А.Д. Блинков, Г.Б. Филипповский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМЫ

Предисловие

Эта книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена экстремальным планиметрическим задачам, то есть задачам, в которых рассматриваются наибольшее или наименьшее значение каких-либо геометрических величин. Постановка и решение таких задач имеют древнюю историю. Уже в «Началах» Евклида можно встретить задачу: «Если даны длины двух сторон треугольника, то наибольшую площадь он будет иметь тогда, когда эти стороны составляют прямой угол».

В окружающем мире многое происходило и происходит по экстремальным законам. Согласно Евклиду, даже ослик, ничего не ведающий о математике, бежит к сену кратчайшим путём. Возможно, поэтому экстремальным задачам уделяли большое внимание выдающиеся ученые – математики разных эпох: Архимед, Герон, Птолемей, Кеплер, Ферма, Торричелли, Лейбниц, Штейнер, Эйлер и многие другие.

К сожалению, в школьном курсе по разным причинам не уделяется должного внимания геометрическим задачам на экстремум. В лучшем случае, такие задачи появляются после того, как в старших классах школьники знакомятся с производной. Поэтому всё сводится к решению стандартных задач «с геометрическим содержанием» стандартными методами. Но экстремальная геометрия содержит богатый материал, демонстрирующий мощь и силу изученных ранее формул и теорем, уместность разнообразных дополнительных построений, естественность применения геометрических преобразований. Кроме того, многие задачи демонстрируют тесную взаимосвязь алгебры и геометрии, что представляется важным в школьном курсе математики.

Экстремальные задачи играют существенную роль во многих разделах современной математики и ее приложений. Некоторые из них до сих пор не решены. Также подчеркнём, что экстремальные задачи близки к «жизненным», так как в жизни важно научиться находить наилучший вариант в той или иной ситуации. Такие задачи наверняка встретятся сегодняшним школьникам в их взрослой деятельности: в технике, инженерии, компьютерных технологиях, архитектуре, и пр. Мы считаем, что решение таких задач школьниками проецируется на успешное решение задач в будущем. Кроме того, эта область геометрических знаний очень красива и эмоциональна, поэтому не должна находиться «на обочине» школьной математики.

Ограниченный объем книжки вынудил авторов включить в неё только планиметрические задачи. Также за рамками книжки сознательно оставлены задачи, требующие применения фактов математического анализа. Кроме того, мы избегали задач, решение которых чересчур громоздко, или требует знаний, далеко выходящих за пределы базового школьного курса геометрии (последнее в меньшей степени относится к занятиям 8 и 9). Основная цель – познакомить школьников с определённым кругом идей и приёмов, решающих экстремальные геометрические задачи.

Предлагаемая книжка содержит девять занятий математического кружка. Как обычно, в материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя: несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя (в том числе, и в начале занятия, содержащие перечень необходимых предварительных сведений). Разбиение на занятия старается максимально учитывать наличие или отсутствие сведений, которые учащиеся имеют на тот или иной момент в соответствии со школьной программой, но в некоторых случаях даются комментарии для «продвинутых» школьников, которые обладают знаниями сверх базовой школьной программы. Задачи первых шести занятий сгруппированы по методам решения, а в следующих трёх занятиях рассматриваются конкретные геометрические конструкции.

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть – дополняет их новыми идеями и методами (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также приведены подробные решения. Для удобства, в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям.

В конце книжки представлен список литературы и веб-ресурсов, среди которых – как источники предложенных задач, так и книги, которые могут быть полезны тем, кто заинтересуется данной тематикой. В некоторых случаях в тексте книжки даются прямые ссылки с указанием номера из этого списка (в квадратных скобках).

Краткое содержание занятий.

Занятие 1. Расстояния: от точки до фигуры, между фигурами. Ориентировано на учащихся 7 классов. Посвящено обоснованию и применению понятий, связанных с расстояниями на плоскости. Рассматриваются задачи, решение которых требует применения определений различных видов расстояний, неравенства треугольника, сравнения перпендикуляра и наклонной к прямой, проведённых из одной точки. Рассматриваемые приёмы и методы являются базовыми для решения задач следующих занятий.

