Предисловие

⟨Эти задачи⟩ можно решить и без компьютера, но с его помощью сделать это будет быстрее, поскольку всегда проще доказывать факт, в справедливости которого ты уверен.

О.А.Иванов. Элементарная математика.

Раньше самого доказательства надо обладать истиною, справедливость которой предстоит доказывать; обладание же этой истиной достигается при помощи всевозможных приёмов наглядного характера... Когда уже наиболее пытливые ученики начинают обращать внимание на постоянство этого свойства, начинают спрашивать: «Почему это всегда так бывает?», тогда лишь на вопрос «почему» ответом является доказательство.

П.А.Карасёв. Геометрия на подвижных моделях. 1924

Экспериментальная математика. Есть подход к решению задач по математике, который можно назвать экспериментальным. Он состоит в том, что решающий рассматривает частные случаи предложенной конструкции, пытается угадать стоящую за ними закономерность, а потом доказать её в общем виде (подробнее см. [13, 20]). В арифметике, алгебре и комбинаторике это естественно делать с помощью перечней, графиков и таблиц [12]. В геометрии раньше это было возможно с помощью рисования нескольких чертежей или рассмотрения специальных случаев — правильный треугольник вместо произвольного и т. д. (см. также [9, 14]). В последние десятилетия появилось новая возможность: в программах динамической геометрии мы можем нарисовать *всего один* подвижный чертёж, а потом движением мыши получить из него целую серию «обычных» статических чертежей [8]! Тем самым мы легко получаем серию частных случаев, а также видим все возможные варианты конфигурации (остроугольный/тупоугольный треугольник, выпуклый/невыпуклый четырёхугольник/самопересекающаяся ломаная и т. д.), часть из которых легко потерять при статическом рассмотрении.

Роль программ динамической геометрии при решении задач по геометрии можно сравнить с ролью экспериментальной установки в физической лаборатории: с их помощью *школьник может взаимодействовать с предметом напрямую*, без посредства учителя или учебника. Он легко может сам подмечать закономерности, ставить вопросы, выдвигать и проверять гипотезы.

В 1—6 классах школьники получают опыт экспериментального подхода к математике (рассуждение на примерах, обобщение наблюдений).

При изучении геометрии начиная с 7 класса ведущим становится теоретический подход (введение аксиом, определений и доказательство теорем). Однако *продуктивнее не конфликтовать с прежним опытом, а использовать его*, т. е. продолжать развивать и экспериментальные навыки наряду с теоретическими [19].

Благодаря программам динамической геометрии роль математического эксперимента при изучении геометрии может значительно возрасти. В России многие учителя и деятели олимпиадного движения уже активно пользуются такими программами, но они ещё недостаточно проникли в школьную среду, часто используются лишь для иллюстрирования фактов и т. д.

Цель этой книги — помочь учителям ввести экспериментальный подход в геометрии, дать им набор подходящих для этого задач и приёмов исследования.

О подходящих задачах. «Задачи, при решении которых можно и полезно использовать компьютер, должны иметь другую структуру; соответственно, необходимо составлять новые подборки задач и разрабатывать новые методики обучения... При правильном подходе к методике его использования компьютер помогает сделать процесс обучения более интенсивным» [7].

Подходящими я здесь называю задачи, удовлетворяющие двум условиям:

а) они задают подвижный чертёж, который легко построить и по которому нетрудно выдвинуть гипотезу;

б) их трудно решить без подвижного чертежа.

Такими качествами обладают многие традиционные задачи по геометрии, данные в *открытой формулировке* [16, 17], т. е. без готового утверждения (нахождение доказываемого утверждения является в этом случае частью задачи). Здесь это и задачи на экстремум (занятия 4 и 7), и задачи на ГМТ (занятия 2 и 5), и задачи на инвариант (занятие 6).

Но широкий инструментарий программ (о нём чуть ниже) позволяет добавлять и новые типы заданий, например:

— построить подвижный чертёж, задаваемый условием задачи (все главы);

— построить семейство линий и/или их огибающую (задачи 2.1 б), 5.1 б), 5.2, 5.4 б), 5.5, 5.7, Д41—Д44);

— построить, задать в условии или использовать в решении линию, не являющуюся прямой, окружностью или их частью (задачи 5.1, 5.4 а), 5.6, Д20 б), Д22, Д23, Д40 в), г), Д41, Д44, а также потенциально многие задачи занятия 3);

— найти несколько инвариантов или взаимосвязей в подвижной конструкции (задачи 6.3, 6.4, 8.1, Д49, Д53);

— выбрать подходящие случаи в заданном семействе и изучить их (задачи 5.6, 6.5, 6.7, занятия 4 и 7).

Такие задачи могут быть весьма содержательными, а их решение развивающим, но без инструментария программ динамической геометрии они были почти недоступны рядовому школьнику. Теперь они постепенно проникают в обучение геометрии.

Когда опытный математик рисует на бумаге чертёж, он воспринимает его динамически — вместе с его поведением. Научить этому навыку школьника и помогает работа с новыми типами задач в программах динамической геометрии.

Этапы решения. Полный цикл решения задачи в этой книге выглядит так.

А. Прочитать условие.

