Индукция без формальностей

(Демо-версия)

А.В.Шаповалов

Серия «Школьные математические кружки»

http://www.ashap.info/Knigi/Matkruzhki/index.html

Введение

Математическая индукция не входит в школьную программу. Однако стоит хоть немного продолжить изучение математики: в матклассе, на кружках, в вузе – индукция тут как тут. Но вот парадокс: из тех, кто изучал её, умеют пользоваться немногие. А.Д.Мышкис, преподававший математику в хороших инженерных вузах, отмечал в [МБП], что «студенты не понимают доказательств по индукции, они в них не верят»! В чем причина? В сложности? Это верно. Но производная и интеграл тоже ведь не простые понятия, однако к.п.д. от их изучения гораздо выше. Недостаточно времени на её преподавание? Но приходилось видеть классы, где отдельно на индукцию отводилось по нескольку часов каждый год с 8 по 11 класс без особого улучшения.

Расширение роли олимпиад вызвало бурный рост сети кружков, классов и летних школ, где к олимпиадам готовят. Возраст учеников снижается, квалифицированных преподавателей катастрофически не хватает. Занятия ведут малоопытные студенты, и темы, уместные для 8-классников, излагаются 6-классникам, а то и 5-классникам. В результате положение с индукцией стало ещё хуже. Малоосмысленные слова про индукционный переход приходится теперь частенько слышать даже от школьников, не умеющих раскрыть скобки в выражении a(b+1). Попытки же указать незадачливому / новоиспечённому / неопытному преподавателю (обозначим его НП) на это несоответствие встречают возражения: а вот эту задача для 6-классников с престижного Энского турнира вон тот шестиклассник Вася решил по индукции. Значит могут, когда захотят?!

Ну, так Вася – талант, он уже и векторы знает, а задача эта и без индукции прекрасно решается. Но НП молод и горяч, энергии в нём – через край. Он искренне уверен, что бросая асфальт формальной индукции на травку скромных знаний юного ученика, он строит в его голове первоклассную автостраду, по которой тот помчится к победам. НП ещё не видел, как через годик ноги школьника будут спотыкаться о комки этого засохшего асфальта. Что делать? Запреты в век интернета НП не остановят... Пришлось вспомнить совет: не можешь предотвратить – возглавь. И я сел писать эту книгу.

Итак, в чем же проблемы преподавания индукции? Сложность не в том, что в ней много составляющих. Хуже то, что достаточно заметная часть этих составляющих преподавателями не осознается.

Первое: суть индукции мало похожа на её форму. НП уверен, что форма и есть суть, и индукция и в самом деле состоит только из базы и перехода. Его восхищает идея: произносишь рассуждение названное «индукционный переход» – и утверждение мгновенно становится верным для *всех* значений n. Но на взгляд ученика это как одним заклинанием из студии зарядить воду у всех телезрителей. Как результат, действия так обученных школьников по сути сводятся к произнесению заклинаний. В стандартных случаях эти заклинания мало отличаются от правильных рассуждений, и НП засчитывает их за правильное решение. В чуть менее стандартных задачах часть нужных слов не произносится, но на ответ это не влияет, поэтому решение засчитывается, но с оговорками и снижением баллов. В мало-мальски нестандартных задачах решение обваливается, и НП выносит вердикт «Ученики тупые, на такие задачи с ними время тратить не стоит».

На деле суть индукции проста: *на высоту легче не запрыгивать и не взлетать, а восходить по ступенькам лестницы.* Обычно лестница едва намечена или её нет, тогда придётся её найти, принести и самому установить, а в сложных случаях и самому построить. Строить можно и нужно как удобнее: снизу вверх, сверху вниз, даже с двух сторон навстречу, и т.п.

Стандартное обучение учит ходить только по готовым лестницам («увидел n – доказывай по индукции») . Поэтому хочется, конечно, научить видеть место для лестницы, видеть ступеньки и прилаживать их друг к другу. Увы, так поставленная цель неконкретна и школьниками не воспринимается.

