А.Д. Блинков

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Демо-версия

Издательство МЦНМО

ISBN: 978-5-4439-1260-8
Год издания: 2018
Тираж: 3000 экз.
Количество страниц: 160
Размер: 145x200x5

Восемнадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам, связанным с числовыми последовательностями. В базовой школьной программе этой теме уделено очень мало внимания, в то время как решение многих несложных задач, в условии которых явно или неявно содержатся последовательности, развивает математическую интуицию, логику, а также полезно с точки зрения совершенствования «техники» работы с различными математическими объектами. Предлагаемая книжка содержит одиннадцать занятий математического кружка. Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям математики.

Предисловие

Эта книжка серии «Математические кружки» посвящена задачам, связанным с числовыми последовательностями. К сожалению, в базовой школьной программе этой теме уделено очень мало внимания. Школьники изучают только простейшие свойства двух частных случаев последовательностей: арифметической и геометрической прогрессии и происходит это довольно поздно: в курсе алгебры 9 класса. Вместе с тем, решение многих несложных задач, в условии которых явно или неявно содержатся последовательности, развивает математическую интуицию, логику, а также полезно с точки зрения совершенствования «техники» работы с различными математическими объектами. Не стоит забывать также и о том, что уже в самом раннем возрасте, учась считать, ребенок сразу сталкивается с простейшей последовательностью: последовательностью натуральных чисел. В дальнейшем, умение найти простейшие закономерности, удобные способы суммирования, и т. п., требуется для решения многих задач, с которыми дети сталкиваются не только при изучении математики. С этой точки зрения весьма полезно уделить этой теме ряд занятий математического кружка, начиная с 5 класса (а для особо «продвинутых» школьников можно начать и раньше).

Предлагаемая книжка содержит одиннадцать занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя: несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя. Отметим, что разбиение на занятия в какой-то степени условно и иногда происходит по «внешним признакам», так как приходится учитывать наличие или отсутствие сведений, которые учащиеся имеют на тот или иной момент в соответствии со школьной программой.

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть – дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в отдельных случаях – ответы и указания). Для удобства, в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям.

В качестве приложения приведена также таблица кратких сведений об арифметической и геометрической прогрессиях. Некоторые из них обобщают те приемы и методы, которые встретятся при решении задач из книжки. Помимо прочего, этот перечень может оказаться полезным для углубления раздела школьного курса, связанного с прогрессиями.

Краткое содержание занятий.

Занятие 1. Поиск закономерностей. Занятие доступно учащимся 5 – 6 классов. Оно посвящено поискам и «вербализации» закономерностей в простейших числовых последовательностях и заполнению пропусков в этих последовательностях в соответствии с найденными закономерностями. Особое внимание уделено задачам, в которых демонстрируется возможность задания одной и той же последовательности различными способами, а также задачам, решение которых подготавливает к изучению прогрессий.

Занятие 2. Закономерности сумм и произведений. Занятие ориентировано на учащихся 5 – 6 классов. Оно посвящено простейшим приемам, с помощью которых можно находить суммы с большим количеством слагаемых и произведения большого количества сомножителей. В частности, вычисляются суммы некоторых арифметических и геометрических прогрессий (не вводя их определений). На отдельных примерах демонстрируются возможности «комбинаторного» и «геометрического» способов суммирования.

Занятие 3. Восстановим члены последовательности. Занятие ориентировано на учащихся 6 – 7 классов. Оно служит для того, чтобы школьники освоились с различными правилами, по которым могут быть заданы последовательности (как конечные, так и бесконечные) и научились восполнять «пробелы» в различных числовых рядах. Обсуждаются два основных способа задания числовых последовательностей: рекуррентный и формулой n-го члена. В ряде задач потребуется самим установить и обосновать закономерности, на основании которых можно будет вычислить члены с достаточно большими порядковыми номерами.

Занятие 4. Зацикливание. Занятие ориентировано на учащихся 7 – 8 классов. Оно посвящено решению задач, в условии которых различными способами заданы периодические последовательности. В процессе решения и разбора задач школьники смогут научиться распознавать такие последовательности, находить их период и члены с конкретными номерами. Особое внимание уделено алгебраическим методам решения, в частности, использованию равенств из условий задач в общем виде.

