А.Д. Блинков

ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА
ОБЫЧНАЯ И НЕ ОЧЕНЬ

Часть 1

Издательство МЦНМО
2021

Двадцать вторая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена занятиям по геометрии со школьниками 7 класса. В неё вошли разработки восьми занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для преподавателя.

Значительный объём книжки занимает список дополнительных задач, их решения и комментарии. Приведен список использованной литературы, а также указаны авторы задач.

Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям элементарной геометрии.

Предисловие

Эта книга серии «Математические кружки» – не совсем обычная. В отличие от большинства книг этой серии, она ориентирована только на школьников одной параллели. Её издание – это попытка решить проблему проведения кружков (факультативов, элективных курсов) по геометрии в 7 классе, ориентируясь на постепенное освоение учащимися минимума сведений общеобразовательной школьной программы. При этом, учтено разнообразие базовых школьных программ и учебников.

Объём представленного материала оказался настолько большим, что книга состоит из двух частей (книжек), издаваемых отдельно. Каждая из частей содержит восемь занятий. Тематика занятий первой части – традиционная, их последовательность соответствует порядку изучения этих тем в школьной программе. Исключением может являться только занятие 8, так как «полупризнак» равенства треугольников не рассматривается в большинстве школьных учебников.

Отметим, что к материалу занятий первой части естественным образом примыкает ряд геометрических задач на построение, но они не включены в эту книгу, так как таким задачам посвящена отдельная книжка серии: «Геометрические задачи на построение» (авторы – А. Блинков и Ю. Блинков). Для 7 класса из неё, при желании, можно использовать первые два занятия

Как обычно, в материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя: несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя (в том числе, и в начале занятия, поясняющие основное содержание и цели занятия, и содержащее перечень необходимых предварительных сведений). Еще раз отметим, что разбиение на занятия максимально учитывает наличие или отсутствие сведений, которые учащиеся имеют на тот или иной момент в соответствии со школьной программой, но в некоторых случаях даются комментарии для «продвинутых» школьников, которые обладают знаниями сверх базовой школьной программы.

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть – дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также приведены подробные решения. Для удобства, в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям (в том числе, из разных частей книги).

Краткое содержание и цели занятий.

Занятие 1. Равенство треугольников и равнобедренный треугольник_1. Посвящено решению задач на применение признаков равенства треугольников, свойств и признаков равнобедренного треугольника. Основная цель – приобретение школьниками навыков распознавания равных треугольников в простых геометрических конструкциях и обоснования этих равенств. Решение задач не требует дополнительных построений. Для их решения не потребуется использовать теоремы о сумме углов и внешнем угле треугольника.

Занятие 2. Равенство треугольников и равнобедренный треугольник_2. Рассматриваются более сложные задачи, для решения которых применяются признаки равенства треугольников, а также свойства и признаки равнобедренного треугольника. Для их решения, потребуются дополнительные построения, либо исходная конструкция такова, что увидеть равные треугольники весьма непросто. Некоторые дополнительные построения являются «типовыми», то есть применяются для решения многих задач (не только представленных на этом занятии). Отдельное внимание уделено построению примеров и контрпримеров к утверждениям, связанным с равенством треугольников. По-прежнему, для освоения материала занятия не потребуется знания теорем, связанных с суммой углов треугольника.

Занятие 3. Параллельность и сумма углов треугольника. Посвящено задачам, для решения которых требуется применить свойства параллельных прямых или теорему о сумме углов треугольника. Присутствуют задачи как на непосредственный счёт углов, заданных числами, так и задачи, в которых для вычисления углов требуется составить простые уравнения. Также есть задачи, в которых вычисление углов позволяет доказать равенство треугольников, равнобедренность треугольника или найти соотношение между линейными элементами треугольника. Некоторые задачи также дают возможность повторить типовые дополнительные построения, рассмотренные в занятии 2, в частности, «удвоение» медианы.

Занятие 4. Внешний угол треугольника. На этом занятии продолжается отработка навыков счёта углов и применение теорем о параллельности прямых и сумме углов треугольника. При этом, в ряде задач уже потребуется работа с углами, обозначенными буквенными выражениями. Отдельная цель – приучить школьников эффективно использовать теорему о внешнем угле треугольника для решения задач. Это представляется весьма важным, так как многие учащиеся редко используют эту теорему, предпочитая каждый раз пользоваться суммой углов треугольника, что часто делает решение более громоздким.