Формальное введение индукции воспринимается чуть лучше, но уводит от сути (скажем, побуждает использовать только лесенки, построенные снизу вверх). Оно похоже на умение купить билет на метро, проехать, считая остановки, и выйти у школы. Но это мало помогает ученику самому добраться от дома до школы, когда метро закрыто. Хуже того, такое обучение часто создаёт у ученика иллюзию, что именно так управляют поездом и прокладывают тоннель. Чтобы не плодить иллюзий, опытный преподаватель избегает формального введения индукции так долго, как может. Он понимает, что индукционный формализм – это умение ходить строем. Но прежде чем учиться ходить строем, надо научиться просто ходить. Ещё лучше научиться бегать, прыгать и при этом чувствовать себя свободно. Вот этим мы и займёмся.

Говоря прямо: эта книга – *не пособие по обучению индукции* для начинающих. Она не заменяет такие пособия, она всего лишь их предваряет, развивая у учеников необходимые навыки и постепенно внедряя *индуктивное мышление.*

Ниже мы расшифруем, о каких навыках идёт речь. Без многослойной подушки задачной и математической культуры сложное понятие индукции не уложится и не закрепится в голове ученика, как не лягут рельсы на грунт без насыпи. Усвоение навыков требует времени – как по числу занятий (5-10), так и по общей продолжительности (год-два). С другой стороны, эти занятия полезны независимо от того, будет ли в конце усвоена индукция или нет.

Перечислим нужные навыки, пока без привязки к индукции.

1) Строить большие конструкции с использованием повторяющихся элементов и блоков.

2) Находить закономерность в последовательности чисел или объектов.

3) Пошагово, от объекта к объекту, распространять неизменное свойство (инвариант) на некоторое множество объектов.

4) Включать отдельную конструкцию или задачу в серию однотипных, отличающихся лишь значением параметра, исследовать случаи малых значений параметра и переносить замеченные закономерности на случаи больших значений.

5) Следить за развитием процесса с помощью выбора удобного параметра-счётчика, игнорирующего несущественные подробности и предсказуемо меняющегося на каждом шаге; уметь организовывать нужный процесс.

6) Строить конструкции пошагово, составляя её из наглядных добавок и выбирая очередную добавку в зависимости от текущего состояния.

7) Строить конструкцию постепенно, проходя через промежуточные “частичные” конструкции, не являющиеся полноценными меньшими примерами.

8) Находить связь сложного “серийного” объекта с его предшественником, выстраивать конструкции и цепочки доказательств “сверху вниз”, сводя сложное к более простому.

“Ого!” – скажет преподаватель, прочитав список. – “Да тут и за 5 лет не успеть! Неужели всё это нужно? А попроще и покороче нельзя?”

Попроще можно. Пункты сформулированы для преподавателя на серьёзном языке с целью показать, что предварительная подготовка обязана быть основательной. Учеников таким языком мы пугать не будем. Откройте занятия и посмотрите на задачи. Всё это давалось 6- и 7-классникам, а первое занятие даже 5-классникам. Если не грузить школьников приведёнными выше словами про навыки и умения, то задачи они решают бойко и охотно, а навыки приобретают по ходу дела. Особенно, если преподаватель вовлекает их в обсуждения, где ненавязчиво расставляет правильные акценты, и подкидывает подобные задачи в промежутках между занятиями из этой книжки.

Покороче не стоит. Без тех или иных навыков понимание индукции будет неполноценным. Можно, конечно, некоторые навыки усваивать с нуля *вместе* с индукцией, но это создаст ученикам лишние трудности. Ведь легче и индукцию изучать “по индукции”, то есть выстроив сначала лесенку из вспомогательных навыков. Тем более, что предварительно эти навыки достаточно лишь привить, а не усвоить в совершенстве. Пары лет на это заведомо хватит.