Занятие 2. Кратчайшие пути. Ориентировано на школьников 7 – 8 классов. Задачи этого занятия содержат поиски кратчайших путей в несложных геометрических конструкциях. Рассматривается класс задач, для решения которых ведущую роль играют применение осевой симметрии или дополнительных построений, содержащих в неявном виде идею параллельного переноса. Наряду с этим закрепляются приёмы и методы, освоенные на предыдущем занятии

Занятие 3. Окружность: углы и касательные. Ориентировано на учащихся 8 классов. На этом занятии рассмотрены экстремальные задачи, связанные с окружностями. Решение большинства из них опирается на теорему о вписанном угле и различные факты, которые из неё следуют. Типовой конструкцией для этого занятия является окружность, описанная около треугольника, и касательные к ней. Это, в частности, даёт возможность находить экстремальные значения высот, биссектрис и медиан треугольника, если заданы определённые условия, а также решать обратные задачи.

Занятие 4. Помогают свойства четырёхугольников. Ориентировано на учащихся 8 классов. Решение экстремальных задач этого занятия позволяет продемонстрировать применение большого количества свойств различных видов четырёхугольников. Используются также свойства средних линий треугольника и трапеции, теоремы Фалеса и Вариньона. Кроме того, получают дальнейшее развитие идеи симметрии и параллельного переноса.

Занятие 5. Наибольшая площадь и фиксированная площадь. Ориентировано на школьников 8 – 9 классов. На этом занятии рассматриваются экстремальные задачи, связанные с площадями. Выбраны задачи, в условиях которых либо требуется найти наибольшее значение площади четырёхугольника при заданных условиях, либо, наоборот, площадь фиксирована и требуется найти экстремальное значение какой-либо другой величины. На примере квадрата рассмотрено богатство экстремальных свойств правильных многоугольников. Уделено внимание изопериметрической задаче и задаче Дидоны. Показана значимость использования в решениях экстремальных задач неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим.

Занятие 6. Метрические теоремы и подобие. Ориентировано на учащихся 9 классов. Основу этого занятия составляют экстремальные задачи, решение которых потребует использовать свойства подобных треугольников, теоремы синусов и косинусов, различные способы вычисления площадей треугольников и четырёхугольников. Кроме того, актуальными останутся некоторые методы, рассмотренные на предыдущих занятиях, в частности, способы оценки площадей фигур, использующие равновеликость или неравенство Коши. Для решения некоторых задач потребуется применить другие стандартные алгебраические неравенства или свойства квадратичной функции.

Занятие 7. Точки, внутри угла, и прямые, пересекающие угол. Ориентировано на учащихся 9 классов. На этом занятии рассматриваются экстремальные задачи, в условиях которых задан фиксированный угол. Рассматриваемые конструкции условно разделены на три группы: 1) прямые, проходящие через заданную точку внутри угла, высекают отрезок или отсекают треугольник с заданными экстремальными свойствами; 2) на окружности, лежащей внутри угла, ищутся точки с экстремальными свойствами; 3) проведение прямой, пересекающей стороны угла, обусловлено каким-нибудь дополнительным экстремальным условием. Для решения этих задач, помимо идеи симметрии, которая разбирались в занятии 2, потребуется использовать различные приёмы, большая часть которых отработана при разборе и решении задач других предшествующих занятий.

Занятие 8. Равносторонний треугольник. Ориентировано на школьников 9 – 10 классов. Это занятие посвящено экстремальным свойствам равностороннего треугольника, что в какой-то степени продолжает «линию», намеченную в занятии 5. В процессе решения задач использованы, в основном, аналитические методы, которые подразумевают вывод и применение различных геометрических формул в сочетании с алгебраическими неравенствами, причём некоторые из этих неравенств в предыдущих занятиях не встречались. При этом, вывод использованных формул происходит на основе геометрических соображений.

Занятие 9. Экстремальные точки в треугольнике. Ориентировано на школьников 9 – 10 классов. На этом занятии рассмотрены точки треугольника, в которых те или иные величины или выражения принимают экстремальные значения. В их число входят как широко известные замечательные точки треугольника (точки пересечения высот, медиан и биссектрис), так и точки, которых небыло на предыдущих занятиях. Решение и разбор задач этого занятия позволит показать применение теорем и формул, которые далеко не всегда изучаются на уроках геометрии, а также расширить арсенал применяемых приёмов и методов.

По традиции, в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках и факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, использовать эти занятия для более старших или более младших школьников, поменять порядок их изучения, и т. д.

