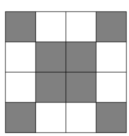
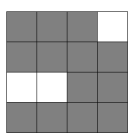
Занятие 7
Перекрашивания в противоположный цвет

Мы будем рассматривать раскраски клетчатых досок в два цвета. Задаётся список областей (часто это строки и столбцы, но бывают и другие). За ход разрешено во всех клетках области поменять все цвета на противоположные. Спрашивается, можно ли такими ходами из одной заданной раскраски получить другую. Способ решения зависит от ответа.

Нет. Ответ «нет» чаще всего получают с помощью инварианта. Напомним, что *инвариант* — это что-то (обычно величина) связанное с раскраской и не меняющееся в процессе разрешённых ходов. В этом занятии инвариантом чаще всего будет чётность числа чёрных клеток на всей доске (задача 7.1 б)) или в специально выбранной области (задачи 7.2, 7.4, 7.6, 7.7). Из стартовой раскраски можно получать только раскраски с тем же значением инварианта. Если у финальной раскраски значение другое, её получить нельзя.

Да. При ответе «да» в простых случаях предъявляют цепочку перекрашиваний (задача 7.1 а)). В сложных случаях цепочка велика и её описывают. Помогает такой приём: цепочку разбивают на группы шагов, при этом каждая группа добивается частичного, но наглядного улучшения. Если однотипная группа встречается несколько раз, её оформляют как подпрограмму. Чаще всего подпрограмма меняет цвет всего одной клетки (см. задачи 7.3, 7.5, 7.8). Пусть она применима к любой клетке. Тогда можно из стартовой раскраски получить любую другую, просто перекрашивая клетки по одной. При выполнении подпрограммы нам придётся затрагивать и другие клетки. Достаточно проследить, чтобы у нужной клетки цвет сменился нечётное число раз, а у остальных клеток — чётное. Заметим, что такой подпрограммы не может быть, если есть инвариант, сохраняющий чётность. Но тогда стоит поискать подпрограмму, меняющую цвет пары клеток.

Задача 7.1. Дана квадратная таблица 4×4, каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвета (см. рисунки). За один ход разрешается поменять все цвета в любой

а)  б) 

строке или любом столбце на противоположные. Можно ли за несколько ходов получить одноцветную доску?

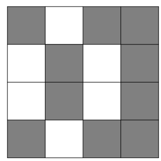
а) **Ответ:** можно.

Решение. Например, поменяем сначала цвета в центральных столбцах, а потом в верхней и нижней строках.

б) *Подсказка.* Какие значения может принимать количество чёрных клеток на доске? Как одна операция меняет это количество?

Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что при каждой операции чётность количества чёрных клеток на доске не меняется. Действительно, если в полоске было 0 чёрных клеток, то станет 4, если 1 — то 3, если 2 — то 2, если 3 — то 1, если 4 — то 0. Таким образом, количество чёрных клеток изменяется на чётное число. Но изначально закрашено нечётное число клеток, значит, ни 0, ни 16 чёрных клеток получиться не может.



Задача 7.2. Дана квадратная таблица 4×4, каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвета (см. рисунок). За один ход разрешается поменять все цвета в любой строке или любом столбце на противоположные. Можно ли за несколько ходов получить одноцветную доску?

Подсказка. Приём с чётностью закрашенных клеток для целой доски не срабатывает. Но может быть, он сработает для какой-то её части?

Ответ: нельзя.

Решение. Рассмотрим верхний правый квадрат 2×2. В нём три чёрные клетки. Докажем, что чётность числа чёрных клеток в этом квадрате не изменится. Каждая полоска либо пересекает наш квадрат по двум клеткам, либо вообще не пересекает. Как изменяется количество чёрных клеток? Если их в пересечении квадрата и полоски было x, то будет $2 - x$ (просто чёрными станут все белые клетки). Значит, чётность числа чёрных клеток не поменялась. Тогда в этом квадрате всегда будет нечётное число чёрных клеток, и нам не удастся сделать одноцветным даже верхний правый квадрат.

Задача 7.3. Клетки доски 7×7 покрашены в чёрный и белый цвета. За одну операцию можно поменять все цвета на противоположные в любом трёхклеточном уголке.

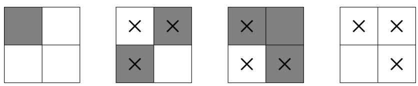
а) Изначально верхняя левая клетка чёрная, а остальные клетки белые. Докажите, что можно сделать белым весь квадрат 7×7.

б) Изначально одна клетка чёрная, а все остальные клетки белые. Всегда ли можно сделать белым весь квадрат 7×7?