Занятие 5. Прямоугольный треугольник_1. Основное содержание этого занятия –применение свойства медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, и обратного утверждения, которое является признаком прямоугольного треугольника. Так как в большинстве базовых школьных учебников эти факты не выделены в качестве теорем, то они формулируются и доказываются. В процессе решения ряда задач потребуется счёт углов, что даст возможность повторить применение теорем о внешнем угле и сумме углов треугольника. Кроме того, во многих случаях будут рассматриваться равнобедренные треугольники и это даст возможность повторить их свойства и признаки.

Занятие 6. Прямоугольный треугольник_2. На этом занятии основное внимание уделено применению свойства прямоугольного треугольника с углом $30°$ и утверждения, ему обратного. Кроме того, решение некоторых задач потребует применения признаков равенства прямоугольных треугольников. Этому уделено отдельное внимание, так как учащиеся не всегда распознают возможность их применения в конкретных геометрических конструкциях. Кроме того, на этом занятии сформулированы и доказаны свойство и признак биссектрисы угла, которые будут неоднократно использованы впоследствии.

Занятие 7. Равносторонний треугольник. Основное содержание этого занятия – решение задач, связанных с равносторонним треугольником. При этом, существенным образом используется, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°. В частности, по ходу решения многих задач будет возникать равнобедренный треугольник, в котором один из углов равен 60°, откуда и будет следовать, что этот треугольник – равносторонний (признак равностороннего треугольника). Помимо этого, материал занятия дает возможность закрепить навыки, полученные на предыдущих занятиях: применения признаков равенства треугольников, свойств и признаков параллельности, свойств и признаков равнобедренного треугольника, свойств прямоугольного треугольника, и пр.

Занятие 8. Еще раз о равенстве треугольников. Основные цели этого занятия: 1) познакомиться с четвертым признаком равенства треугольников (его еще называют «полупризнаком» равенства треугольников) и научиться применять его при решении задач; 2) научиться различать верные и неверные утверждения, связанным с равенствами треугольников, и строить контрпримеры к правдоподобным, но неверным утверждениям. Кроме того, решение некоторых задач позволит вновь повторить типовые дополнительные построения. Материал этого занятия тесно связан с некоторыми задачами на построение, в частности, с построением треугольника по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.

По традиции, в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения, и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех использованных задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Автор благодарен А.В. Антропову, Ю.А. Блинкову и Д.В. Прокопенко, в чьих материалов были найдены некоторые задачи, а также всем школьникам, на занятиях с которыми этот материал был апробирован и «протестирован» Часть этой работы проходила на математических кружках под руководством Т.А. Барановой, за что ей отдельное спасибо.

Кроме того, Ю. Блинков, будучи редактором книги, оказал существенное влияние на идеологию, компоновку материалов и улучшение текста. Ряд важных замечаний от редактора серии А.В. Шаповалова также способствовало улучшению текста книги. Отдельная благодарность В. Шувалову за профессиональную верстку и выполнение чертежей.

Занятие 2
Равенство треугольников и равнобедренный треугольник_2

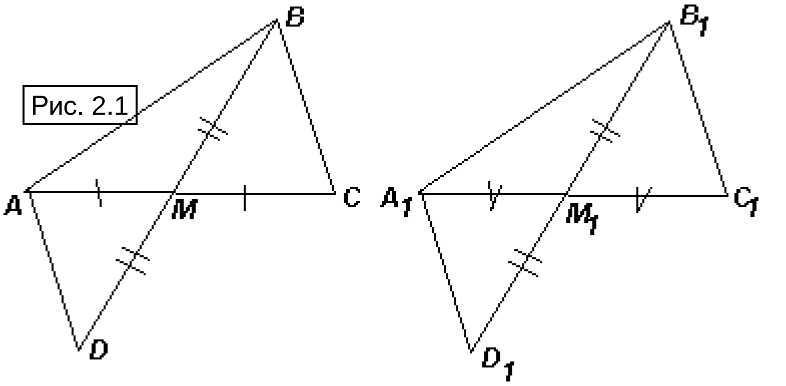
На этом занятии основное внимание опять уделено задачам на применение признаков равенства треугольников, а также свойств и признаков равнобедренного треугольника. Но, в отличие от задач занятия 1, решение задач этого занятия потребует, как правило, дополнительных построений. Отдельное внимание уделено построению примеров и контрпримеров к утверждениям, связанным с равенством треугольников. По-прежнему, для освоения материала занятия не потребуется знания теоремы о сумме углов треугольника.