Авторы благодарны В Брайману, чьи материалы были частично использованы при написании, Е. Диомидову, А. Заславском, А. Карлюченко и Д. Швецову за предложенные ими идеи решения отдельных задач. Огромное спасибо Ю. Эдлину, который, внимательно прочёл первую версию книжки и сделал много ценных замечаний и предложений. Отдельная большая благодарность – официальному редактору этой книжки Д. Прокопенко, чьи замечания и дополнения помогли существенно улучшить текст. Кроме того, выражаем благодарность всем авторам задач и авторам использованной литературы, среди которых хочется особенно выделить М.А. Волчкевича, В.Ю. Протасова и В.В. Прасолова.

Особенно ценными были замечания А.В. Шаповалова, благодаря которым были улучшены решения ряда задач, а также повышен уровень строгости изложения некоторых решений. Авторы также благодарны сотрудникам издательства МЦНМО, принимавших участие в подготовке этой книжки к печати.

Занятие 1
Расстояния: от точки до фигуры, между фигурами

Освоение материала этого занятия потребует знания фактов из базового курса геометрии 7 класса. Кроме того, желательно знать определение прямоугольника и то, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и высоты треугольника пересекаются в одной точке. В случае использования дополнительных задач имеет смысл учесть, что не все из них связаны с расстояниями, но близки к основным задачам по методам решения.

На этом занятии мы, в основном, рассмотрим задачи, связанные с понятием расстояния. Они являются «базовыми» для экстремальных геометрических задач, так как в основу любых определений, связанных с расстояниями, заложен «принцип минимальности».

Одним из основных способов решения предлагаемых задач является применение ***неравенства треугольника***. В частности, именно это неравенство объясняет, почему за расстояние между двумя точками принята длина отрезка, их соединяющего или, говоря иначе, ***кратчайший путь от одной точки к другой – это отрезок, соединяющий эти точки***.

Еще одним важным «инструментом» решения экстремальных задач является такой факт: ***перпендикуляр, проведённый из точки вне прямой на эту прямую, короче любой наклонной к этой прямой, проведённой из той же точки***.

Именно поэтому, за расстояние от точки, не лежащей на прямой, до этой прямой принята длина перпендикуляра, опущенного на прямую из этой точки. Здесь уместно напомнить общее определение расстояния от точки до фигуры (две части).

1) Точка B фигуры F называется ближайшей к точке A, если для любой точки X фигуры F выполняется неравенство $AB \leq AX$.

2) Расстоянием от точки A до фигуры F называется расстояние от A до ближайшей точки фигуры F.

Отметим, что ближайшая точка не обязана быть единственной. Кроме того, если точка A принадлежит F, то расстояние между ними равно нулю.

Рассмотрим пример.

1.1. Даны отрезок BC и точка A, не лежащая на прямой BC. Найдите расстояние от A до этого отрезка.

Рис. 1.1а

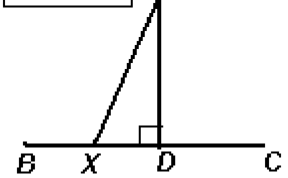
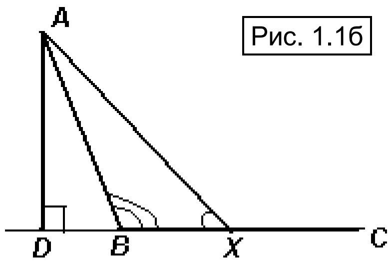


Рис. 1.1б



Решение. Опустим перпендикуляр AD на прямую BC. Возможны два случая: точка D либо принадлежит отрезку BC, либо не принадлежит ему (см. рис. 1.1 а, б соответственно).

1) Если D принадлежит отрезку (см. рис. 1.1а), то $AD < AX$, где X – любая другая точка отрезка BC, так как перпендикуляр короче наклонной. Следовательно, точка D – ближайшая к A точка отрезка. Значит, искомое расстояние равно длине отрезка AD.

Отметим, что обоснование можно сформулировать иначе: ***гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета***.

2) Пусть D не принадлежит отрезку и точка B лежит между C и D (см. рис. 1.1б). Тогда ближайшей к A будет точка B, так как для любой точки X отрезка BC верно, что $AB < AX$.

Действительно, так как угол ABX – внешний для прямоугольного треугольника ABD, то этот угол тупой, тогда для любой точки X отрезка BC угол AXB – острый. Поэтому указанное неравенство следует из того, что в треугольнике AXB ***напротив меньшего угла лежит меньшая сторона***. Следовательно, искомое расстояние равно длине отрезка AB.