Занятие 5. Суммирование. Занятие ориентировано на учащихся 7 – 8 классов. Рассматриваются способы суммирования, основанные на применении некоторых алгебраических тождеств. Отрабатываются стандартные приемы, характерные для многих алгебраических задач (не только связанных с последовательностями): представление дроби в виде суммы или разности, прибавление и вычитание одного и того же выражение для получения «удобного» выражения, освобождение от иррациональности в знаменателе дроби, и пр.

Занятие 6. Целочисленные арифметические прогрессии. Занятие ориентировано на учащихся 8 – 9 классов. Оно посвящено задачам на последовательности, членами которых являются целые числа. Требует знания основ делимости и базовых сведений об арифметической прогрессии. Особое внимание уделено простым числам в арифметических прогрессиях.

Занятие 7. Существует ли ... ? Занятие ориентировано на учащихся 8 – 9 классов. Оно посвящено различным задачам, в которых требуется построить пример последовательности, обладающей определенными свойствами, либо привести контрпример, показывающий, что такой последовательности не существует. При решении задач активно задействован материал предыдущих занятий: применение алгебраических тождеств, простейшие приемы суммирования, базовые сведения об арифметической прогрессии, соображения делимости, и пр.

Занятие 8. Опять суммирование. Занятие ориентировано на учащихся 9 – 10 классов. Рассматриваются сравнительно сложные случаи суммирования. Для решения некоторых задач требуется комбинировать различные приемы и формулы, что способствует совершенствованию алгебраической техники школьников. Освоение этого материала потребует от школьников уверенного владения навыками работы с арифметической и геометрической прогрессиями.

Занятие 9. Числа Фибоначчи. Занятие ориентировано на учащихся 9 – 10 классов. Посвящено изучению свойств одной из самых известных последовательностей: числам Фибоначчи. В рамках решения и обсуждения задач школьники получат уникальную возможность сочетания методов и приемов из алгебры, теории чисел и комбинаторики, которые в некоторых случаях можно интерпретировать геометрически. Для работы с предложенным материалом от учащихся потребуется уверенное владение методом математической индукции и знание основ теории делимости, а также навыки тождественных преобразований и комбинаторных рассуждений.

Занятие 10. Вспомогательные последовательности. Занятие ориентировано на учащихся 9 – 10 классов. Посвящено задачам, для решения которых удобно (а иногда – необходимо) вводить новую последовательность, которую уместно называть вспомогательной. В условиях некоторых задач последовательности не упоминаются, а их введение в качестве вспомогательных позволяет найти красивое и короткое решение. В других задачах введение вспомогательной последовательности обеспечивает переход к последовательности, свойства которой известны, в частности, к арифметической или к геометрической прогрессии. В ряде случаев этот прием позволяет оценить члены последовательности с конкретными номерами. .

Занятие 11. Применение свойств последовательностей. Посвящено обсуждению сравнительно трудных задач, большинство из которых ранее использовались на олимпиадах высокого уровня. Для их решения применяются общие свойства последовательностей: периодичность, монотонность и ограниченность. Во вступительной части вводятся строгие определения этих понятий, а в процессе решения и обсуждения задач вырабатываются и закрепляются навыки их применения.

По традиции, в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках и факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, использовать эти занятия для более старших или более младших школьников, поменять порядок их изучения, и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке использованной литературы, а также авторам всех использованных в книжке задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Автор благодарен А.В. Шаповалову, оказавшему существенное влияние на концепцию книги и на улучшение ее текста, В.?. Шувалову за профессиональную верстку и выполнение чертежей, А.В. Антропову, А.И. Сгибневу и А.С. Штерну, из чьих материалов были позаимствованы некоторые задачи, а также всем школьникам, на занятиях с которыми этот материал был апробирован и «протестирован».