в) Изначальная раскраска доски — шахматная. Можно ли перекрасить верхнюю левую клетку, не поменяв цвета остальных клеток?

г) Докажите, что из любой раскраски доски можно получить шахматную.

а) **Решение.** Можно поменять цвет угловой клетки, не меняя цвета остальных клеток. На примере показано изменение цвета угловой клетки. Каждым действием мы перекрашиваем три отмеченные крестиками клетки, цвет клеток показан после перекрашивания.



б) **Ответ:** всегда.

Решение. Выберем квадрат 2×2, содержащий чёрную клетку, и перекрасим три уголка квадрата, содержащие эту клетку.

► Дети, скорее всего, заметят, что «можно делать так же, как в п. а)». При обсуждении этого пункта нужно отметить, что у нас есть подпрограмма перекрашивания единственной чёрной клетки в квадрате 2×2. ◄

в) **Ответ:** можно.

Решение. Выберем квадрат 2×2, содержащий верхнюю левую клетку. Перекрасим три уголка квадрата, содержащие эту клетку.

В результате указанных действий цвет нашей клетки поменялся трижды (а значит, изменился), цвета клеток квадрата 2×2, соседних с нашей по стороне, поменялись дважды (а значит, не изменились), цвета остальных клеток не менялись.

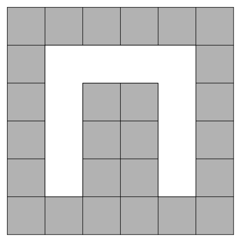
► Дети опять видят, что «можно делать так же, как в п. а)». При обсуждении мы фиксируем, что наша подпрограмма фактически меняет цвет одной клетки в квадрате 2×2, не меняя остальных. При доказательстве всплывает соображение чётности числа перекрашиваний. Сформулируем его в общем виде: «Если клетку перекрашивают чётное число раз, то её цвет не меняется, а если нечётное, то меняется». ◀

▶ Полезный вопрос: а если перекрашивания выполнять в другом порядке? Оказывается, это не влияет на результат. Ведь чётность перекрашиваний каждой клетки в итоге будет такой же. ◀

г) **Решение.** Применим подпрограмму для каждой клетки, у которой цвет отличается от цвета соответствующей клетки при шахматной раскраске.

▶ Можно обсудить с детьми, является ли такой путь перекрашивания экономным по числу операций. И если не является, то в чём преимущество такого способа? ◀

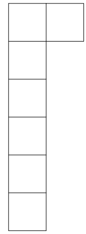
Задачи для самостоятельного решения



Задача 7.4. Из клетчатой доски 6×6 вырезали часть клеток в виде буквы П (см. рисунок), а остальные покрасили в чёрный и белый цвета. За одну операцию можно поменять все цвета на противоположные в любом трёхклеточном уголке. Какие из одиночных клеток можно перекрасить, не поменяв цвета остальных клеток?

Задача 7.5. У Пети и Васи есть квадрат 8×8. В каждой клетке квадрата лежит по монете. За одну операцию можно перевернуть все монеты в любом прямоугольнике, прилегающем к верхнему левому углу квадрата. Петя выбирает монету. Вася должен сделать так, чтобы выбранная монета перевернулась, а состояние остальных монет не поменялось. Но за каждую операцию Вася платит Пете 1 рубль. Какую наибольшую сумму может заработать Петя (Вася очень умный и старается потратить как можно меньше денег)?

Задача 7.6. Клетки доски 8×8 покрашены в чёрный и белый цвета. У Васи есть шаблон в виде буквы Г, состоящей из 7 клеток (см. рисунок). Вася может произвольным образом приложить по клеточкам этот шаблон к доске (шаблон можно поворачивать и переворачивать, но он не должен вылезать за край доски) и перекрасить клетки под шаблоном (чёрные в белый цвет, а белые в чёрный цвет). Может ли Вася с помощью описанных шагов из любой начальной раскраски доски сделать раскраску, где все клетки белые?



Задача 7.7. На диагонали квадратной таблицы 4×4 расставлены минусы, в остальных клетках — плюсы. За один ход можно поменять в любом столбце или в любой строке все знаки на противоположные. Можно ли, проделав несколько таких действий, получить таблицу с меньшим числом минусов?

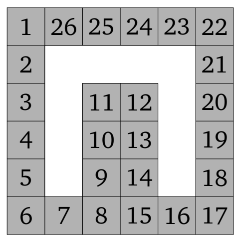
Задача 7.8. Лампочки и кнопки расположены в виде квадрата 10×10, по одной лампочке и кнопке на каждой клетке; при нажатии на кнопку меняется на противоположное состояние всех 19 лампочек на одной вертикали и на одной горизонтали с кнопкой.