Возможно иное обоснование указанного неравенства: если наклонные проведены к прямой из одной точки, то меньшей проекции соответствует меньшая наклонная.

Если в рассматриваемом случае точка C лежит между B и D, то аналогичными рассуждениями получим, что искомое расстояние равно длине отрезка AC.

Другая ситуация, которая часто встречается, – это поиск наименьшего и наибольшего расстояния между точками двух фигур.

1.2. Две окружности расположены одна вне другой. Длина какого отрезка с концами на этих окружностях будет а) наименьшей; б) наибольшей?

Решение. Пусть ω_1 и ω_2 – данные окружности, а O_1 и O_2, R_1 и R_2 – их центры и радиусы соответственно. Прямая O_1O_2 пересекает окружность ω_1 в точках A и B, а окружность ω_2 – в точках C и D (см. рис. 1.2).

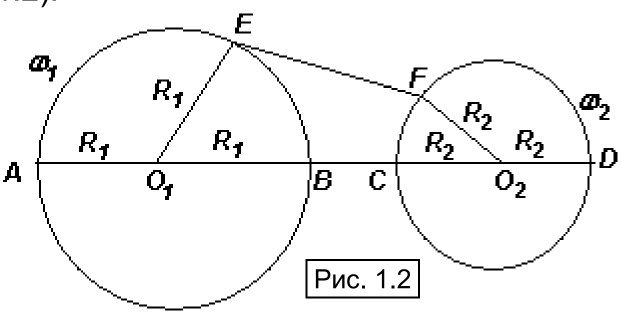


Рис. 1.2

Докажем, что отрезок BC имеет наименьшую длину, а отрезок AD – наибольшую. Рассмотрим произвольный отрезок EF с концами на окружностях ω_1 и ω_2 соответственно. Так как отрезок является кратчайшим путём между двумя точками, то $O_1E + EF + FO_2 \geq O_1O_2$, то есть $R_1 + EF + R_2 \geq R_1 + BC + R_2$, откуда $EF \geq BC$; причём равенство достигается только в случае, когда E совпадает с B, а F совпадает с C: Следовательно, длина BC – наименьшая.

Аналогично $EF \leq EO_1 + O_1O_2 + O_2F = R_1 + O_1O_2 + R_2 = AD$; причём равенство достигается только в случае, когда E совпадает с A, а F совпадает с D. Следовательно, длина AD – наибольшая.

Отметим, что если окружности пересекаются, то длина набольшего отрезка с концами на них ищется аналогично.

Также важно обратить внимание школьников, что решение любой экстремальной задачи (не только геометрической) содержит два этапа: оценку и пример. Оценка содержит нестрогое неравенство (иногда в неявном виде), а пример показывает, что равенство достигается, причём именно в том случае, который указан в ответе или требуется в условии.

Рассмотренный пример иллюстрирует понятие расстояния между двумя фигурами. Напомним, что:

1) Точки A и B называются ближайшими точками фигур F_1 и F_2, если для любой точки X фигуры F_1 и любой точки Y фигуры F_2 выполняется неравенство $AB \leq XY$.

2) Расстоянием между фигурами F_1 и F_2 называется расстояние между их ближайшими точками.

Отметим, что если фигуры имеют хотя бы одну общую точку, то расстояние между ними равно нулю.

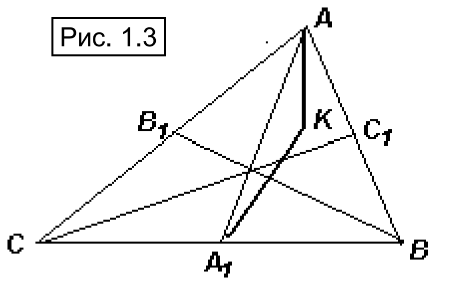
Таким образом, в рассмотренном примере доказано, что расстоянием между заданными окружностями является длина отрезка BC.

В некоторых задачах требуется найти наименьшее или наибольшее значение какой-либо суммы. Рассмотрим соответствующий пример.

1.3. Внутри треугольника *ABC* найдите точку *K*, сумма расстояний от которой до всех вершин и всех середин сторон треугольника будет наименьшей.

При решении таких задач часто удобно разбить искомую сумму расстояний на пары.