Занятие 1
Поиск закономерностей

На начальном этапе работы с последовательностями важно научить детей воспринимать последовательность (составной, потенциально бесконечный объект) как единое целое, подчиняющееся единому правилу.

На этом занятии мы будем рассматривать числа, записанные в строчку в определенном порядке или, иначе говоря, ***числовые последовательности***. Для начала попробуем научиться угадывать правило, по которому эти числа следуют одно за другим, а также находить числа, стоящие на определенных местах.

Пример 1.1. Даны последовательности чисел: а) 5, 8, 11, 14, 17, ; б) 1, 8, 27, 64, 125, …; в) 1, 2, 6, 24, 120, ...; г) 4, 8, 16, 32, 64, ... Для каждой из них: 1) сформулируйте правило, по которому она составлена, и укажите следующее число; 2) запишите числа, которые будут стоять на десятом и на двадцатом месте.

Отметим, что ответ на первый вопрос может быть неоднозначным, так как школьники могут увидеть различные закономерности. При этом, имеет смысл обсуждать наиболее очевидные.

Решение. а) 1) Заметим, что ***каждое следующее число на 3 больше чем предыдущее***, тогда следующим будет число 20. 2) Так как число 20 будет шестым, то, постепенно прибавляя по 3, получим, что на десятом месте стоит число 32. Можно таким же образом искать число, стоящее на двадцатом месте, но это не очень удобно. Имеет смысл рассуждать так: сколько раз надо прибавить по 3, чтобы из первого числа получить двадцатое? Это надо сделать 19 раз, поэтому двадцатое число равно 5 + 19?3 = 62.

б) 1) Заметим, что $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, $125 = 5^3$, то есть ***каждое число – это номер места, на котором оно стоит, возведенный в куб***. Значит, следующее число: $6^3 = 216$. 2) Десятое число равно $10^3 = 1000$, а двадцатое – это $20^3 = 8000$.

в) 1) Заметим, что второе число получается из первого умножением на 2, третье получается из второго умножением на 3, четвертое из третьего – умножением на 4, и так далее, то есть ***каждое число получается из предыдущего умножением на номер места, на котором оно стоит***. Значит, следующее число: 120?6 = 720. 2) Десятое число получается из девятого умножением на 10, девятое – из восьмого умножением на 9, и так далее. Значит, десятое число – это ***произведение всех натуральных чисел от 1 до 10***. Такое произведение принято записывать так: 10! (*читается: десять факториал*), причем вычислять это произведение особого смысла не имеет. Аналогично, двадцатое число – это 30! (*тридцать факториал*).

г) 1) ***Каждое число получается из предыдущего умножением на 2***, поэтому следующим будет число 128. 2) Для ответа на этот вопрос полезно записать данную последовательность чисел иначе: 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6, ... и тогда закономерность, по которой она составлена, можно сформулировать по-другому: ***каждое число является степенью двойки, показатель которой на единицу больше, чем номер места, на котором оно стоит***. Тогда можно увидеть, что десятое число равно 2^{11}, а двадцатое – это 2^{21}.

Ответ: а) 1) 20; 2) 32 и 62; б) 1) 216; 2) 1000 и 8000; в) 1) 120; 2) 10! и 20!; г) 128; 2) 2^{11} и 2^{21}.

В рассмотренном примере мы встретились с двумя видами правил, по которым могут быть построены последовательности: в пункте а) каждый ***член последовательности*** определяется, исходя из предыдущего, а в пункте б) он определяется, исходя из своего порядкового номера. В пунктах в) и г) предъявлены последовательности, которые можно задать как тем, так и другим способом.

Понятно, что последовательность пункта а) также можно задать, исходя из номера и первого члена, но обсуждать это на данном этапе, скорее всего, преждевременно. При этом, полезно обсудить, что разные правила могут задавать одну и ту же последовательность на более простых примерах.

Пример 1.2. Саша и Маша записали в ряд по 20 чисел. Саша начал с единицы и придумал такое правило: на втором месте – разность между первым числом и числом 3, на третьем –сумма второго числа и числа 5, затем – разность третьего и числа 7, потом сумма четвертого и числа 9, и так далее. Маша поступила проще: записала последовательные натуральные числа от 1 до 20, а затем у каждого четного числа поменяла знак на противоположный. Какие ряды чисел у них получились: разные или одинаковые?