Б. Построить подвижный чертёж.

В. Провести эксперимент.

Г. Выдвинуть гипотезу.

Д. Подкрепить её (или опровергнуть и начать искать новую гипотезу).

Е. Доказать гипотезу.

Занятия 1—3 соответствуют раннему этапу изучения геометрии, поэтому в них задачи ограничиваются конструктивным уровнем и «инструментальной» проверкой. Точнее, в занятии 1 решение ограничивается этапами А—В (в роли эксперимента выступает проверка чертежа), а в занятиях 2 и 3 — этапами А—Д (при этом гипотеза в занятии 3 выдвигается не в словесной формулировке, а в виде построения, а подкрепление происходит при проверке того, что построенная линия совпадает со следом).

Начиная с занятия 4 в задачах требуется полный цикл решения с доказательствами (кроме задач, помеченных *). Соответственно, в занятиях 4—8 у каждой задачи есть две части решения. Первая часть называется *экспериментом*, она охватывает этапы А—Д — описывается построение подвижного чертежа, выдвигается и подкрепляется гипотеза, высказываются разные неформальные соображения. Вторая часть называется собственно *решением*, она соответствует этапу Е, т. е. решению задачи в классическом смысле.

Выдвижение и подкрепление гипотезы — ключевые этапы, остановимся на них подробнее. Гипотезы обычно выдвигают на основании *непосредственных наблюдений* (вам показалось, что точка C — середина отрезка AB). Здесь важно сделать чертёж хорошо «читаемым». Первый шаг подкрепления — *выполнить более точное измерение/построение* (вы измеряете и сравниваете отрезки AC и CB или строите середину отрезка AB). Второй шаг подкрепления — *охватить большее число случаев* (вы варьируете отрезок AB, а точка C по-прежнему остаётся его серединой).

Зачем нужно подкреплять гипотезы? Во-первых, чтобы сразу забраковать неверную гипотезу и не тратить время на попытки её доказать. Во-вторых, качественная проверка гипотезы часто приводит к идее решения (дополнительным построениям, обнаружению важных случаев, уточнению гипотезы и т. д.). Наконец, сам приобретаемый навык подкрепления гипотезы очень полезен[1].

Отметим, что в программах международного бакалавриата по математике предусмотрен специальный вид деятельности — Investigating patterns (поиск закономерностей). Работа с математическими фактами там описывается тремя глаголами:

— verify (проверить частный случай);

— justify (≈ обосновать, подтвердить);

— prove (доказать).

Наше подкрепление гипотез примерно соответствует стадии justify.

Команды/инструменты и заготовки. Широко распространён подход, при котором школьники проводят эксперименты на выданных им заготовках. В этой книге подход другой — *школьники сами строят подвижный чертёж по условию задачи*.

В задачах на построение циркулем и линейкой разрешается использовать лишь те построения, которые мы предварительно сконструировали из элементарных (см., например, [3], так же устроена программа «Евклидия» [web4]). Эта традиция соответствует аксиоматическому построению курса геометрии, при котором можно ссылаться только на доказанные теоремы. В этой книге для построения подвижных чертежей *разрешается пользоваться всеми доступными командами/инструментами программ динамической геометрии*, в том числе и несводимыми к построениям циркулем и линейкой (например, можно выполнить трисекцию угла или построить правильный семиугольник). Это соответствует «инженерному» подходу, при котором способы построения являются лишь средством, ускоряющим продвижение к цели — изучению свойств подвижного чертежа.

План курса. Задачи сгруппированы по главам, в каждой из которых развиваются особые экспериментальные навыки и почти в каждой вводятся новые команды/инструменты программ.

[1]Заметим, что на олимпиадах по информатике проверка алгоритмов, предложенных школьниками, не является математической в строгом смысле этого слова. Вместо этого алгоритмы тестируют на разнообразном массиве входных данных. Это похоже на подкрепление гипотез, предлагаемое в данной книге.

Подробности показаны в таблице.

Экспериментальным навыкам, как и всяким другим, надо учить от простого к сложному. Поэтому степень открытости задания, включённости ученика в создание материала увеличивается от первого занятия к восьмому (см. пятый столбец таблицы).

Из таблицы также видно, что занятия не очень «плотно» привязаны к конкретным темам курса геометрии (см. третий столбец). Это не только недостаток, но и достоинство. Во-первых, школьникам полезно иногда встречаться на одном занятии с несколькими темами — ведь на олимпиадах и экзаменах им приходится это делать. Во-вторых, на каждом занятии вполне допустимы одна-две задачи «на вырост», в которых школьник может построить подвижный чертёж и сформулировать гипотезу, но ещё не имеет средств её доказать. *Такие задачи помечаются знаком* *. К ним полезно возвращаться позже, опираясь на выдвинутые гипотезы. Это даёт учителю возможность манёвра, особенно если на кружок приходят ученики из разных классов с разной программой.