На этом занятии будут рассмотрены более сложные задачи, для решения которых применяются признаки равенства треугольников, а также свойства и признаки равнобедренного треугольника. Сложность этих задач состоит в том, что для их решения, потребуются дополнительные построения, либо исходная конструкция такова, что увидеть равные треугольники весьма непросто. Некоторые дополнительные построения являются «типовыми», то есть применяются для решения многих задач (не только представленных на этом занятии). Рассмотрим два примера.

Пример 2.1. Две стороны и медиана, проведенная к третьей стороне одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне другого треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

В этой задаче, даже после того, как сделан чертеж, равных треугольников не видно, поэтому в случае затруднений у школьников дополнительное построение можно и нужно подсказать, что надо попытаться «объединить» три данных элемента в один треугольник.

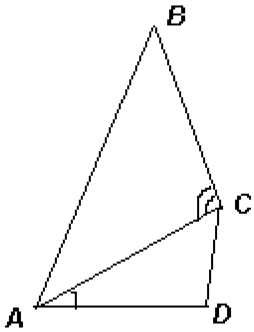
Рис. 2.1



Решение. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и равны их медианы BM и B_1M_1. Продлим каждую из медиан на ее длину, то есть на лучах BM и B_1M_1 отметим точки D и D_1 соответственно так, что $DM = BM$ и $D_1M_1 = B_1M_1$ (см. рис. 2.1). Учитывая, что $\angle AMD = \angle CMB$ (вертикальные углы), получим: $\Delta AMD = \Delta CMB$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AD = BC$. Аналогично докажем равенство треугольников $A_1M_1D_1$ и $C_1M_1B_1$, из которого следует, что $A_1D_1 = B_1C_1$.

Таким образом, $AD = A_1D_1$, $AB = A_1B_1$ и $BD = B_1D_1$, значит, $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ (по трем сторонам). Следовательно, что $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$, тогда $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ (по двум сторонам и углу между ними). Из этого равенства следует, что $AM = A_1M_1$, поэтому $AC = A_1C_1$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).

Полезно обсудить другие способы рассуждений (например, равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ можно получить по двум сторонам и углу между ними), а также провести аналогию с решением задачи на построение треугольника по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне. Желательно также подчеркнуть, что «удвоение медианы» часто применяется при решении различных задач, если медиана присутствует на чертеже.



Пример 2.2. В четырехугольнике *ABCD*: $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$ и $AB = BC + AD$ (см. рисунок). Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

И в этом случае школьники, скорее всего, сами не придумают нужного построения. Тогда его придется подсказать, что если сумма двух углов равна 180°, то можно приложить их один к другому так, чтобы они имели общую сторону, а две другие стороны стали противоположными лучами.

Решение. Для удобства введем обозначения: $AD = x$, $BC = y$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle ADC = \gamma$, $\angle BAC = \delta$, $\angle ACD = \phi$ (см. рис. 2.2а). Тогда $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $AB = x + y$ (по условию).

Теперь «отрежем» треугольник *ACD*, перевернем его и приставим обратно, так чтобы вершины *A* и *C* поменялись местами. Новое положение вершины *D* обозначим *E*.

Рис. 2.2а

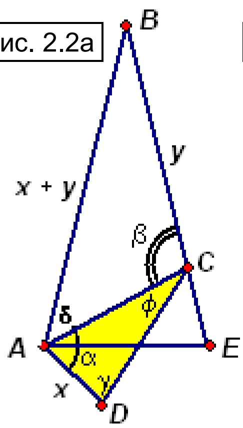
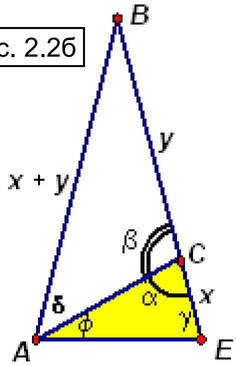