Решение. Непосредственным вычислением можно убедиться, что ряд чисел Саши выглядит так: 1, –2, 3, –4, 5, –6, ..., 19, –20. Очевидно, что у Маши получился такой же ряд.

Ответ: а) одинаковые.

Встречаются последовательности, в которых угадать правило, по которым она построена, и найти недостающие члены, весьма не просто, и помогают в этом не только предыдущие, но и последующие члены.

Пример 1.3. Дана последовательность, в которой пропущено ровно пять чисел: 102; 105; 111; 114; 120; 123; 129; _; _; _; _; _; 201; 204; 210; 213; 219. Вставьте пропущенные числа.

Решение. Для того чтобы восстановить пропущенные числа, необходимо заметить, что каждый член данной последовательности начиная со второго получается в результате сложения предыдущего члена и суммы его цифр: 105 = 102 + 3; 111 = 105 + 6; и так далее. Таким образом, искомые числа: 141 = 129 + 12; 147 = 141 + 6; 159 = 147 + 12; 174 = 159 + 15; 186 = 174 + 12.

Ответ: пропущены числа 141; 147; 159; 174; 186.

Отметим, что, на первый взгляд, существует более простая закономерность: каждое число, стоящее на четном месте, на 3 больше, чем предыдущее число, а каждое число, стоящее на нечетном месте – на 6 больше, чем предыдущее. Эту закономерность использовать не удается: если вставить числа 132, 138, 141, 147 и 150, то следующим числом должно быть 156, а не 201.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.1. Сформулируйте правило, по которому составлена каждая последовательность, найдите следующее число и число, стоящее на десятом месте: а) 3, 6, 9, 12, 15; … ; б) 20, 15, 10, 5, 0, –5, …; в) 1024, 512, 256, 128, 64, ...; г) 10, 8, 11, 9, 12, 10, ...; д) 2, 5, 10, 17, 26 ...; е) , , , , ...; ж) , , , , ...; з) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

1.2. Петя, Вася и Коля записали в ряд по 100 чисел. У Пети пятое число равно 12, и каждое число, начиная со второго, на два больше левого соседа. У Васи первое и третье число равны 4 и 6 соответственно, а каждое число, кроме крайних, вдвое меньше суммы его соседей. А Коля просто записывал периметры прямоугольников шириной в одну клетку: сначала – периметр прямоугольника длиной в одну клетку, потом – длиной в две клетки, и так далее (сторона каждой клетки равна 1). У кого из мальчиков совпали записанные ряды чисел?

1.3. На прямой отметили 100 точек так, что расстояние между любыми соседними точками равно 7.

а) Каково расстояние между крайними точками?

б) Точки пронумеровали по порядку слева направо. Какой номер имеет точка, расстояние от которой до первой равно 77?

в) Координата первой точки равна 10. Найдите координату тридцать первой точки.

г) Координата первой точки 5. Какой номер имеет точка с координатой 110?

1.4. Дана последовательность: 1,5; 1,65; 1,8; 1,95; ... .

а) Укажите закономерность и найдите число, стоящее на сто первом месте.

б) На каком месте в этой последовательности стоит число 6?

1.5. Найдите закономерность в последовательности чисел 111, 213, 141, 516, 171, 819, 202, 122, ... и запишите следующие два числа.

1.6. Найдите закономерность и следующий член последовательности: 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

1.7. Даны две последовательности 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2, 4, ... и 3, 6, 12, 6, 12, ... В них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону. а) Укажите этот закон. б) Найдите все последовательности натуральных чисел, построенные по этому же закону, все члены которых равны между собой. в) Докажите, что если такая последовательность начинается с 2^{1000}, то в ней рано или поздно появится однозначное число.