Организация занятий. Каждое занятие рассчитано на 90 минут. Занятия удобно проводить в компьютерном классе. Первые 10—20 минут компьютеры выключены, но включен проектор и учитель демонстрирует на экране эксперимент и решение «задач для разбора». Параллельно он показывает нужные команды/инструменты программы. Далее школьники получают листочки с задачами для самостоятельного решения и решают их за компьютерами, а учитель принимает задачи, подсказывает тем, кто попал в тупик. Школьник может за каждую задачу получить два «плюса» — за эксперимент и за решение. Если школьник ошибся в решении, учитель указывает ему на ошибку или пробел в рассуждениях. А если школьник выдвигает неверную гипотезу, то учитель советует найти опровергающую её конфигурацию. Опровержение гипотезы, полученное учеником самостоятельно, особенно ценно.

В конце занятия полезно подвести итог и обсудить решения одной-двух задач, вызвавших сложности. Можно про-

Номер и тема главы	Классы	Геометрическое содержание	Новые команды / инструменты программ	Новые экспериментальные навыки
1. Строим подвижные чертежи	7	«Геометрические конструктивы» — как с помощью данного набора инструментов построить требуемый подвижный чертёж	Понятия предка и потомка. Основные построения	Построить подвижный чертёж, проверить его, выделить фиксированные и подвижные элементы
2. Строим траектории точек и линий	7	«Геометрические конструктивы», выражение новых элементов через фиксированные	След точки и линии	Построить траекторию точки, выдвинуть гипотезу о её виде, подкрепить гипотезу построениями
3. Метод освобождения точки	7—8	«Геометрические конструктивы», пропедевтика преобразований плоскости		Освободить точку, построить её траекторию, сделать прикидку, эскиз, выдвинуть гипотезу о траектории
4. Измерения на чертеже. Минимумы и максимумы-1	8	Неравенство треугольника, перпендикуляр короче наклонной, средняя линия трапеции, площадь треугольника	Измерение длин, арифметические действия с длинами	Выбрать подходящий чертёж в серии, найти особенности, выделяющие его среди других. Подкрепить гипотезу измерениями и построениями
5. Оживляем траектории	8—9	Параллелограмм, средняя линия треугольника и трапеции, вписанный угол, гомотетия*	Оживление следа точки и линии	Построить траекторию подвижной точки или линии, найти огибающую. Подкрепить гипотезу рассмотрением многих случаев
6. Ищем взаимосвязи и инварианты	8—9	Равенство и подобие треугольников, четырёхугольники, средние линии, вписанный угол, теорема о медианах, гомотетия		Найти общее свойство серии чертежей, выделить нужный случай или множество случаев
7. Минимумы и максимумы-2	9	Движения плоскости, вписанные углы, обобщённая теорема синусов, метод координат	Преобразования плоскости, визуализация переменных величин	Построить найденную конфигурацию, прийти к доказательству
8. Открытые задачи. Конференция	9	Движения и гомотетия, теорема косинусов, векторы, средние линии, счёт углов		Найти несколько общих свойств серии чертежей, взаимосвязи между конструкциями

демонстрировать на экране интересный чертёж или оригинальное решение, возникшее по ходу занятия.

Иногда в группе встречаются один-два школьника (как правило, очень сильные), которые не любят проводить эксперименты, а хотят сразу доказывать «на бумаге». Можно дать им индивидуально более сложные задачи (например, из списка дополнительных задач), которые без подвижных чертежей им будет трудно осилить.

Чтобы школьники не забывали программу динамической геометрии в течение долгого перерыва между посвящёнными ей занятиями кружка, полезно раз в месяц давать на дом отдельные задачи для решения в этой программе. Построенные дома электронные чертежи школьники могут отправлять учителю или загружать в общее интернет-пространство, где все смогут их видеть и комментировать. Это хорошо вписывается в модное направление «смешанного обучения».

Программы. Сейчас в России популярны три программы динамической геометрии: «Геогебра» [web1], «Живая математика» [web2] и «Математический конструктор» [web3]. *Приведённые здесь наборы задач можно решать в любой из трёх программ.* В конце книги приведён словарик основных команд и инструментов для всех трёх программ.

Готовые подвижные чертежи и постановки задач. Традиционно в геометрии используются готовые (статические) чертежи, в том числе для постановки задач без слов [1, 11] или для доказательств типа «смотри». Чертежи позволяют экономить время, запоминать и активизируют визуальное восприятие. Подвижные чертежи дают и другие возможности, например, позволяют наглядно демонстрировать процессы, используют тактильное восприятие.

В некоторых задачах (1.1, 2.2, 5.4, 6.1, 7.2, 8.3 — они *помечены в тексте буквой «ч» после номера*) можно вместо текстового условия дать ученикам готовый подвижный чертёж, что позволит разнообразить занятие и научит школьников самостоятельно формулировать задачи.

Благодарности. При написании книги автор многократно прибегал к помощи С. А. Беляева, В. Н. Дубровского, К. А. Кнопа, Г. А. Мерзона и Д. Э. Шноля. Т. Н. Ильичёва и

Н. М. Нетрусова провели несколько занятий по главам книги. А. А. Гаража, А. А. Деева, В. А. Иевлева и Е. А. Коноваленко вычитали текст. Е. В. Бакаев, В. М. Бусев, М. А. Волчкевич, А. А. Заславский, А. В. Пантуев и Ю. Н. Торхов дали ценные советы. Традиционная большая благодарность — редакторам серии А. Д. Блинкову и А. В. Шаповалову.