Рис. 2.2б



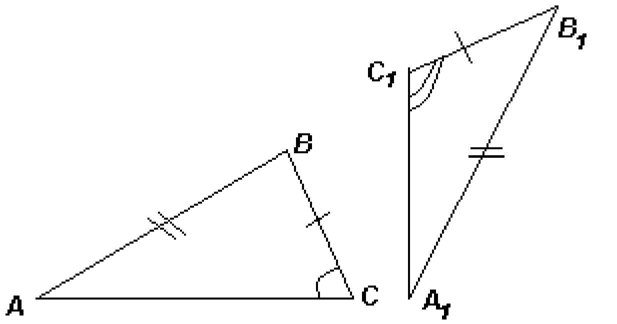
Так как $\alpha + \beta = 180°$, то точки *B*, *C* и *E* будут лежать на одной прямой. При этом $CE = AD = x$, то есть $BE = x + y = AB$ (см. рис. 1.2б). В равнобедренном треугольнике *ABE* углы при основании равны, то есть $\delta + \phi = \gamma$, что и требовалось.

Следует обратить особое внимание учащихся на необычное дополнительное построение, которое использовано при решении задачи, так как этот прием встретится и в дальнейшем. Его иногда так и называют: «отрежем, перевернём и приставим ...».

В нескольких задачах этого занятия сформулирован вопрос: «Обязательно ли ...?». Напомним, что в задачах такого типа надо понять ответ и если он утвердительный, то провести доказательство, а если он отрицательный, то привести контрпример.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

2.1. Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который также сложил из них треугольник. Обязательно ли Петин треугольник окажется равен Васиному?



2.2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle C + \angle C_1 = 180°$ (см. рисунок). Докажите, что $\angle A = \angle A_1$.

2.3. Докажите, что если медиана треугольника совпала с его биссектрисой, то этот треугольник – равнобедренный.

2.4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки D и E, что $AD = DE = EC$. Может ли оказаться так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?

2.5. Две стороны и угол, лежащий напротив одной из них в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему напротив соответствующей стороны в другом треугольнике. Обязательно ли эти треугольники равны?

2.6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

2.7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, причем $BL = AB$. На ее продолжении за точку L отмечена точка K так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Докажите, что $BK = BC$.

2.8. Пусть K – середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

Ответы, решения, комментарии

2.1. Ответ: не обязательно.

Например, если Вася разрезал остроугольный треугольник ABC по медиане BD (см. рис. 2.3а), а Петя сложил треугольник ABB', совместив отрезки AD и CD (см. рис. 2.3б).

Рис. 2.3а

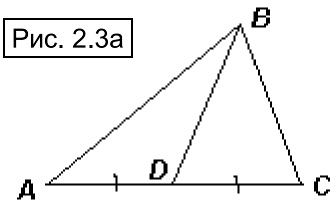
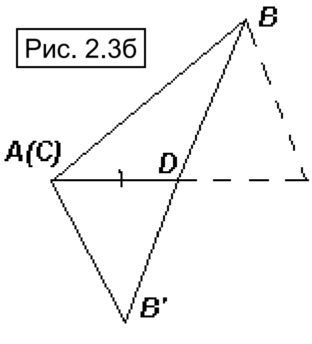


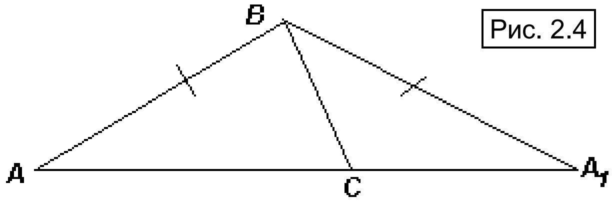
Рис. 2.3б



Отметим, что и в этом случае помогло «удвоение медианы». Приведённый пример можно упростить, рассматривая равнобедренный треугольник, в котором BD будет являться высотой.

2.2. Приложим данные треугольники друг к другу так, чтобы совпали вершины B и B_1, C и C_1, а вершины A и A_1 оказались в разных полуплоскостях относительно прямой BC (см. рис. 2.4). Так как $\angle C + \angle C_1 = 180°$, то точки A, C и A_1 лежат на одной прямой. Следовательно, образовался равнобедренный треугольник ABA_1, в котором углы A и A_1 при основании равны.

Рис. 2.4



2.3. Пусть в треугольнике ABC отрезок BM является медианой и биссектрисой. «Удвоим» медиану BM, то есть на луче BM отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 2.5).Тогда равны треугольники AMD и CMB (по двум сторонам и углу между ними), значит, $AD = CB$ и $\angle ADB = \angle CBD = \angle ABD$. Следовательно, треугольник ABD – равнобедренный с основанием BD, поэтому $AB = AD = CB$, что и требовалось.