Итак, целью этого курса является *неформальное* знакомство с математической индукцией. Каждой строке списка навыков соответствует 1-2 занятия этой книги, кроме пункта 2 (соответствующее занятие можно взять из книги А.Д.Блинкова «Последовательности», см.[Посл]). Внешняя простота может побудить торопливых преподавателей устроить недельный курс или даже попытаться втиснуть все темы в одно-два занятия. Но тогда цель создания культурного слоя не будет достигнута.

Само по себе каждое занятие имеет понятную ученикам ближнюю цель и только знакомит учеников с кругом идей. Для отработки навыков надо будет включать аналогичные задачи в занятия на другие темы. Через месяц-другой идеи занятия станут восприниматься учениками как нечто само собой разумеющееся. Тогда можно переходить к следующему занятию из списка. Слово “индукция” до 8-го занятия упоминать не стоит, иначе школьники, уже “обученные” индукции начнут втискивать свои свободные рассуждения в навязанные индукцией рамки. Пусть лучше индукция до поры до времени остается как дальняя цель за кадром и в голове преподавателя.

В помощь преподавателю в конце каждого занятия есть текст под заголовком “Идеология”. В нем пояснены подробнее как непосредственные цели занятия, так и связи данного занятия с индукцией. Надеюсь, это поможет преподавателю ненавязчиво сориентировать учеников в нужном направлении.

1. Конструкции с повторами

Большие конструкции легче строить из одинаковых деталей. Когда есть выбор, делайте как можно больше деталей одинаковыми. А если детали заданы разными, их удобно объединять в одинаковые блоки. При большом числе деталей контролируйте конструкцию подсчётами. При этом пересчет вида «Один, два, три,...» становится ненадёжным. Привыкайте считать с помощью разумно организованных арифметических операций.

Идеология

Эти задачи сочетают наглядность цели с выработкой умения применять арифметику для переноса результата от наглядных малых конструкций на большие, где наглядная картинка перестает быть целесообразной и даже возможной. В алгоритмических задачах важно научиться вводить короткие и понятные обозначения. Особые шаги в начале и в конце, а также построение в обратном порядке учат видеть конструкцию целиком и строить не по стандарту, а исходя из логики самой конструкции.

Путь к индукции

В данном листке подобраны задачи в основном на *линейные* конструкции, в наибольшей степени похожие на конструкции классических индукционных доказательств. Важно понимать, что в доказательстве по индукции индукционный переход состоит фактически из *большого числа однотипных шагов* (оформленного в простых случаях как единообразный шаг индукции, но нередко распадающийся на случаи). Значит, такое доказательство является на самом деле сложной конструкцией из повторяющихся элементов. Школьника надо учить видеть эти элементы и проверять, что они подходят друг другу.

2. Числовые закономерности

Поиск числовых закономерностей и восстановление последовательностей по нескольким первым членам – очевидная ступенька по направлении к индукции. Такое занятие проводится в более-менее каждом кружке для начинающих. На нём любой кружковец с удовольствием приобщается к арифметичесокой прогрессии, без чего ему в дальнейших занятиях книжки не обойтись.

В частности, ровно таким занятием открывается недавно вышедшая в серии «Школьные математические кружки» замечательная книжка А.Д.Блинкова «Последовательности» (см. [Посл]), и именно это занятие целиком выложено в интернете (см. http://www.ashap.info/Knigi/Matkruzhki/18-Posled.pdf). Повторяться было бы избыточным. Стоит сказать только о связи этой темы с математической индукцией.

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д11-Д14.

Идеология

Числовые последовательности – наиболее простые и наглядные *серии* объектов в школьной программе. Работая с ними, школьник укрепляется в *правильной* мысли, что числа в последовательности идут не как попало, а подчиняются *единой закономерности*, пусть и не всегда простой и очевидной. И хотя формальное определение последовательности допускает любые, сколь угодно хаотичные последовательности, на самом деле в приложениях встречаются только *закономерные* последовательности. Соответственно, поиск и доказательство закономерностей – важная часть математического обучения. Тем более, что серии примеров и конструкций в этой книге задаются числовыми последовательностями параметров.