Ответы и решения

1.1. Ответы: а) каждый число получается из предыдущего прибавлением числа 3 (каждое число равно своему утроенному порядковому номеру); следующее число: 18, а десятое число: 30; б) каждое число получается из предыдущего вычитанием числа 5; следующее число: –10, а десятое число: –30; в) каждое число в два раза меньше предыдущего; следующее число: 32, а десятое число: 1; г) на нечетных местах расположен ряд последовательных натуральных чисел, начиная с числа 10, а на четных местах – ряд последовательных натуральных чисел, начиная с числа 8; следующее число: 13, а десятое число: 12; д) разность между соседними числами с каждым шагом увеличивается на 2, то есть шестое число больше пятого на 11; следующее число: 37, а десятое число: 101; е) используя основное свойство дроби приведем все дроби к знаменателю 12, тогда числители дробей – последовательные натуральные числа, начиная с 2; следующее число: , а десятое число: ; ж) каждое число – это дробь, числителем которой является квадрат его порядкового номера, а знаменателем – степень тройки с показателем, равным номеру; следующее число: = , а десятое число: ; з) каждое число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих; следующее число: 21, а десятое число: 55.

Отметим, что правила составления последовательностей могут быть сформулированы и как-то иначе. Свойства некоторых из них будут подробнее обсуждаться в последующих занятиях.

1.2. Ответ: совпали ряды Пети и Коли.

Решение. Найдем первые четыре числа в Петином ряду. Так как каждое число, начиная со второго, на два больше левого соседа, то четвертое число – это 10, третье – 8, второе – 6, первое – 4. Ряд Васи отличается от Петиного, так как его второе число равно (4 + 6) : 2 = 5. В Колином ряду первое число – это 4, а периметр каждого следующего прямоугольника на 2 больше, чем периметр предыдущего. Значит, его ряд совпадет с Петиным.

1.3. Ответ: а) 693; б) 12; в) 220; г) 16.

Решение. а) Между крайними точками 99 промежутков длины 7, поэтому искомое расстояние равно 7?99 = 693. б) Между этими точками 77 : 7 = 11 промежутков длины 7, поэтому искомый номер равен 1 + 11 = 12. в) Между первой и тридцать первой точкой 30 промежутков длины 7, значит, расстояние между ними равно 7?30 = 210, а искомая координата равна 10 + 210 = 220. г) Расстояние между этими точками равно 110 – 5 = 105, значит, между ними 105 : 7 = 15 промежутков длины 7. Следовательно, искомый номер равен 1 + 15 = 16.

1.4. Ответ: а) 16,5; б) 31.

Решение. а) Каждое число, начиная со второго, больше предыдущего на 0,15. По аналогии с решениями 1.2 а, в получим, что между первым и сто первым числами 100 промежутков длины 0,15. Следовательно, сто первое число равно 1,5 + 0,15?100 = 16,5. б) Расстояние между числами1,5 до 6 равно 6 – 1,5 = 4,5. Значит, между ними 4,5 : 0,15 = 30 промежутков длины 0,15. Следовательно число 6 имеет номер 31. (*Сравните с решениями 1.2 б, г.*)

1.5. Ответ: 232, 425.

Решение. Записаны без пробелов двузначные числа, начиная с 11, после чего каждые три цифры отделены запятыми.

Рис. 1.1

1.6. Ответ: 286.

Решение. Найдем разности соседних членов данной последовательности. Получим новую последовательность: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... Эту же операцию проделаем с полученной последовательностью: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... В этой последовательности следующее число – это 11. Тогда следующий член исходной последовательности восстанавливается «обратным ходом»: 11 ? 66 ? 286.

Отметим, что: 1) заданная последовательность чисел представляет собой суммы чисел в диагоналях таблицы умножения (см. рис. 1.1); 2) последовательность 1, 3, 6, 10, ..., полученная после первой операции, называется последовательностью треугольных чисел (подробнее – см. занятие 8).

1.7. Ответ: б) 18, 18, ...

