений зависит от количества точек пересечения окружностей.

Отметим, что достаточно построить любую из вершин искомого треугольника, дальнейшее построение однозначно. При этом удобно искать вершину прямого угла, она связана с условием: из неё отрезок MK виден под прямым углом.

Задача 1.5. Пусть K — точка пересечения касательной и отрезка BC (см. рис. 1.10). Из утверждения 2б следует, что $\angle ADC = 90^\circ$. Поскольку BC также является касательной к w , то $KC = KD$. Таким образом, точка K лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника CBD и равноудалена от вершин C и D . Следовательно, точка K является центром описанной окружности треугольника CBD , то есть серединой отрезка BC .

Можно также доказать равенство $KD = KB$, посчитав углы в треугольнике KBD .

При желании, можно обсудить со школьниками, а почему касательная вообще пересекает катет BC .

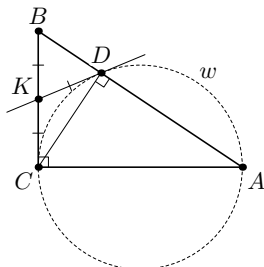


Рис. 1.10

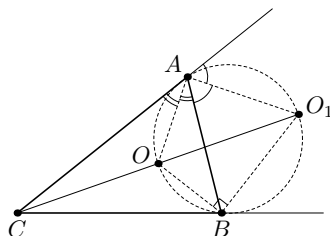


Рис. 1.11

Задача 1.6. Поскольку AO и AO_1 — биссектрисы смежных углов (см. рис. 1.11), то $\angle OAO_1 = 90^\circ$. Аналогично, $\angle OBO_1 = 90^\circ$, то есть, точки A, B, O и O_1 лежат на одной окружности (утверждение 3).

Эта окружность нам ещё неоднократно встретится. В частности, в занятии 6 мы будем подробно рассматривать конструкцию, связанную с её центром.

Задача 1.7. Ответ: окружность, построенная на AB как на диаметре, исключая точки A и B .

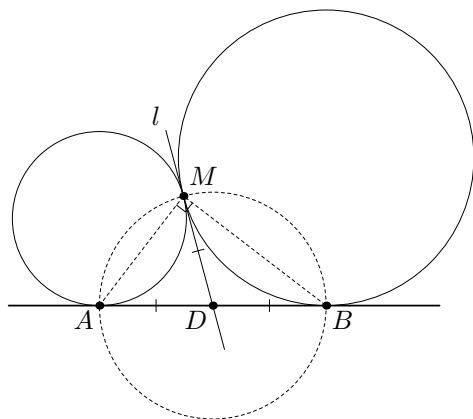


Рис. 1.12

Проведём через точку M общую касательную l к данным окружностям (см. рис. 1.12). Пусть D — точка пересечения l и AB . Тогда $DA = DM$ и $DM = DB$, следовательно, точка M удалена от точки D на фиксированное расстояние, то есть лежит на окружности с диаметром AB .

Осталось показать, что любая точка этой окружности (не совпадающая с A и B) удовлетворяет условию. Действительно, если $DM = DA = DB$, то мы можем вписать касающиеся в точке M окружности в углы MDB и MDA .

Можно также использовать задачи Д1–Д11, Д36, Д106–Д107.

Занятие 2

Теорема о вписанном угле

Занятие ориентировано на учеников 8 класса. В некоторых учебных пособиях понятие вписанного угла и соответствующие утверждения рассматриваются позже. На наш взгляд, работать со вписанными углами можно с начала 8 класса, при изучении темы «Четырёхугольники». Тогда, постепенно привыкая к данной конструкции и утверждениям, с ней связанными, ученики в середине или конце 8 класса уже смогут решать некоторые, даже иногда непростые, задачи.

Перед началом занятия рекомендуем обсудить с учащимися перечисленные ниже утверждения. Отметим, что, как и в первом занятии, теоремы и следствия из них в большинстве случаев мы приводим без доказательств, так как они содержатся в стандартных школьных учебниках.

1. Рассмотрим произвольный угол ABC и дугу окружности, которая пересекает его стороны (см. рис. 2.1).

Если концы дуги лежат на сторонах угла, а её внутренние точки — между сторонами угла, то говорят, что угол «опирается» на дугу.

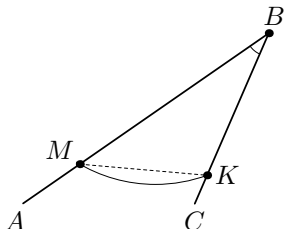


Рис. 2.1

Про хорду, соединяющую концы дуги говорят, что она «стягивает» эту дугу.

Если $\angle ABC = \alpha$, то говорят, что хорда MK «видна» из точки B под углом α .

Определения.

- 1) Угол называется *вписанным* в окружность, если его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.
- 2) Угол называется *центральный*, если его вершиной является центр окружности.

При желании можно предложить школьникам следующее

Упражнение. Верно ли такое определение вписанного угла: угол называется вписанным в окружность, если имеет с ней ровно три общие точки?