Путь к индукции

Самое естественное желание при поиске закономерности – сравнить соседние члены последовательности. Поэтому обычно гораздо легче увидеть *рекуррентное соотношение,* чем *явную формулу*. А вот переход от рекуррентного соотношения к явной формуле, каким бы простым он не был (скажем, для арифметической прогрессии) уже является индукционным доказательством. Но хотя традиционно преподавание формальной индукции начинают с доказательства формул для сумм и последовательностей, на занятии для 5 и 6 классов упоминание индукции следует исключить. Важнее сосредоточить внимание на подробном выписывании промежуточных слагаемых или сомножителей, подсчете их количества, их группировке и т.п., чтобы связь между первым и сотым членом осуществлялась не через непонятное заклинание со словом «индукционный переход», а зримым выражением с длинной цепочкой чисел, которое надо честно сосчитать.

3. Разминка на малых

Строить или исследовать конструкцию легче, когда её можно сравнить с похожими (*аналогичными*), но уже знакомыми или хотя бы более простыми конструкциями. Когда пример не одинок, а входит в серию подобных ему, смотрим сначала на самые маленькие примеры в серии. При работе с ними обычно хватает короткого перебора. Два-три малых примера часто подскажут закономерность, которая поможет разобраться и с большими конструкциями. Но не забывайте, что *доказать* закономерность можно только с помощью общего рассуждения. В этом занятии мы ограничимся задачами, где серия задана явно или очевидна.

Идеология

С общей формулой и частными случаями школьники впервые сталкиваются в курсе алгебры. Им приходится усваивать перехода от общего к частному и обратно одновременно с непростыми алгебраическими правилами. Пониманию мешает и то, что частные случаи – это не слишком наглядные арифметическими примеры. Но даже неискушенные в математике школьники охотно и продуктивно рассматривают серию наглядных конструкций и находят закономерности. Идея начинать исследование с маленьких случаев кажется ученикам само собой разумеющейся. Вопрос преподавателя «Для каких значений параметра есть пример?» уже не будет таким казуистическим, каким кажется им вопрос «Для каких значений функция определена?». Правильно подбирая серии примеров, мы научим школьников не делать поспешных обобщений и подкреплять замеченные закономерности рассуждениями, пригодным и для «больших» случаев.

Путь к индукции

По индукции доказывают серию утверждений (кстати, не обязательно бесконечную) с единообразной формулировкой, зависящей от одного или нескольких параметров. Между тем, за общей формулировкой младшие школьники часто не видят серии частных примеров, не умеют подстановкой значений перевести общее утверждение в частное. Ещё больше учеников делает это формально. Понятно, что если школьник формально доказал «по индукции», что некоторое утверждение верно для всех $n>2$, но не может привести контрпример для $n=1$, ценность такого доказательства близка к нулю.
Немаловажно и то, что разбор «малых» случаев тренирует поиск базы индукции.

4. Инвариант шаг за шагом

Идёт процесс, ситуация с каждым шагом меняется, а мы хотим знать, что будет в конце. Результат предсказать легче, если хоть что-то постоянно. Неизменное свойство называют *инвариантом*. Если мы проверили, что свойство не меняется на каждом шаге, то свойство не меняется вообще. Точнее говоря, это свойство одинаково для начальной точки процесса и для всех точек, до которых есть цепочка шагов из начальной точки. Инвариант как бы бежит по этой цепочке, протянутой до нужной нам точки, как вода по трубе. Отсюда, в частности, сразу ясно, что в точки *с другим значением инварианта* дойти *нельзя.*
Самый простой случай – когда процесс, его начало и все шаги определены однозначно. Тут в принципе всю цепочку можно выписать явно. Но если число шагов велико, то практически это сделать невозможно. А часто и не нужно, если окончательный результат выводится из инварианта.
Типичные инварианты: количество чего-то, общая сумма, общее произведение, чётность, делимость на что-то, остаток.