Поддержка курса. По ссылке ggbm.at/qHxfNbxr можно найти электронное приложение к книге — подборку подвижных чертежей (в «Геогебре») ко всем задачам глав 1—8. Также для поддержки курса создана группа в «Геогебре» — там публикуются подвижные чертежи, новые задачи, обсуждаются построения и решения, можно задать вопросы, предложить свои материалы и т. д. Чтобы войти в группу, надо зарегистрироваться на geogebra.org, пройти по ссылке geogebra.org/groups и ввести код TEJ9P.

На рисунках к экспериментам *все подвижные точки изображены «пустыми», все фиксированные точки — закрашенными*.

Занятие 1
Строим подвижные чертежи

Подвижные чертежи — мощный инструмент для решения геометрических задач. Однако построение правильного подвижного чертежа к задаче часто само по себе оказывается интересной геометрической задачей! На этом занятии мы будем учиться строить различные подвижные чертежи, а использовать их начнём со следующего занятия.

Откуда берётся подвижность чертежа? Дело в том, что в каждой задаче этого занятия условия задают не одну фигуру, а целое семейство фигур. В фигуре есть фиксированные элементы и подвижные элементы (точки, отрезки, прямые, окружности и т. д.). Решением задачи считается правильный подвижный чертёж. Проверка чертежа осуществляется так.

1. *При перемещении подвижного элемента фиксированные элементы должны оставаться на месте.*

2. *При перемещении подвижного элемента можно получить последовательно всё семейство фигур, удовлетворяющих условиям задачи.*

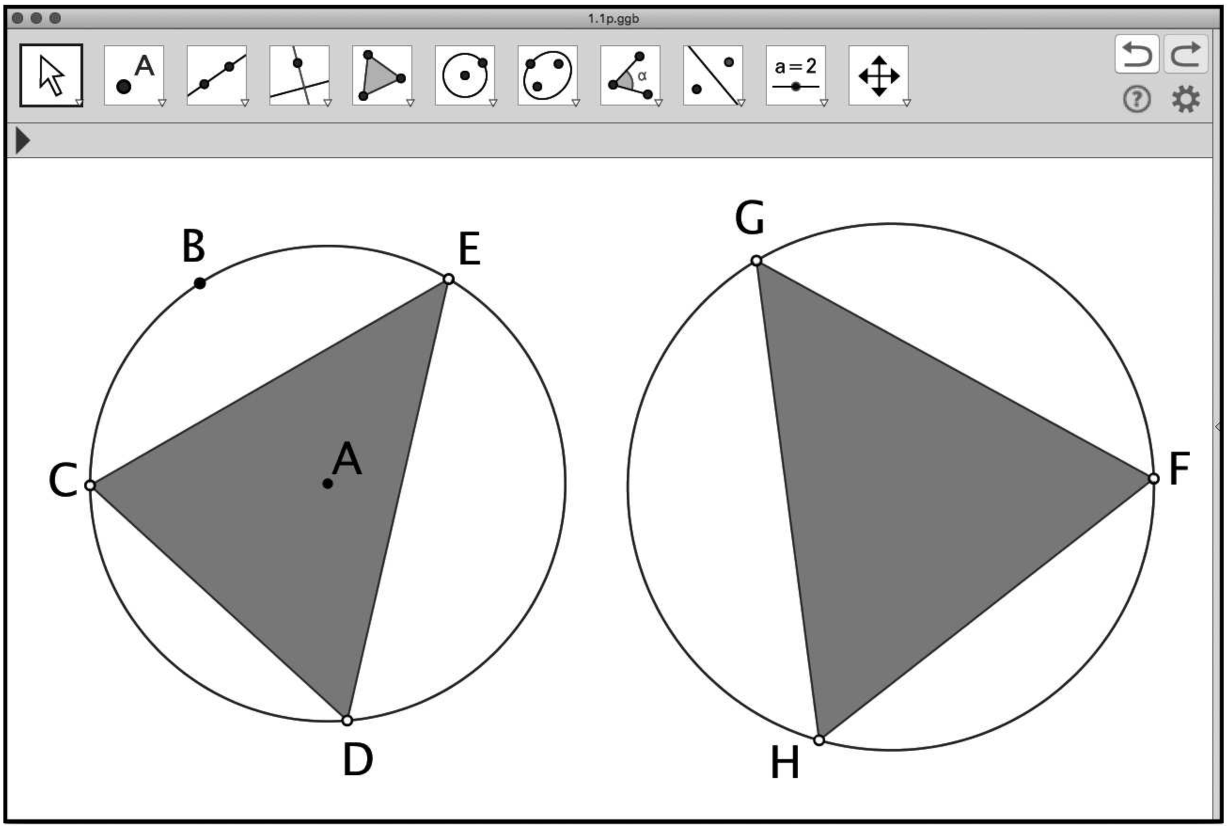
1 (ч). а) Постройте треугольник, вершины которого лежат на фиксированной окружности.

б) Проведите окружность через три вершины фиксированного треугольника.

Построение. а) Проведём окружность с центром A, проходящую через точку B, построим на ней три точки C, D, E, отметим треугольник с вершинами C, D, E.