Решение. а) Каждый член последовательности равен удвоенной сумме цифр предыдущего. б) Очевидно, что однозначное число не может подчиняться описанному закону. Также заметим, что такому закону не может подчиняться число, в котором больше двух знаков, так как уже для трехзначного числа удвоенная сумма цифр не превосходит 54. Следовательно, повторяющимся членом искомой последовательности может быть только двузначное число . Тогда $10a + b = 2(a + b)$, то есть $8a = b$, откуда $a = 1$; $b = 8$. в) Заметим, что в этом случае каждый член последовательности меньше предыдущего. Кроме того, среди ее членов не может быть числа 18, так как ни один из ее членов не делится на 3. Действительно, 2^{1000} не делится на 3, поэтому на 3 не делится сумма его цифр, тогда и сумма цифр получившегося числа не делится на 3, и так далее.

Можно также использовать задачи Д1 – Д5

Приложение

Краткие сведения о прогрессиях

Арифметическая прогрессияГеометрическая прогрессияОпределение (*рекуррентное задание***) и его следствия*****$\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, если ?d | ?n?N $a_{n+1} = a_n + d$.***

1) *d* – разность прогрессии; $d = a_{n+1} – a_n$.

2) возрастающая ? *d* > 0; постоянная ? *d* = 0; убывающая ? *d* < 0.***$\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия, если b_1 ? 0 и ?q ? 0 | ?n?N $b_{n+1} = b_n$?q.***

1) *q* – знаменатель прогрессии; .

2) возрастающая ? b_1 > 0; *q* > 1 или b_1 < 0; 0 < q < 1; постоянная ? *q* = 1; убывающая ? b_1 > 0; 0 < *q* < 1 или b_1 < 0; *q* > 1.**Характеристическое свойство*****$\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия ? ?n ? 2 .$\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия ? ?n ? 2 $b_n^2 = b_{n-1}$?b_{n+1}.***

Формула *n*-го члена и ее следствие *$a_n = a_1 + (n – 1)d$*; , *m* ? *k*.***$b_n = b_1$?q^{n-1}***; .**Распознавание прогрессии по формуле функции от *n****Линейная функция: $a_n = dn + b$, где n?N, {d, b}?R; d – разность прогрессии***.***Показательная функция: b_n = a?q^{dn+b}, где n?N, {a; q; d; b}?R, a ? 0, q ? 0; q^d – знаменатель прогрессии***.***Характеристическое свойство членов, равноотстоящих от концовm + k = n + 1, где {m, k, n} ? N ? $a_m + a_k = a_1 + a_n$.m + k = n + 1, где {m, k, n} ? N ? b_m?b_k = b_1?b_n***.

Свойство «сдвига» суммы первых членов***?k?N S_n?+ nkd = $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+n}$.?k?N S_n?q^k = $b_{k+1} + b_{k+2} + ... + b_{k+n}$***.**Формулы суммы первых *n* членов**1) . 2) .Если *q* = 1, то ***S_n?= nb_1***.

Если *q* ? 1, то 1) ;2) .

Авторы задач

Большинство использованных в книжке задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Эти задачи вошли в некоторые многие учебные пособия, книжки и статьи (см. список использованной литературы), поэтому их часто публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, в тех случаях, когда они известны (в случаях, когда автор не один, его соавторы указаны в скобках).

Н. Агаханов Д37, Д43
А. Анджанс Д81
Е. Бакаев Д47
А. Берзиньш 10.6
С. Берлов Д42, Д48
А. Блинков Пример 1.2, 4.7а, Д23
Д. Ботин 1.7, Пример 3.2
С. Волченков 11.5
Г. Гальперин Пример 6.3
С. Гашков 4.5
А. Голованов Д80
Г. Жуков Д58
А. Заславский Д29, Д74
С. Иванов 10.7
Д. Калинин 3.6б, Пример 4.3, Д3
Т. Караваева Д32 (Б. Френкин)
П. Кожевников 6.4, Д75
Е. Козлова Д13
С. Костин 10.3
К. Кохась Д77
Д. Креков Д35
М. Мурашкин Д72
А. Подобедов Пример 1.3, 1.5
В. Произволов Д30, Д70
И. Рыбников 11.2
В. Сендеров 4.3, Пример 7.1 (А. Спивак)
И. Сергеев Д82
М. Скопенков 6.1
А. Спивак Пример 7.1 (В. Сендеров)
С. Токарев Д17, Д65
А. Толпыго Пример 7.3, Д84
Б. Френкин Д4 (по мотивам Дж. Конвея), Д32 (Т. Караваева), Д38, Д79
А. Храбров 11.4
А. Шаповалов 1.2, 1.3, 3.4, 3.5, 3.7, 4.6, 4.7б, 5.6, 6.6, 6.7, Пример 7.2, 7.6, 9.7, Пример 10.3, Пример 11.3, Д9, Д11, Д12, Д14, Д15, Д16, Д25, Д33, Д39
А. Штерн Д59
K. Gauss Д22а
J. Lagarias, E. Rains, N. Sloane Д71
G. Todd **Д22б**