Идеология

Инварианты школьники усваивают легко и с удовольствием: им нравится идея упрощать расчёты, следя только за маленькой частью процесса. И стандартные инварианты: чётность, делимость, сумма, произведение, раскраска – они запоминают быстро и находят легко. Но если с помощью инварианта доказывать только невозможность, то цепочки строить не нужно. Про них забывается, и тогда становится труднее заметить неизменное свойство, о котором явно не говорится (пример 3). Поэтому полезно задачи на инвариант сочетать с задачами, где цепочку надо построить или оценить.

Путь к индукции

Доказательство по индукции фактически является сложной конструкцией, состоящей из многих деталей-шагов. Оно включает в себя процесс из последовательного добавления таких шагов. Выявление инварианта в *уже заданном процессе* с помощью пошагового доказательства делает наглядной работу таких цепочек шагов . Школьники учатся *видеть* такие цепочки и пользу от них. Тем самым они учатся их *строить*. В простых случаях результат процесса на каждом шаге однозначно предопределен (см. пример 4.1, задачу 4.6). Но чаще процесс ветвится: очередной шаг можно сделать многими способами и с разными результатами. Да и цепочка промежуточных шагов строится многими способами (см. например, решение задачи 4.4а). Правда, в решениях через инвариант неоднозначность пути остается «за кадром». Но, имея целью доказательство по индукции, можно дополнительными вопросами или комментариями обратить внимание на то, что множество рассмотренных объектов является не отдельной цепочкой, а деревом цепочек. (Спросите, например, в задаче 4.4: может ли пнромежуточная цепочка к (20, 20, 21) быть другой? Может ли она состоять из другого числа шагов? Сколько разных позиций можно получить за 5 шагов?) Осознание ветвистой структуры поможет в будущем строить доказательства по индукции для нелинейных цепочек утверждений.

5. Включение в серию

Мы уже поняли, что разбираться с примером из серии легче, чем с одиночным. Но нередко и «одиночку» удаётся включить в серию! Обычно конструкция зависит от какого-то числа (*параметра*) – размера, количества слагаемых и т.п. Сделаем это число переменным и будем строить примеры для разных значений параметра. Может выясниться, что для некоторых значений задача не имеет смысла или примера явно нет – такие просто пропустим. Вообще, можем создать серию только из удобных нам значений. Важно догадаться, какие именно значения дадут конструкции, аналогичные нужной.
А если чисел несколько? Какие-то из них (обычно маленькие) оставим постоянными, между большими попробуем найти зависимость (скажем, одно ровно на 1 больше другого). Попробуем сохранить эту зависимость во всех конструкциях серии.

Пример 5.1. На каждой клетке клетчатой полоски ширины 1х80 стоит по шашке: слева 40 белых, справа – 40 чёрных. За один ход можно пару соседних шашек, где слева белая, а справа чёрная, поменять местами. За какое число ходов можно получить позицию, где слева 40 чёрных, справа – 40 белых?

Путь к решению. Шашек много, вручную не проверишь. Уменьшим конструкцию. Число 40 повторяется, сделаем его параметром. Будем менять местами n белых и n чёрных шашек на полоске длины $2n$. Случай n=1 «неинтересный», но запомним ответ: 1 ход. Для n=2 ответ 4, для n=3 перестановки можно делать разными способами, но ответ всегда 9. Закономерность просматривается: точные квадраты. Проверим её для n=4, и точно: получим 16 ходов. Простейший способ действий: перегоняем в конец сначала самую правую белую шашку, потом следующую и т. д. Каждая из 4 белых шашек сделает по 4 хода, итого 4·4=16. Но почему результат не зависит от порядка перестановок? Идея: потому что белой шашке придется каждый раз меняться с другой чёрной!
Ответ. 1600. **Решение.** Требуемую позицию получить можно, например, способом из предыдущего абзаца. Докажем, что число ходов не зависит от способа. Каждая белая шашка вначале стоит слева от всех чёрных, а в конце – справа. Значит, она поменялась со всеми чёрными. За ход она меняется только с одной чёрной, и с каждой из чёрных меняется ровно один раз. Значит, каждая белая шашка сделает ровно по 40 ходов, итого 40·40=1600 ходов.
Комментарий. От порядка ходов не зависит не только число ходов, но и финальная позиция. Действительно, если если не все белые шашки стоят на 40 правых местах, то есть белая шашка левее чёрной, поэтому есть такие *соседние* шашки, и ход – возможен!