Рис. 1.3



Решение. Пусть A_1; B_1 и C_1 – середины сторон *BC; CA* и *AB* соответственно (см. рис. 1.3). Заметим, что для любой точки *K* по неравенству треугольника $KA + KA_1 \geq AA_1$, причём равенство достигается, если точка *K* принадлежит отрезку AA_1 – медиане треугольника *ABC*. Аналогично $KB + KB_1 \geq BB_1$ и $KC + KC_1 \geq CC_1$. Следовательно, искомая сумма не меньше, чем сумма длин медиан треугольника *ABC*. Равенство достигается, если точка *K* принадлежит каждой медиане данного треугольника, то есть совпадает с его точкой пересечения медиан.

В этой задаче пример сразу следует из оценки, что часто встречается в экстремальных геометрических задачах.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.4. Докажите, что наибольшей хордой окружности является её диаметр.

1.5. Даны окружность с центром O и радиусом *R* и точка *K* вне её. Найдите на окружности точку, расстояние от которой до точки *K* является а) наименьшим; б) наибольшим.

1.6. По сторонам прямого угла скользят концы отрезка длины *c*. Найдите наибольшее возможное расстояние от вершины угла до этого отрезка.

1.7. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

1.8. а) На отрезке *AB* найдите точку *K*, для которой расстояние между серединами отрезков *AK* и *BK* – наибольшее.

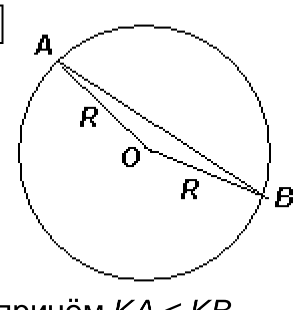
б) На отрезке *AB* отметили точку *K;* а затем на отрезках *AK* и *KB* построили равносторонние треугольники *AKC* и *BKD* по одну сторону от прямой *AB:* При каком положении точки *K* длина отрезка *CD* будет наименьшей?

1.9. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника – наименьшая.

1.10. Дан равносторонний треугольник *ABC*. Постройте прямую *m* так, чтобы сумма расстояний от вершин треугольника до *m* была наименьшей.

Решения и комментарии

Рис. 1.4



1.4. Пусть в окружности с центром *O* и радиусом *R* проведена хорда *AB*, отличная от диаметра, то есть, хорда, не содержащая точку *O*. Проведя отрезки *OA* и *OB*, получим треугольник *AOB*, в котором $AB < OA + OB$ (см. рис. 1.4).

Так как $OA = OB = R$, то $AB < 2R$. При этом, любая хорда, проходящая через центр *O*, является диаметром и её длина равна $2R$. Следовательно, диаметр является наибольшей хордой.

1.5. Пусть *A* и *B* — точки пересечения прямой *KO* с окружностью, причём $KA < KB$ (см. рис. 1.5а).

а) Покажем, что наименьшим является расстояние от точки A до K. Отметим на окружности любую другую точку C и докажем, что $KA < KC$: Действительно, по неравенству треугольника $OC + CK > OK = OA + AK$. Так как $OA = OC = R$, то $CK > AK$.

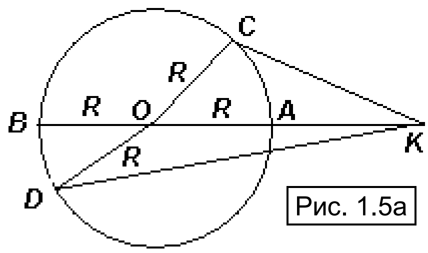


Рис. 1.5а

б) Покажем, что наибольшим является расстояние от точки B до K. Для этого отметим на окружности любую другую точку D и докажем, что $KB > KD$: Действительно, по неравенству треугольника $KO + OD > KD$. Так как $OD = OB = R$, то $KB = KO + OB > KD$:

В пункте а) можно рассуждать по-другому. Проведём касательную к окружности в точке A, тогда точки K и C лежат в разных полуплоскостях относительно неё (см. рис. 1.5б). Значит, отрезок KC пересекает касательную в некоторой точке E. Следовательно, KC > KE > KA (перпендикуляр короче наклонной, либо катет меньше гипотенузы).