б) Построим треугольник FGH, проведём окружность через три его вершины.

Проверка. Статические чертежи к этим задачам выглядят одинаково, однако подвижные чертежи ведут себя совершенно по-разному! Если пошевелить вершины треугольника, то в задаче а) они будут «бегать» по непо-



движной окружности, а в задаче б) будут двигаться как угодно, изменяя при этом саму окружность. В задаче а) надо зафиксировать окружность, для чего мы строим сначала её, а потом уже треугольник. В этом случае говорят, что окружность является *предком*, а треугольник — её *потомком*. В задаче б), наоборот, надо зафиксировать треугольник. Для этого мы сначала строим треугольник, а потом проводим окружность. В этом случае треугольник является *предком*, а окружность — его *потомком*.

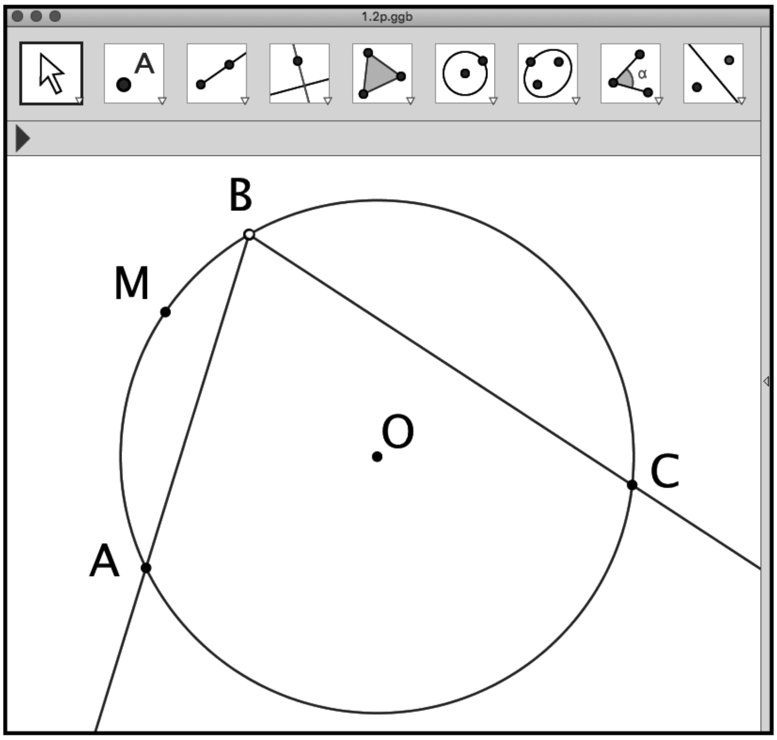
Замечание. Возможен такой порядок решения этой задачи: сначала учитель демонстрирует школьникам два готовых чертежа и показывает разницу их поведения, «шевеля» вершины треугольников. Потом учитель вводит иерархию «предки-потомки» и вместе со школьниками строит аналогичные чертежи.

2. В фиксированную окружность впишите угол, опирающийся на фиксированную дугу (это значит, что точки пересечения сторон угла с окружностью фиксированы, а вершина угла «бегает» по окружности).

Первое неверное «построение». Строят окружность по центру O и точке M, затем выбирают точку M в качестве вершины угла. Тогда точка M будет двигаться вместе со всей окружностью. Дело в том, что точка M определяет саму окружность, поскольку является для неё предком.

Второе неверное «построение». Строят окружность по центру O и точке M, затем отмечают на окружности точку B и проводят из неё два луча BA и BC, причём точки A и C отмечают не на окружности. Тогда при движении точки B по окружности неподвижными остаются точки A и C, а точки пересечения лучей с окружностью движутся. Дело в том, что точки A и C являются предками лучей, поэтому именно они остаются неподвижными на лучах.

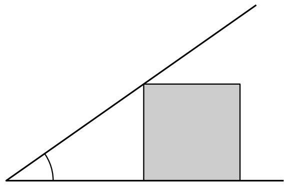
Построение. Сначала построим окружность по центру O и точке M, лежащей на окружности, *затем* отметим *на окружности* три новые точки A, B, C. Проведём лучи BA и BC.



Проверка. Будем двигать точку B. Она движется по окружности, окружность фиксирована, точки A и C тоже.

Замечание. Здесь хитрость состоит в том, что все три точки A, B, C надо отмечать на уже готовой окружности, тогда они будут потомками для окружности.

3. Зафиксирован острый угол. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — внутри угла. Сколько может быть таких квадратов?