Пример 5.2. Выпишите строку из 15 целых чисел так, чтобы сумма каждой пары соседей была отрицательной, а сумма всех была равна 1.
Путь к решению. Попробуем разобраться со строками произвольной длины. Для строки из 1 числа задача бессмысленна. Для строки из 2 чисел сумма всех равна сумме пары, то есть отрицательна. Для 3 чисел пример легко подбирается: 2, –3, 2. Для 4 чисел примера снова нет: общая сумма складывается из суммы двух пар и поэтому отрицательна. По той же причине нет примера и для любой чётной строки. Поищем серию из строк нечётной длины, начиная с длины 3. На очереди длина 5. Первое и последнее число должны быть положительны: они добавляются к сумме пар, превращая отрицательную сумму в положительную. При этом сумма пар не более –2, а вся сумма равна 1, значит, крайние числа не меньше 3 каждое. Да и среднее число должно быть не менее 3, поскольку, кроме него, остаются две пары. Отсюда нетрудно найти пример: 3, –4, 3, –4, 3. Структура просматривается, но давайте для надёжности выпишем по аналогии пример для 7 чисел и убедимся, что и он подходит: 4, –5, 4, –5, 4, –5, 4. Те, кто знают алгебру, могут даже написать строку сразу для $2n$+1 числа и проверить её.
Решение. Подходит строка 8, –9, 8, –9, …, 8 (8 восьмёрок и 7 девяток). В каждой паре сумма равна 8+(–9)=–1, а общая сумма равна 8·8–7·9=1.

В задачах на «оценку+пример» включение в серию и разбор малых значений подскажет не только структуру примера, но и ответ. Помните, впрочем, что доказательство оценки, полученной из перебора, редко переносится с малых примеров на большие: там уже придётся придумать какое-то общее рассуждение. Для этого полезно заметить общие свойства, и их тоже проще обнаружить на малых примерах (но, обычно, не на самом малом).

Пример 5.3. По кругу лежат 40 монет: две орлом, две решкой, две орлом, две решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если одна из её соседок лежит орлом, а другая — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций?
Путь к решению. Типичное заблуждение: мол, удастся перевернуть все, кроме последней. Действительно, ясно, что последнюю монету перевернуть не удастся, а вначале удаётся бойко сдвигать решки по часовой стрелке и уменьшать их число... Проверку до конца не доводят – слишком много монет, но ведь вроде и так всё ясно... Но довести надо, хотя бы на маленьком примере. Для четырёх монет все сходится, но обязательно надо проверить ещё хотя бы один случай. И тут нас подстерегает сюрприз: из 8 монет положить орлом удаётся только 6. Чтобы понять ответ, увеличим число групп. Для шести групп по 2 монеты ответ 9. Где закономерность? Ага, остается столько решек, сколько было групп решек вначале. Почему? Поищем инвариант! Анализ показывает, что в начальной позиции перевернуть можно только монеты на стыке чередующихся групп орлов и решек. Подумав, поймём, что так будет всегда, даже когда группы разных размеров. А что происходит со стыками при переворачивании? Они сдвигаются, *но не исчезают*! (см. рис.)

О О О | Р Р | О | Р Р Р

О О | Р Р Р | О О О | Р

Перевернутая монета переходит в соседнюю группу: из орлов в решки или обратно. Заметим, что поскольку последнюю монету в группе нельзя перевернуть, то и группы тоже не *исчезают и не сливаются.* А так как нельзя перевернуть монету *внутри* группы, то группы и *не появляются*. Размеры групп меняются, а их количество – нет! Вот и инвариант!