Вначале часть лампочек выключена. Докажите, что можно добиться, чтобы были включены все лампочки.

► К задачам этого занятия можно добавить задачи Д81—Д91. ◄

Ответы, решения, комментарии

7.4. Ответ: клетки с 7 по 16 включительно (см. рисунок).



Решение. Для клеток 8—15 можно найти содержащий их квадрат 2×2 и воспользоваться подпрограммой из задачи 7.3.

Клетку 7 можно перекрасить следующим образом: сначала перекрашиваем уголок из клеток 7, 8, 9, затем применяем подпрограмму к клеткам 8 и 9.

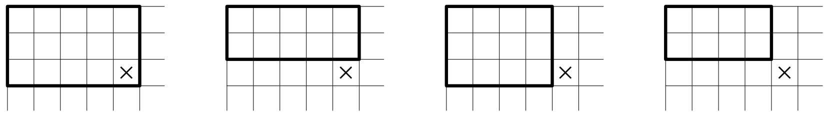
Аналогично можно перекрасить клетку 16.

Клетки (5, 6), а также (17, 18), (2, 1, 26), (21, 22, 23) всегда перекрашиваются вместе, а значит, отдельно поменять цвет какой-то одной из них не удастся.

Оставшиеся клетки 3, 4, 19, 20 вообще нельзя перекрасить.

7.5. Ответ: 4 рубля.

Решение. Можно поменять состояние любой монеты, не поменяв состояния остальных (на рисунке показаны прямоугольники, в которых нужно поменять состояния монет для выбранной клетки x).



Поэтому Вася потратит не более четырёх рублей.

Трёх рублей может не хватить.

1	2
3	4

Рассмотрим верхний левый угловой квадрат 2×2.

Нужно поменять состояние монеты 4.

Любая операция меняет состояние монеты 1. Так как в итоге оно не должно измениться, придётся сделать чётное число операций.

Двух операций не хватит: любая операция, меняющая состояние монеты 4, меняет и состояние монет 2 и 3. Потребуется вернуть их состояния, но этого нельзя сделать за одну операцию, не затронув монету 4.

Значит, потребуется как минимум 4 операции.

7.6. Ответ: нет.

Решение. Рассмотрим квадрат 2×2, расположенный в центре доски, и покрасим одну его клетку в белый цвет, а три другие — в чёрный. Поскольку при перекрашивании через клетки этого квадрата может проходить только длинная «ножка» шаблона, при каждом перекрашивании будут перекрашиваться либо две из них, либо ни одной. Нетрудно видеть, что при таких перекрашиваниях количество белых клеток в квадрате 2×2 будет всегда оставаться нечётным.

Путь к решению. Неудачные попытки перекрашивания подсказывают ответ «нет». Опять хочется найти такую область, которую наш шаблон может пересечь только в чётном количестве клеток. У Г-шаблона достаточно длинная ножка, поэтому центральные клетки только ножка и может накрыть — а это то же самое, что перекрашивание строк и столбцов. Центральный квадрат является *узким местом*, помогающим решить задачу.

7.7. *Подсказка*. Области, которые вы выбираете для поиска инварианта, не обязаны быть связными.

1	1	2	2
3	3	4	4
3	3	4	4
1	1	2	2

Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём нашу таблицу на четыре области, как показано на рисунке.

Каждую из областей полоска клеток может пересекать только в двух клетках (или не пересекать вовсе). Значит, чётность количества минусов не меняется в каждой из областей. Но изначально в каждой области было по одному минусу. Значит, хотя бы четыре минуса всегда будет на доске.

Путь к решению. Как можно доказать, что количество минусов нельзя уменьшить? Нужно разбить все клетки на области, в каждой из которых количество минусов нельзя уменьшить.

Дети уже понимают, что при перекрашивании в некоторой области чётного числа клеток чётность клеток каждого цвета в этой области не меняется. Осталось подобрать такие области, чтобы каждая линия (столбец или строка) пересекала область в чётном числе клеток и в каждой такой области был один минус.

7.8. Решение. Можно поменять состояние одной лампочки, не изменив состояние остальных. Для этого нажмём на кнопку нашей лампочки и ещё на 18 кнопок лампочек, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце. Состояние нашей лампочки поменялось (на неё подействовали 19 раз). Состояния остальных 18 лампочек, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце, не поменялось — на каждую из них воздействовали 10 раз. На все остальные лампочки подействовали по 2 раза, и их состояние тоже не изменилось.

Значит, можно по очереди поменять состояние всех выключенных лампочек.