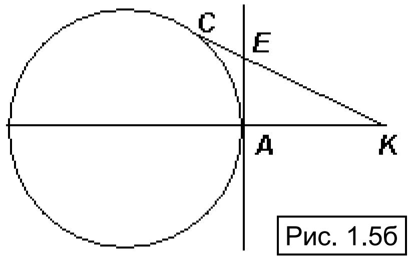


Рис. 1.5б

Для «продвинутых» школьников можно также подчеркнуть, что эта задача похожа на задачу 1.2. Если в условии задачи 1.2 радиус второй окружности гораздо меньше радиуса первой, то вторая окружность почти неотличима от её центра. Поэтому в задаче 1.5 можно считать, что точка K – это окружность нулевого радиуса. Тогда для решения задачи 1.5 можно воспользоваться результатами, полученными при решении задачи 1.2.

1.6. Пусть $AB = c$ – данный отрезок, C – вершина прямого угла (см. рис. 1.6). Расстоянием от C до AB является длина высоты CH прямоугольного треугольника ABC. Проведем его медиану CM, тогда $CH \le CM = 0{,}5AB = 0{,}5c$, причём равенство достигается, если точка H совпадает с точкой M. Это произойдет, если прямоугольный треугольник ABC будет равнобедренным. Следовательно, искомое значение равно $0{,}5c$.

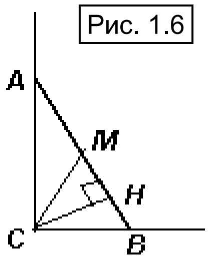


Рис. 1.6

Отметим, что в этом же случае достигается наибольшее значение площади треугольника ABC, так длина AB фиксирована, а высота, проведённая к этой стороне, наибольшая.

1.7. *Аналогично задаче 1.3 помогает разбиение на пары.*

Рассмотрим произвольную точку M, лежащую внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Тогда $MA + MC \ge AC$, причём равенство достигается, если M лежит на AC (см. рис. 1.7). Аналогично $MB + MD \ge BD$ и равенство достигается если M лежит на BD. Таким образом, $MA + MB + MC + MD \ge AC + BD$. Равенство достигается только в случае, когда точка M принадлежит обеим диагоналям четырёхугольника, поэтому искомой является точка пересечения его диагоналей.

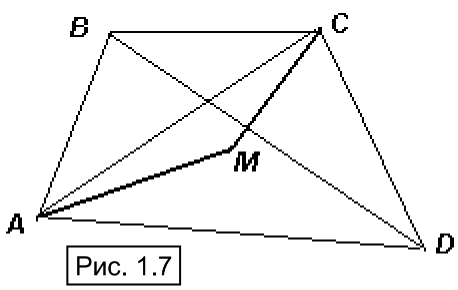


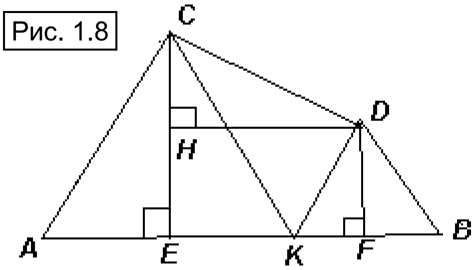
Рис. 1.7

Отметим, что все приведённые рассуждения останутся верными и в случае, если рассматривать точку, лежащую вне четырёхугольника или на его контуре.

Условие выпуклости четырёхугольника обязательно, иначе его диагонали не пересекаются.

1.8. а) Пусть E и F – середины отрезков AK и BK, тогда $EF = EK + FK = 0{,}5AK + 0{,}5BK = 0{,}5AB$. Следовательно, искомое расстояние не зависит от расположения точки K.

Рис. 1.8



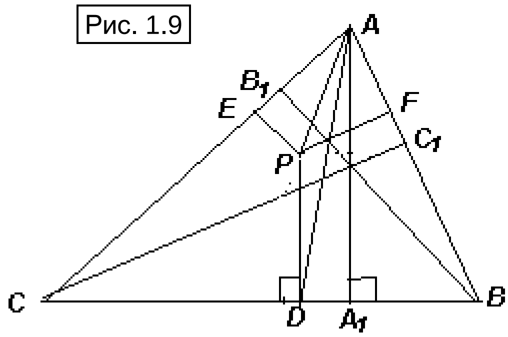
б) Проведём в треугольниках AKC и BKD высоты CE и DF соответственно (см. рис. 1.8). Отрезок EF является проекцией отрезка CD на прямую AB. Докажем, что ***длина проекции не превышает длины отрезка***. Действительно, проведём перпендикуляр DH к прямой CE. Так как $EFDH$ – прямоугольник, значит, $EF = DH \leq CD$ (перпендикуляр короче наклонной). Равенство достигается, если CD совпадает с DH, то есть, когда $CD \parallel AB$. Это означает, что высоты равносторонних треугольников равны, поэтому равны и треугольники, тогда $AK = BK$. Таким образом, K – середина отрезка AB.