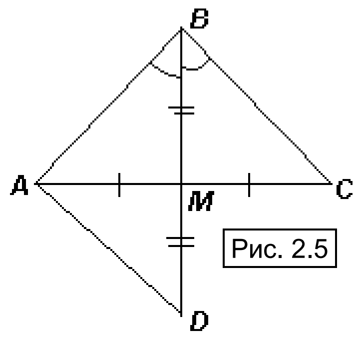
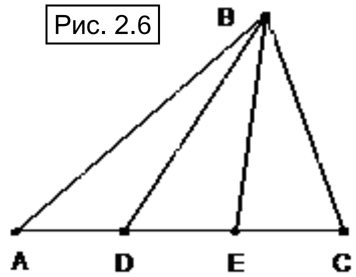


Рис. 2.5

Имеет смысл провести аналогию с примером 2.1 (особенно в случае, когда школьники испытывают затруднение). Кроме того, стоит подчеркнуть, что доказанное утверждение является признаком равнобедренного треугольника.

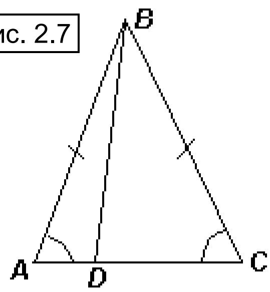
2.4. Ответ: не может.

Предположим, что требуемая конструкция построена (см. рис. 2.6). Рассмотрим треугольник ABE: BD – его медиана. Если $\angle ABD = \angle DBE$, то BD является также и биссектрисой этого треугольника, поэтому ABE – равнобедренный треугольник с основанием AE, а BD – его высота. Аналогично, BE – высота равнобедренного треугольника DBC. Таким образом, из точки B опущено два различных перпендикуляра на прямую AC, что противоречит теореме о единственности перпендикуляра к прямой: *через любую точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной*.

Рис. 2.6


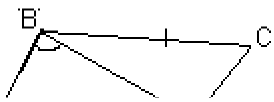
2.5. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC. На его основании AC отметим точку D, отличную от его середины (см. рис. 2.7). Тогда в треугольниках ABD и CBD: $AB = CB$, BD – общая сторона, $\angle BAD = \angle BCD$, но эти треугольники не равны, так как $AD \neq CD$.

Рис. 2.7


В случае затруднений имеет смысл обратить внимание школьников на рис. 2.4.

2.6. Разрежем данный четырехугольник по диагонали BD (см. рис. 2.8а) и, «перевернув» треугольник BCD, вновь приложим его к диагонали BD (см. рис. 2.8б). Получился равнобедренный треугольник $AB'C'$ $(AB' = B'C')$. Следовательно $\angle B'AD' = \angle B'C'D'$, то есть, $\angle BAD = \angle BCD$, что и требовалось.

Рис. 2.8а


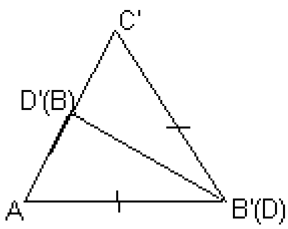


Рис. 2.8б

Отметим, что в треугольниках ABD и CBD, на которые диагональ BD разбивает данный четырехугольник, BD – общая сторона, $AD = BC$; $\angle BAD = \angle BCD$, но эти треугольники не обязаны быть равными (на рис. 2.8б отрезок $B'D$, в общем случае, не перпендикулярен AC'). Таким образом, треугольники ADB и CBD (см. рис. 2.8а) – еще один контрпример для задачи 2.5.

2.7. *В случае затруднений имеет смысл вернуться к задаче 1.5.*

Из того, что $BL = AB$, следует, что треугольник ABL – равнобедренный, значит, $\angle BAL = \angle BLA$ (см. рис. 2.9а). Тогда $\angle BAK + \angle BLA = 180°$. Учитывая, что углы BLA и BLC – смежные,

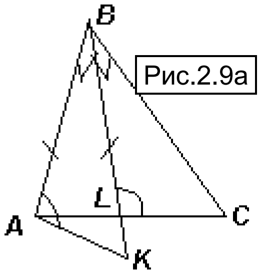
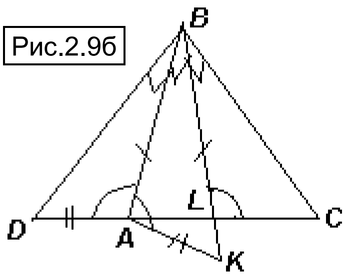


Рис.2.9а

получим: $\angle BAK = \angle BLC$. Значит, $\Delta BAK = \Delta BLC$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $BK = BC$.