Решение. *Ответ:* 30. *Пример.* Изначально есть 20 групп идущих подряд орлов и 20 групп решек. В каждой группе решек последовательно перевернём одну монету. Теперь каждая группа состоит из одной решки, то есть осталось 10 решек. Значит, стало 30 орлов. *Оценка*. При переворачивании монеты число групп орлов и число групп решек не меняется. Значит, в любой момент число групп решек равно 10, в каждой – не менее 1 монеты, поэтому всего не менее 10 решек. Но тогда орлов в любой момент не более 40–10=30.

Задачи

5.4. На какое наибольшее число прямоугольников разной площади можно разрезать прямоугольник 50х100?

5.5. Газету 8 раз сложили пополам (поочередно вдоль и поперёк), после чего оторвали от неё 4 угла. Если теперь развернуть газету, то сколько в ней будет дырок?

5.6. Из чисел 1, 2, 3, …., 33 одно вычеркните, а остальные разбейте на пары так, чтобы разности в парах были 1, 2, 3, …, 16.

5.7. Дана доска 20х20, раскрашенная в шахматном порядке. Ладья ходит по ней, делая каждый раз ход на соседнюю клетку. Она может повернуть в чёрной клетке только направо, а в белой – только налево, но на любом цвете может и не поворачивать, а продолжить прямо. Как ладье пройти по всем клеткам, кроме двух, не проходя дважды через одну и ту же клетку?

5.8.* Карточки с числами 1, 2, …, 50 перетасовали, разбили на десять пятёрок и в каждой пятёрке выбрали среднее по величине число. Какое наименьшее значение может принимать сумма выбранных чисел?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д35-Д45.

Ответы и решения

5.4. Путь к решению. Оба размера большие, но один ровно вдвое больше другого. Объявим меньший размер параметром, и рассмотрим серию из прямоугольников с длиной вдвое больше высоты. Для 1х2 ответ 1, для 2х4 ответ 3. Прямоугольник 3х6 нетрудно разрезать на 5 прямоугольников площадей 1, 2, 4, 5, 6, а на 6 прямоугольников его разбить нельзя, так как их площадь будет уже не меньше $1+2+3+4+5+6=21>3\cdot 6=18$. Кстати, сумма в рассуждении отличается от суммы площадей в примере всего на одно слагаемое. Запомним, это может пригодиться...

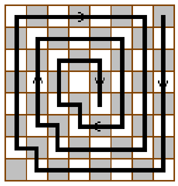
Уже просматривается закономерность: ответ на 1 меньше наибольшего размера. Проверим её для прямоугольника 4х8 – да, и там 7 получается, а 8 нельзя из-за аналогичного неравенства с площадями.

Решение. *Ответ.* 99. *Пример.* Разрежем сначала наш прямоугольник на 50 полосок 1х100, от первой отрежем прямоугольник 1х1, от второй 1х2, …, от 49-й 1х49. Оставшиеся части образуют прямоугольники от 1х51 до 1х99 и неразрезанный 1х100: всего $49\cdot 2+1=99$ прямоугольников. *Оценка.* Если бы нам удалось разрезать на 100 или более прямоугольников, то у самого маленького площадь была бы не менее 1, у следующего по размеру – не менее 2, ..., у сотого – не менее 100. Тогда у каждого, кроме 50-го, площадь была бы не меньше, чем площадь соответствующего прямоугольника в примере, то есть уже сумма их площадей была бы не меньше площади 50х100, а с 50-м – даже больше. Противоречие.

5.5. Ответ: 225 дырок. **Решение.** Каждый раз складывая газету поперёк вдвое, мы уменьшаем её ширину вдвое. Так мы это делаем 4 раза, то ширина уменьшится в $2^4=16$ раз. То же с длиной. Значит, линии сгиба образуют сетку 16×16. Угол каждой клетки оторван, и дырка образуется там, где сходятся углы четырёх клеток, то есть на пересечении внутренних линий сетки. 15 горизонтальных и 15 вертикальных линий дают $15^2=225$ пересечений.