Полезно подчеркнуть, что сравнение длин отрезка и его проекции по сути является обобщением сравнения гипотенузы и катета прямоугольного треугольника.

1.9. *И опять разбиение на пары (см. задачи 1.3 и 1.7).*

Рассмотрим произвольную точку P внутри остроугольного треугольника ABC. Опустим перпендикуляры PD, PE и PF на стороны BC; CA и AB соответственно (см. рис. 1.9). Проведём также высоты треугольника: AA_1; BB_1 и CC_1.

Рис. 1.9



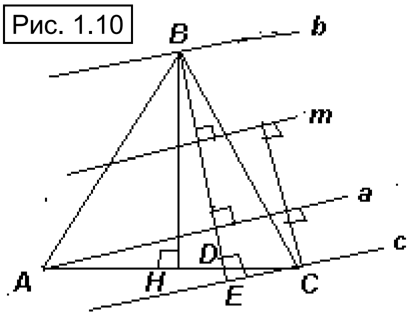
Используя неравенство треугольника и тот факт, что перпендикуляр короче наклонной, получим: $AP + PD \geq AD \geq AA_1$. Равенство достигается, если точка P лежит на высоте AA_1.

Аналогично доказывается, что $BP + P\text{Å} \geq BB_1$ и $CP + P\text{Å} \geq CC_1$. Таким образом, искомая сумма не меньше, чем сумма высот треугольника, причём равенство достигается только в случае, когда точка P лежит на каждой высоте. Следовательно, искомой является точка пересечения высот треугольника ABC.

Так как все углы треугольника – острые, то точка пересечения высот (ортоцентр) лежит внутри треугольника.

1.10. *Если учащиеся будут испытывать затруднения, то имеет смысл сделать подсказку, попросив сравнить искомые суммы для каких-либо двух параллельных прямых*

Рис. 1.10



Пусть прямая m – искомая. Докажем, что она должна содержать вершину треугольника. Пусть это не так, тогда проведём через вершины A, B и C прямые a, b и c соответственно, параллельные m. Пусть, например, прямая a лежит между b и c (см. рис. 1.10). Тогда сумма расстояний от вершин до прямой a меньше, чем до m, так как сумма расстояний до a от вершин B и C равна сумме расстояний от этих вершин до m (в случае, когда m не имеет общих точек с треугольником, сумма расстояний от B и C до a меньше, чем сумма расстояний от них до m).

Заметим, что сумма расстояний до прямой a от вершин B и C равна расстоянию между параллельными ей прямыми b и c, то есть равна длине общего перпендикуляра *BE* к этим прямым.. Пусть *BE* пересекает *AC* в точке *D*, а *BH* – высота треугольника. Тогда $BE \geq BD \geq BH$, поэтому равенство достигается, если прямые a и c совпадают с прямой *AC*.

Так как треугольник *ABC* – равносторонний, то искомых прямых три: *AC*, *BC* и *AB*.

Отметим, что в привёденном рассуждении в неявном виде содержится идея параллельного переноса, которая будет использована в занятии 2. Полезно также подчеркнуть, что решение задачи использует определение расстояния между параллельными прямыми.

Кроме того, утверждение задачи несложно обобщить для произвольного треугольника: искомая прямая содержит наибольшую сторону треугольника, так как высота, проведенная к ней – наименьшая.

Можно также использовать задачи Д1 – Д9, Д36.

Дополнительные задачи

Д1. Какое наименьшее значение может принимать периметр неравнобедренного треугольника с целыми длинами сторон?

Д2. Какое наибольшее значение может принимать наименьший угол треугольника?

Д3. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния между точками двух концентрических окружностей.

Д4. Из всех треугольников с данной суммой длин биссектрис найдите тот, у которого наибольшая сумма длин высот.

Д5. Из точки K вне данной окружности проведите прямую, которая пересечёт окружность в точках A и B так, что сумма $KA + KB$ будет наибольшей.

Д6. Две окружности пересекаются, A – одна из двух точек пересечения. Проведите через точку A секущую NT с концами N и T на разных окружностях так, чтобы её длина была наибольшей.