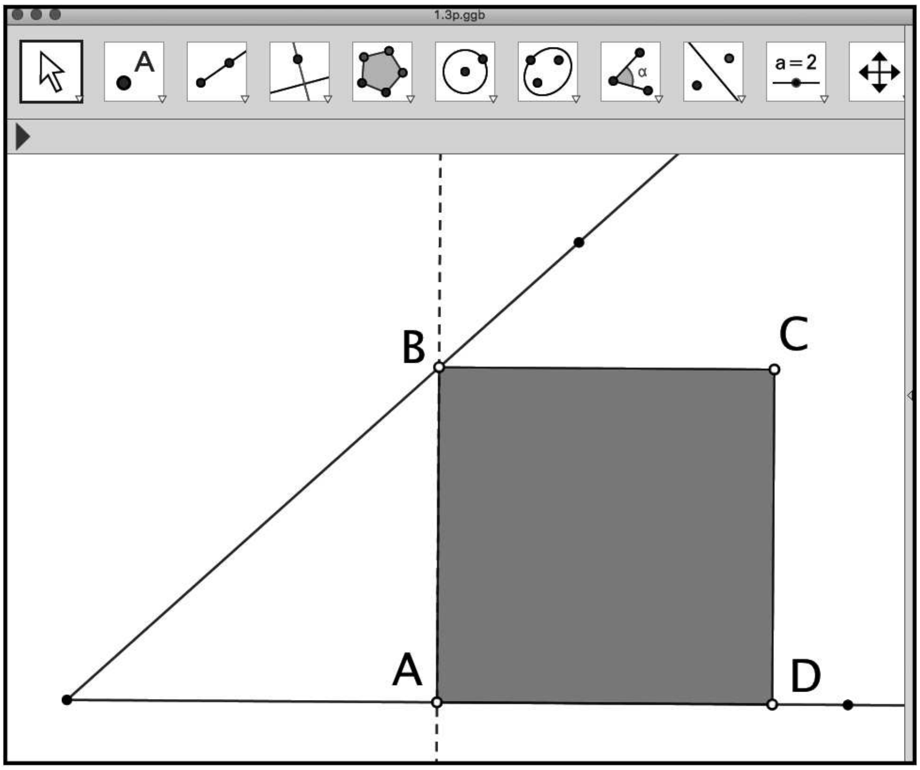
Построение. Построим угол (два луча с общей вершиной). Выберем на стороне угла точку A, восстановим из неё перпендикулярную прямую к этой стороне угла, на пересечении прямой с другой стороной угла отметим точку B. Дальше возможны варианты.

Вариант 1. Из точки B проведём прямую, перпендикулярную AB, и на ней внутри угла отложим отрезок BC, равный BA. Для этого проведём окружность с центром B, проходящую через точку A, и на пересечении с прямой отметим точку C. После этого скроем окружность, чтобы не загромождать чертёж (если мы *скрываем* объект, то его потомки продолжают отображаться, а если *удаляем*, то все потомки исчезают вместе с ним). Через точку C проведём прямую, параллельную BA, на пересечении с первой стороной угла отметим точку D. Отметим $ABCD$ как многоугольник и скроем вспомогательные прямые, чтобы чертёж хорошо «читался». (Для удобства проверки иногда лучше не скрывать вспомогательные объекты, а отмечать их пунктиром, бледным цветом и т. д. В случае необходимости можно показать все скрытые объекты.)

Вариант 2. Воспользуемся готовым инструментом и на отрезке BA построим квадрат.

Проверка. Перемещая точку A по стороне угла, будем для каждого её положения получать свой квадрат.

Замечание. Что будет, если потянуть чертёж за точку-потомка (например, B, C или D)? В «Геогебре» ничего не изменится. В «Живой математике» и «Математическом конструкторе» весь чертёж сдвинется как целое, не «деформируясь». Мы будем считать, что чертёж в любой программе не зависит от потомков. Очевидно, *фиксированные элементы надо строить раньше, чем подвижные, которые от них зависят.*

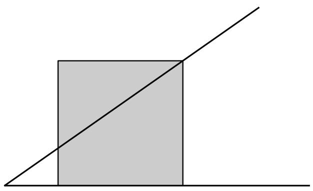


Задачи для самостоятельного решения

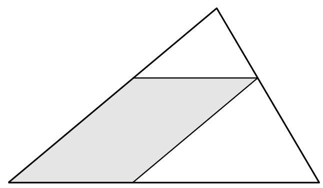
Ученики выполняют подвижные чертежи на компьютере, учитель принимает их. Способ проверки чертежа учителем изложен в специальном разделе каждой задачи. Полезно при проверке демонстрировать удобства качественного оформления чертежа («эту линию скроем, а эту выделим другим цветом — теперь легко видна ошибка»).

Указания школьникам. Чертёж должен хорошо читаться — используйте разные цвета, толщину линий, скрывайте вспомогательные линии. Буквы на чертеже должны быть такими же, как в условии.

4. Зафиксирован угол меньше 45 градусов. Постройте квадрат, у которого две смежные вершины лежат на одной стороне угла, третья вершина лежит на другой стороне угла, а четвёртая вершина — *вне угла*. Сколько может быть таких квадратов?

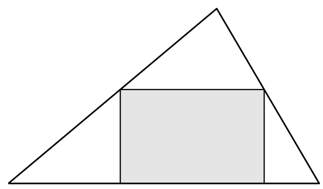


5. *Параллелограммом* называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны. Впишите в фиксированный треугольник ABC параллелограмм так, что одна его вершина совпадает с вершиной A исходного треугольника, а другие три лежат на его сторонах. Сколько может быть таких параллелограммов для данного треугольника?



6. *Хордой* называют отрезок, концы которого лежат на окружности. Постройте две взаимно перпендикулярные хорды фиксированной окружности, проходящие через фиксированную точку внутри окружности (не совпадающую с центром).