5.6. Разобьём числа на две группы: в первой числа от 1 до 17, во второй – от 18 до 33. В каждой группе объединим в пару равноотстоящие от её концов числа: (1, 17), (2, 16), …, (7, 9) и (18, 33), (19, 32), …, (25, 26). Без пары осталось число 8, его и вычеркнем. В парах второй группы разности нечётные: 15, 13, …, 1, в парах первой группы – чётные 16, 14, …., 2.

5.7. См. рис.для доски 8x8.



5.8. Решение. *Ответ.* 165. *Пример.* При разбиении {1, 2, 3, 31, 32}, {4, 5, 6, 33, 34}, …, {28, 29, 30, 49, 50} сумма средних будет 3+6+9+...+30=165. *Оценка.* Упорядочим пятёрки по возрастанию средних чисел. Для среднего числа из 1-й пятерки есть два меньших его из этой пятёрки, поэтому оно не меньше 3. Для среднего числа из 2-й пятёрки есть 3 меньших его из 1-й пятёрки (среднее и два меньших), и два числа из второй пятёрки; итого 5 меньших чисел, поэтому это среднее не меньше 6. Точно так же для среднего из 3-й пятёрки есть по три меньших числа из предыдущих пятёрок и два из его пятёрки, поэтому оно не меньше 9, и т. д. Тем самым сумма не меньше 3+6+9+...+30=165.

Идеология

Когда школьник «застревает» при решении трудной задачи, опытный учитель вместо подсказки может предложить ему аналогичную, но более лёгкую. Но как ученику найти такую задачу самому? Надёжный способ снизить трудность, не потеряв аналогии: включить трудную задачу в серию и начать с малых членов серии. При этом использованный приём: превращение чисел из задачи в параметры, отслеживание связей между параметрами – помогает ещё и привить вкус к алгебре. Вообще навыки перехода от частного к общему и от общего к частному играют ключевую роль в обучении математике. Они потребуются в старших классах много раз, например, при переходе к многочленам, функциям, многоугольникам. Работа с серийными примерами не только развивает эти навыки, но и превращает их в мощное средство решения задач.

Путь к индукции.

Доказательство по индукции, основанное не на готовой, а на специально построенной лесенке, придумать намного сложнее. Простейший способ построения лесенки – данную в задаче конкретную конструкцию включить в серию. Чаще всего это достигается через выбор параметра индукции. Однако, выбор может быть неоднозначным. Вводя параметр индукции, важно понять, для каких значений параметра конструкция существует или обладает нужным свойством. Необходимо отбросить невозможные случаи и ненужные, не аналогичные конструкции. И тут вновь поможет разбор «малых» случаев.

Обратите внимание, что рассуждение, доказывающее *большой случай*, может фактически быть индуктивным (см. например, решение 5.8). Разобрав подробно малые случаи и обнаружив *очевидную* закономерность, школьники переносят её на большие случаи с помощью слов «аналогично» или «и т.д.». Для школьников, ещё не изучавших индукцию, это правильно и вполне строго. Проверьте только, что ошибки нет и дальнейшие шаги школьнику действительно очевидны. Но даже когда мы научим школьника оформлять рассуждения с помощью слов «база индукции» и «шаг индукции», формальная запись таких очевидных рассуждений строгости не добавит. То есть формально записать будет можно, но пользы в этом нет. Даже среди математиков-профессионалов оформление очевидных индуктивных рассуждений с помощью «и т. д.» считается корректным.

Литература

[Посл] А.Д.Блинков «Последовательности», Издательство МЦНМО, Москва, 2018

[МБП] Мышкис А.Д, Блехман И.И., Пановко Я.Г. «Механика и прикладная математика: логика и особенности приложений математики», Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990

[Узко] А.В.Шаповалов «Принцип узких мест», Издательство МЦНМО, Москва, 2017

[Счёт] П.Кожевников «Счётчики и расстояния в графах», журнал «Кванте», 2017, №6.

Благодарности. В первую очередь автор бл