Несмотря на то, что такое решение не требует дополнительных построений, увидеть равные треугольники не просто. Поэтому ту же идею решения можно реализовать иначе, если вспомнить решение задачи 1.2: на продолжении стороны AC за точку A отложить отрезок AD, равный AK (см. рис. 2.9б). Тогда из равенства $\angle BAK + \angle BAL = 180^\circ$ *и рассуждения о смежных углах, приведенного выше, следует, что* $\angle BAD = \angle BAK = \angle BLC$. *Значит, равны треугольники BAD и BAK (по двум сторонам и углу между ними), откуда* $\angle ABD = \angle KBA = \angle LBC$. *Следовательно, равны треугольники BAD и BLC (по стороне и прилежащим углам). Тогда BC = BD = BK.*

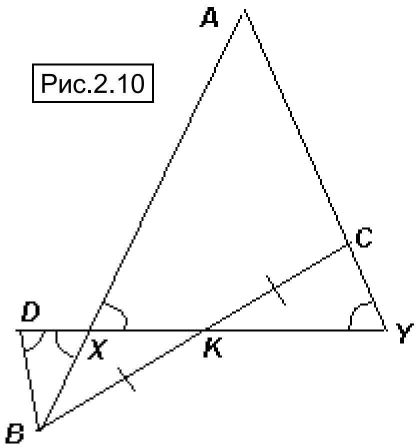
Рис.2.9б



С «продвинутыми» учащимися можно также обсудить, что треугольник BLC можно получить из треугольника BAK поворотом против часовой стрелки с центром B на угол, равный половине угла ABC.

2.8. Из условия задачи следует, что $\angle AXY = \angle AYX$ (см. рис. 2.10). Заметим, что точка K не может быть серединой отрезка XY. Действительно, пусть K – середина XY, тогда равны треугольники BXK и CYK (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle BXK = \angle CYK$. Но это невозможно, так как угол BXK – тупой, а угол CYK – острый.

Рис.2.10



Без ограничения общности можно считать, что $XK < YK$. На луче KX отметим точку D так, что $KD = KY$. Тогда треугольники BDK и CYK равны (по двум сторонам и углу между ними), значит, $BD = CY$ и $\angle BDK = \angle CYK = \angle AXY = \angle BXD$. Следовательно, треугольник BXD – равнобедренный: $BD = BX$. Таким образом, $BX = CY$, что и требовалось.

Отметим, что в данной конструкции возникла ситуация, разобранная в задаче 2.5: в треугольниках BXK и CYK соответственно равны две стороны и углы, лежащие напротив одной из них, но эти треугольники не равны.

Можно также использовать задачи Д1, Д2, Д10 – Д17, Д87, Д89.

Литература и веб-ресурсы

1. А.Д. Блинков. Четвёртый признак равенства треугольников. Журнал «Квантик», №1/ 2020.
2. М.А. Волчкевич. Уроки геометрии в задачах (7 – 8 классы). – М.: МЦНМО, 2016
3. Р.К. Гордин. Геометрия. Планиметрия. 7 – 9 классы. Учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2004
4. Задачи Математического праздника: http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/prob.html
5. Задачи Московской математической олимпиады: http://olympiads.mccme.ru/mmo/books/index.htm
6. Задачи Устной городской олимпиады для 7 классов: http://olympiads.mccme.ru/ustn/
7. Избранные задачи окружных олимпиад по математике в Москве / Составитель А.Д. Блинков. МЦНМО, 2015
8. Материалы турниров математических боев имени А.П. Савина: http://tursavin.ru/problems.html
9. Московские математические регаты. Ч 1, 2 / Составители А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2014
10. В.В. Прасолов Решение задач повышенной сложности по геометрии. 7 – 9 классы. Учебное пособие. – М.: Просвещение, 2019
11. Проект «Задачи»: www.problems.ru
12. С.Е. Рукшин. Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге (первые пятьдесят лет). Ростов на Дону, издательский центр «МарТ», 2000
13. Д.В. Фомин Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994

http://www.ashap.info/Knigi/Matkruzhki/22-Geom71.html