7. Впишите в фиксированный остроугольный треугольник ABC прямоугольник так, чтобы одна сторона прямоугольника лежала на отрезке AB, а две оставшиеся вершины — на отрезках AC и BC.

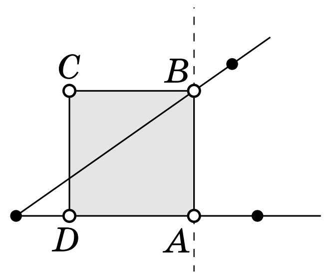


8. Постройте квадрат с фиксированным центром.

9*. Постройте правильный (равносторонний) треугольник с фиксированным центром.

Построения

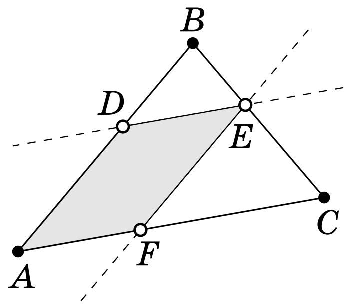
4. Сначала строим фиксированные элементы, в данном случае угол. Выберем на стороне угла точку A, восстановим из неё перпендикулярную прямую к стороне угла, на пересечении прямой с другой стороной угла отметим точку B. Далее можно воспользоваться готовым инструментом и на отрезке AB построить квадрат $ABCD$, а затем скрыть прямую AB.



Проверка. Перемещая точку A по стороне угла, будем для каждого её положения получать свой квадрат. Точки B, C, D не влияют на чертёж.

Замечание. Если при построении квадрата выбрать точки A и B в неправильном порядке, то получим квадрат с четвёртой вершиной внутри угла, как в задаче 3.

5. Начертим треугольник ABC. Отметим на стороне AB точку D, проведём через неё прямую, параллельную стороне AC. На пересечении прямой со стороной BC отметим точку E. Из точки E проведём прямую, параллельную AB, на пересечении со стороной AC отметим точку F. Отметим параллелограмм $ADEF$ как многоугольник и выделим его цветом, отличным от цвета треугольника ABC. Можно также скрыть прямые DE и EF.

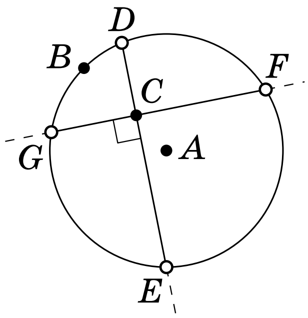


Проверка. Перемещая точку D по стороне, будем для каждого её положения получать свой параллелограмм, вписанный в треугольник. От точек E и F ничего не зависит.

Замечание. Можно в качестве «стартовой» выбирать точку на стороне AC и даже на стороне BC. В последнем случае можно через одну точку провести сразу обе прямые, параллельные сторонам.

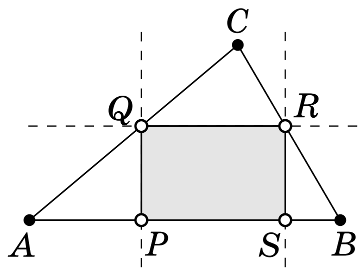
6. Сначала построим окружность (по центру A и точке B, лежащей на окружности), внутри неё отметим точку C.

Затем проведём луч DC с вершиной D на окружности. На втором пересечении его с окружностью отметим точку E. Проведём хорду DE и скроем луч DC. Через точку C проведём прямую, перпендикулярную к DE, она пересечёт окружность в точках F и G. Проведём хорду FG и скроем прямую FG.



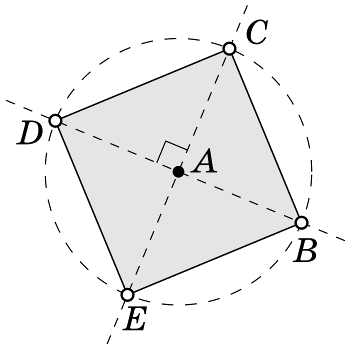
Проверка. При движении точки D по окружности обе хорды вращаются вокруг точки C, не меняя окружности! Точки E, F, G не влияют на чертёж.

7. Построим треугольник ABC с острыми углами A и B. Отметим на стороне AB произвольную точку P, проведём через неё прямую, перпендикулярную к AB. На пересечении прямой со стороной треугольника (пусть это будет сторона AC) отметим точку Q. Проведём через Q прямую, параллельную AB, на пересечении со стороной BC отметим точку R. Из R проведём прямую, перпендикулярную AB, на пересечении с AB поставим точку S. Построим четырёхугольник $PQRS$. Присвоим ему цвет, отличный от цвета треугольника ABC, скроем вспомогательные прямые.



Проверка. При движении точки P по отрезку AB прямоугольник движется, сохраняя прямые углы и оставаясь вписанным в треугольник ABC. При шевелении точек Q, R, S прямоугольник не изменяется.