Ответ: нет, неверно. Например, можно рассмотреть угол, одна из сторон которого пересекает окружность, а другая — касается.

2. Теорема. Угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

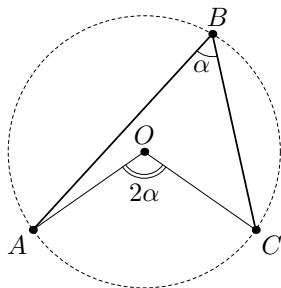


Рис. 2.2а

Отметим, что исходя из формулировки теоремы, утверждение рассматривается для вписанных углов, не являющихся тупыми. Позднее, начиная с занятия 7, мы начнём его использовать и для тупых вписанных углов. Пока же работать же с тупыми вписанными углами школьники смогут, используя следствия 3 и 4.

Следствия.

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Формально говоря, следствие 1 пока что доказано только для острых вписанных углов, то есть, опирающихся на ту же дугу, что и центральный угол AOC , см. рис. 2.2а. Завершить доказательство для тупых углов можно после того, как доказано следствие 3.

2. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, являются прямыми.

3. Сумма вписанных углов, опирающихся на дуги, дополняющие друг друга до окружности, равна 180° .

Пусть углы ABC и AB_1C вписаны в окружность и опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности (см. рис. 2.26), а точки B и O лежат в разных полуплоскостях относительно AC . Проведём диаметр BB_2 . Тогда $\angle B_2AB = \angle B_2CB = 90^\circ$ (следствие 2). Используя теорему о сумме углов четырёхугольника, получим, что $\angle AB_2C = 180^\circ - \angle ABC$. Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться следствием 1 для острых углов AB_2C и AB_1C (углы — острые, поскольку опираются на одну дугу с центральным углом AOC).

Отметим, что теперь следствие 1 доказано и для тупых вписанных углов, так как они дополняют равные острые углы до 180° .

Заметим также, что на самом деле, доказано **свойство** вписанного четырёхугольника: если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° . Подробный разговор о свойствах и признаках вписанного четырёхугольника мы отложим до занятия 3.

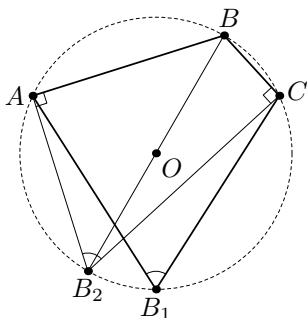


Рис. 2.26

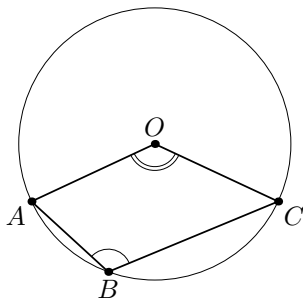


Рис. 2.2в

4. Если вписанный и центральный угол опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, то вписанный дополняет половину центрального до 180° , то есть, $\angle ABC = 180^\circ - 1/2\angle AOC$ (см. рис. 2.2в).

5. Пусть ABC — угол, вписанный в окружность с центром O . Этот угол острый тогда и только тогда, когда точки B и O лежат в одной полуплоскости относительно пря-

мой AC , и тупой — тогда и только тогда, когда они лежат в разных полуплоскостях (см. рис. 2.2а, в).

Отметим, что если рассматривать любые центральные углы, в том числе и большие 180° , то доказательство некоторых утверждений может быть упрощено. Например, следствие 3 может быть получено напрямую из теоремы о вписанном угле. Также при этом подходе можно следствие 4 отдельно не формулировать.

Тем не менее, при данном подходе у учителя могут возникнуть следующие проблемы:

1) рассмотрение угла, большего 180° , может вызвать у учащихся некоторые затруднения, поскольку ранее они с такими углами не сталкивались;

2) формулировки некоторых утверждений нуждаются в дополнительных объяснениях или корректировке. Например, не совсем понятно, какие точки лежат между сторонами угла, большего 180° , а значит, понятие «угол опирается на дугу» требует дополнительного объяснения;

3) угол требует других обозначений, так как центральных углов AOC становится два, то есть, в некоторых случаях придётся уточнять, какой из углов имеется в виду. Например, когда мы говорили о том, что хорда видна из точки под определённым углом.

Эти проблемы могут быть частично решены, если ввести понятие угла как части плоскости (плоского угла). Но в начале 8 класса это может оказаться преждевременным, исходя из определения угла, к которому учащиеся привыкли с 7 класса.

Исходя из вышеизложенного, мы выбрали путь, не использующий углов, больших 180° . При этом, в задачах мы будем приводить указания на то, как может упроститься решение, если использовать иной подход.

Какой подход выбрать на своих занятиях, каждый учитель может решить сам, исходя из уровня и готовности учеников. В этой брошюре мы выбрали путь «от частного к общему», но можно выбирать и путь «от общего к частному», если школьники к нему готовы.