Литература и веб-ресурсы

1. Н.Х. Агаханов и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993 – 2009. Окружной и финальный этапы. – М.: МЦНМО, 2010
2. Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. – М.: МЦНМО, 2002
3. И.В. Артамкин, А.Л. Городенцев, А.Г. Кулаков, М.А. Прохоров, С.М. Хорошкин, А.В. Хохлов. Числа и суммы. Журнал «Математическое образование», ?2-3 (9-10), апрель – сентябрь 1999
4. А. Белов, М. Сапир. «И возвращается ветер ...», или периодичность в математике. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», ?4/1990
5. А.Д. Бендукидзе. Фигурные числа. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», ?6/1974
6. А.Д. Блинков. Вычисление некоторых конечных сумм. Научно-практический журнал «Математика для школьников», ?4/2008
7. Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом. Заочные математические олимпиады. – М.: «Наука», 1987
8. Н.Я. Виленкин и др. За страницами учебника математики. Кн. Для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1996
9. Н.Н. Воробьев. Числа Фибоначчи (Популярные лекции по математике. Выпуск 6). – М.: «Наука», 1978
10. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: «Просвещение», 1992
11. Г.А. Гальперин, А.К. Толпыго. Московские математические олимпиады. – М.: «Просвещение», 1986
12. Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.:, «Наука», 1974.
13. Р.И. Довбыш и др. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных примеров и задач с решениями. – Донецк: ООО ПКФ «БАО, 2005
14. А.В. Жуков, П.И. Самовол, М.В. Аппельбаум. Элегантная математика. – М.: URSS, 2005
15. А.П. Карп. Алгебра. Сборник задач для 8 – 9 классов средней школы. – С-Пб.: СМИО ПРЕСС, 2000
16. Д.В. Клименченко. Задачи по математике для любознательных. Книга для учащихся 5 – 6 классов средней школы. – М.: «Просвещение», 1992
17. Математические турниры имени А.П. Савина / Сост. А.В. Спивак. – М.: Бюро Квантум, 2006 (Библиотечка «Квант», выпуск 93)
18. Материалы Санкт-Петербургских олимпиад школьников по математике (1999, 2000,2012 гг.)
19. Л.Э. Медников, А.В. Шаповалов. Турнир городов: математика в задачах. – М.: МЦНМО, 2012
20. Московские математические регаты. Ч. 1, 2 / Сост. А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2014
21. Л.Ф. Пичугин. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7 – 9 классов средней школы. – М.: «Просвещение», 1990
22. В.В. Произволов. Задачи на вырост. – М.: Бюро Квантум, 2003
23. Д.Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – М.:, «Наука», 1990
24. В.А. Уфнаровский. Математический аквариум. – М.: МЦНМО, 2010
25. Д.В. Фомин. Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994
26. А.В. Шаповалов, Л.Э. Медников. Как готовиться к математическим боям. 400 задач турниров имени А.П. Савина. – М.: МЦНМО, 2014
27. Шесть фестивалей. Материалы Российских фестивалей юных математиков. Краснодар. 1996

28. LXXVIII Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. – М.: МЦНМО, 2015
29. http://olympiads.mccme.ru/regata – Математические регаты