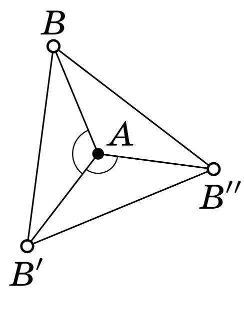
8. Отметим точку A — будущий центр. Инструмент «Квадрат» применить не получится, поскольку он строит квадрат по данной стороне. Воспользуемся тем, что диагонали квадрата пересекаются в его центре под прямым углом. Проведём прямую AB и проведём через точку A перпендикулярную ей прямую. Проведём окружность с центром в точке A, проходящую через точку B. Две прямые пересекут окружность в точках B, C, D, E. Отметим многоугольник с вершинами в этих точках. Это и будет искомый квадрат. Теперь можно сделать пунктирными окружность и прямые AB и AC.



Проверка. При движении точки B меняется размер квадрата, он поворачивается относительно точки A, но точка A остаётся центром.

Замечание. У квадрата есть две «степени свободы» — размер и ориентация. И то и другое должно меняться! Также возможно построение, при котором размер квадрата будет зависеть от одной точки, а угол поворота — от другой.

9*. Отметим точку A — будущий центр. Как и в предыдущей задаче, готового инструмента нет. Воспользуемся тем, что отрезки, соединяющие вершины правильного треугольника с его центром, образуют углы по 120°. Проведём отрезок AB. Повернём его относительно точки A на угол 120°, появится отрезок AB'. Проделаем с отрезком AB' ту же операцию, появится отрезок AB''. Отметим треугольник с вершинами в точках $BB'B''$. Это и будет искомый треугольник.



Литература и веб-ресурсы

Список веб-ресурсов

[web1] `Geogebra.org`
Бесплатная программа с открытой платформой и банком задач, который можно использовать и пополнять.

[web2] `dynamicgeometry.com`
Платная программа The Geometer's SketchPad. Русифицированная версия называется «Живая математика».

[web3] `http://obr.1c.ru/mathkit`
Российская программа динамической математики с хорошей методической базой. Платная, но с бесплатной онлайн-версией (доступны базовые функции). Ожидается новая бесплатная версия.

[web4] `Euclidea.xyz`
Многоуровневая обучающая игра с задачами на построение.

[web5] `zadachi.mccme.ru`
Большой банк задач по геометрии с удобной навигацией.

[web6] `zadachi.mccme.ru/prkr`
Интернет-издание книги [4] с динамическими моделями.

[web7] `http://janka-x.livejournal.com`
Блог учителя математики И. С. Храповицкого с множеством задач и моделей в программах динамической геометрии.

Список литературы

[1] *А. В. Акопян*. Геометрия в картинках. М.: МЦНМО, 2011.

[2] *А. Д. Блинков*. Геометрия в негеометрических задачах. М.: МЦНМО, 2016.

[3] *А. Д. Блинков*, *Ю. А. Блинков*. Геометрические задачи на построение. М.: МЦНМО, 2010.

[4] *Н. Б. Васильев*, *В. Л. Гутенмахер*. Прямые и кривые. М.: МЦНМО, 2004.

[5] *Р. К. Гордин*. Планиметрия. Задачник. М.: МЦНМО, 2004.

[6] *В.Дубровский*. Преобразования плоскости в задачах на построение // Квант. 1987. № 8. С. 40—42. (http://kvant.mccme.ru/1987/08/preobrazovaniya_ploskosti_v_za.htm)

[7] *О.А.Иванов*. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009.

[8] *С.Г.Иванов*, *В.И.Рыжик*. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». М.: Просвещение, 2013.

[9] *П.А.Карасёв*. Геометрия на подвижных моделях: изготовление и применение подвижных моделей геометрических форм (планиметрия). М.: Гос. изд-во, 1924.

[10] *В.В.Прасолов*. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

[11] *Е.М.Рабинович*. Геометрия. 7—9 классы. Задачи и упражнения на готовых чертежах. М.: Илекса, 2007.

[12] *А.И.Сгибнев*. Исследовательские задачи для начинающих. М.: МЦНМО, 2015.

[13] *А.И.Сгибнев*. Экспериментальная математика // Математика. 2007. № 3. С. 2—8.

[14] *Кадзуо Хага*. Оригамика. Геометрические опыты с бумагой. М.: МЦНМО, 2012.

[15] *А.В.Шаповалов*. Математические конструкции: от хижин к дворцам. М.: МЦНМО, 2015.

[16] *Д.Э.Шноль* и др. Система открытых задач по геометрии: 7 класс / Д. Шноль, А. Сгибнев, Н. Нетрусова. М.: Чистые пруды, 2009. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика»; Вып. 28).

[17] *Д.Э.Шноль* и др. Система открытых задач по геометрии: 8 класс / Д. Шноль, А. Сгибнев, Н. Нетрусова. М.: Чистые пруды, 2009. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика»; Вып. 29).

[18] *Д.Э.Шноль*. Исследовательские задачи по математике в российской школе // Проблемы современного математического образования: материалы симпозиума. 2017. С. 113—132.

[19] *А. В. Ястребов*. Исследовательское обучение математике в школе. Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018.

[20] Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М. В. Шабанова, Р. П. Овчинникова, А. В. Ястребов и др. М.: ИД «Академия Естествознания», 2016.

Источники [9, 12, 13, 16—20] *доступны в электронной библиотеке «Математическое образование»* (mathedu.ru).

Оглавление