По нашим наблюдениям, в теме «Вписанные углы» и так достаточно проблем с понятиями, формулировками и применением доказанных фактов, поэтому более общий подход может в начале 8 класса оказаться сложным. Однако, позднее, без обобщения, разумеется, не обойтись, как и без понятия угловой меры дуги. Об этом мы будем говорить в занятии 7.

Пример 2.1. На окружности отмечены четыре точки A , B , C и D . Чему равен угол ADC , если угол ABC равен α ?

Ответ: α или $180^\circ - \alpha$.

Решение. Возможны два случая расположения точек: C и D находятся в разных полуплоскостях относительно прямой AC (см. рис. 2.3а) или в одной полуплоскости (см. рис. 2.3б).

В первом случае углы ABC и ADC опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, поэтому $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

Во втором случае, рассматриваемые углы опираются на одну и ту же дугу AC , откуда $\angle ADC = \angle ABC = \alpha$.

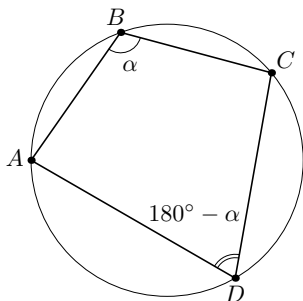


Рис. 2.3а

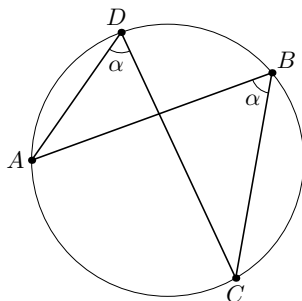


Рис. 2.3б

Пример 2.2. Сторона треугольника равна 10 см, а противолежащий ей угол 150° . Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Ответ: 10 см.

Решение. Пусть дан треугольник ABC , сторона AC которого равна 10 см. Рассмотрим окружность с центром O , описанную вокруг этого треугольника (см. рис. 2.4). Согласно следствию 4, $1/2\angle AOC + \angle ABC = 180^\circ$, откуда $\angle AOC = 60^\circ$. Треугольник AOC — равнобедренный с углом 60° при вершине, следовательно, равносторонний. Таким образом, радиус окружности равен длине

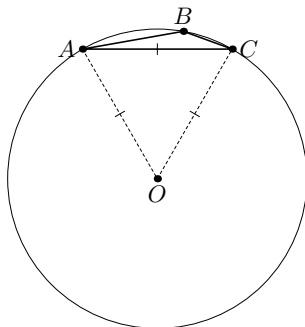


Рис. 2.4

стороны AC , то есть, 10 см.

Заметим, что школьники, знакомые с теоремой синусов, могут решить эту задачу и по-другому. Тем не менее, эта задача является полезным упражнением на вписанные углы.

Отметим также, что при возникновении центрального угла в 60° образуется равносторонний треугольник, то есть хорда равна радиусу окружности.

Пример 2.3. Хорды окружности AC и BD пересекаются, точки M , N и K — середины хорд AB , BC и CD соответственно. Докажите, что угол BMN равен углу NKC .

Решение. Проведём отрезки AC и BD (см. рис. 2.5). Тогда $\angle BAC = \angle BDC$, как опирающиеся на одну дугу. Кроме того, в треугольниках ABC и BCD отрезки MN и NK являются средними линиями. Следовательно, $\angle BMN = \angle BAC$ и $\angle NKC = \angle BDC$, откуда следует утверждение задачи.

Заметим, что здесь нужное равенство доказывается не напрямую, а через *посредников* — дополнительно построенные вписанные углы.

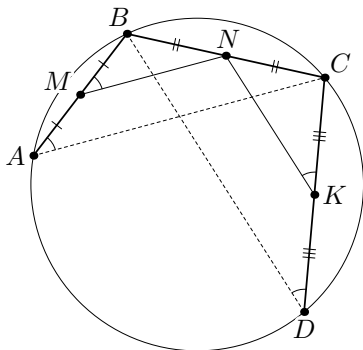


Рис. 2.5

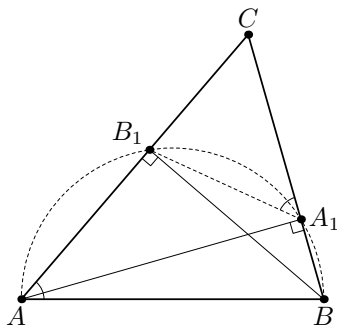


Рис. 2.6

Пример 2.4. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что угол CA_1B_1 равен углу CAB .

Отметим, что эта конструкция нам уже встречалась в занятии 1.

Решение. Поскольку $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$, то четырёхугольник AB_1A_1B — вписанный (см. рис. 2.6). Следо-

вательно, по следствию 3, $\angle B_1AB + \angle B_1A_1B = 180^\circ$. Тогда $\angle CAB = 180^\circ - \angle B_1A_1B = \angle CA_1B_1$.

Отрезки B_1A_1 и AB антипараллельны относительно прямых CA и CB (подробнее см. приложение).

www.ashap.info/Knigi/Matkruzhki/17-Vpis.pdf