Д7. Среди всех треугольников ABC с данными сторонами $BC = a$ и $AC = b$, $a < b$, найдите тот, у которого наибольший угол имеет наименьшую возможную величину.

Д8. На отрезке PQ как на диаметре построена полуокружность. Впишите в получившуюся фигуру равносторонний треугольник наибольшего периметра.

Д9. В окружности с центром O и радиусом R и проведена хорда AB. Найдите окружность наибольшего радиуса, касающуюся меньшей дуги AB и хорды.

Литература и веб-ресурсы

1. Актершев С.П. Задачи на максимум и минимум. – С-Пб, «БХВ-Петербург», 2005.
2. Беляева Э.С., Монахов В.М. Экстремальные задачи. – М.: Просвещение, 1977.
3. Блинков А.Д., Блинков Ю.А. Геометрические задачи на построение. – М.: МЦНМО, 2010.
4. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и геометрии. – М.: МЦНМО, 2012.
5. Блинков А.Д., Гуровиц В.М. Непрерывность. – М.: МЦНМО, 2015.
6. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988.
7. Возняк Г.М., Гусев В.А. Прикладные задачи на экстремум. – М.: Просвещение, 1985.
8. Волчкевич М.А. Уроки геометрии в задачах. 7-8 классы. – М.: МЦНМО, 2016.
9. Всероссийские математические олимпиады школьников (Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б.). – М.: Просвещение, 1992.
10. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006 (Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А). – М.: МЦНМО, 2007.
11. Гашков С.Б. Геометрические неравенства. – М.: Книжный дом «Либроком», 2013.
12. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7 – 9 классов. – М.: МЦНМО, 2004.
13. Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим способом. – - М.: Просвещение, 1979.
14. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна - решения разные. – К.: Радянська школа, 1988.
15. Заочные математические олимпиады (Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л.). – М.: Наука, 1986.
16. Зетель С.И. Задачи на максимум и минимум. – Москва, Ленинград, ОГИЗ, 1948.
17. Карлюченко О.В., Філіпповський Г.Б. Радість співпраці. – Харків, Основа, 2017.
18. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. - М.: Наука, 1978
19. Кушнир И.А. Треугольник и тетраэдр в задачах. – К.: Факт, 2004.
20. Кушнир И.А. Геометрия. Планиметрия, Т1. – К.: Астарта, 1996.
21. Математические соревнования. Геометрия (Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П.). – М.: Наука, 1974.
22. Московские математические олимпиады (Федоров Р.М., Канель – Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В, под ред. Тихомирова В.М.). – М.: МЦНМО, 2006.
23. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Т1. Планиматрия. – М.: МЦНМО, 2008.
24. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч1. – М., Наука, 1991.
25. Прасолов В.В. История математики. Ч1, 2. – М.: МЦНМО, 2018/19.
26. Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. – М., МЦНМО, 2012.
27. Саранцев Г.И. Решаем задачи на геометрические преобразования. – М., «Столетие», 1997.
28. Сборник задач московских математических олимпиад (Леман А.А., под ред. Болтянского В.Г.). – М.: Просвещение, 1965.

29. Сборник задач киевских математических олимпиад (Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. – К.: Вища школа, 1984.
30. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967.
31. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.
32. Українські математичні олімпіади. Довідник. (Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В.). – К.: Вища школа, 1993.
33. Физико-математические олимпиады. Сборник. (Савин А.П., Брук Ю.М., Волошин М.Б., Зильберман А.Р., Семенчинский С.Г., Сендеров В.А.). – М.: Знание, 1977.
34. Филипповский Г.Б. Школьная геометрия в миниатюрах. – К.: «ГРОТ», 2002.
35. Фомин Д.В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. – С-Пб.: Политехника, 1994.
36. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986 (Библиотечка «Квант», выпуск 17).
37. Шарыгин И.Ф. Геометрия, 9 – 11 классы. Задачник. – М.: Дрофа, 1997.
38. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.
39. Элементы математики в задачах (под ред. Заславского А.А., Скопенкова А.Б., Скопенкова М.Б.). – М.: МЦНМО, 2018.
40. http://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php – олимпиады по геометрии имени И.Ф. Шарыгина.
41. http://olympiads.mccme.ru/regata/ – математические регаты.
42. http://olympiads.mccme.ru/ustn/ – устные олимпиады по геометрии.
43. www.problems.ru – база задач по математике.