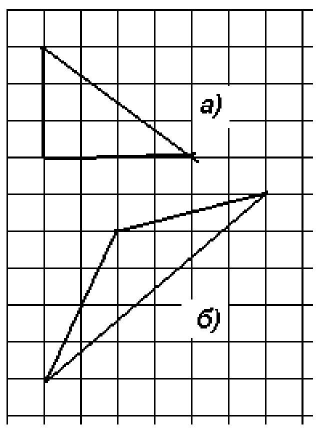
Занятие 1
Площади на клетчатой бумаге

Основная цель этого занятия – научить школьников находить площади некоторых многоугольников, изображённых на клетчатой бумаге с вершинами в узлах сетки, а также строить такие фигуры заданной площади. Отдельная задача – научиться сравнивать площади фигур, не прибегая к вычислениям.

В школьном курсе математики 5 класса изучается как находить площади прямоугольника и квадрата с заданными сторонами, на что и опираются решения большей части задач. Отметим, что равенство фигур и параллельность отрезков на клетчатой бумаге воспринимаются на наглядном уровне.

Вы наверняка умеете вычислять площади прямоугольников, стороны которых проходят по линиям сетки на клетчатой бумаге. На этом занятии мы прежде всего научимся вычислять площади некоторых других фигур, изображённых на такой бумаге.

Пример 1.1. Найдите площади треугольников, изображенных на рисунке слева.



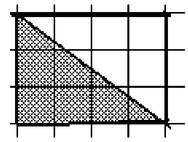


Рис. 1.1а

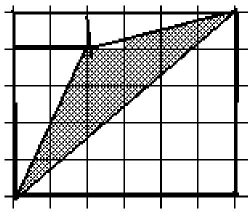


Рис. 1.1б

Решение. Достроим каждый из данных треугольников (*выделены цветом*) до прямоугольника так, как показано на рис. 1.1 а, б. Воспользуемся тем, что диагональ прямоугольника разбивает его на два равных прямоугольных треугольника.

а) Площадь прямоугольника равна $4 \cdot 3 = 12$ клеток, поэтому искомая площадь треугольника равна $12 : 2 = 6$ клеток.

б) Площадь прямоугольника равна $6 \cdot 5 = 30$ клеток, поэтому площадь «верхнего прямоугольного треугольника равна $30 : 2 = 15$ клеток. Из неё надо вычесть площадь прямоугольника, расположенного в левом верхнем углу, и площади двух прямоугольных треугольников. Площадь прямоугольника равна 2, а площади прямоугольных треугольников равны $4 \cdot 2 : 2 = 4$ и $4 \cdot 1 : 2 = 2$. Следовательно, искомая площадь треугольника равна $15 – (2 + 4 + 2) = 7$.

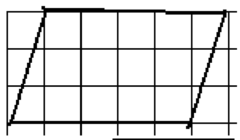
Ответ: а) 6 клеток; б) 7 клеток.

По сути, использовано свойство площадей, которое верно для любых фигур: площадь фигуры равна сумме площадей всех её частей.

Более строго – см. Приложение, в котором приведено конструктивное определение площади.

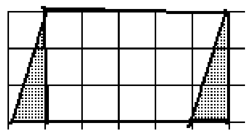
Отметим, что для периметров фигур аналогичное утверждение неверно. Например, периметр прямоугольника на рис. 1.1а меньше суммы периметров треугольников, на которые он разбит диагональю.

Пример 1.2. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.



Можно поступить аналогично решению примера 1.1, то есть заключить эту фигуру в прямоугольник, но есть и другие способы.

Рис. 1.2а



Решение. <u>Первый способ</u>. «Отрежем» прямоугольный треугольник слева и приставим его справа так, как показано на рис. 1.2а. Тогда искомая площадь фигуры равна площади прямоугольника размером 5×3 клеток, то есть равна 15.

<u>Второй способ</u>. «Разрежем» данную фигуру на две одинаковые части, после чего поменяем их местами (см. рис. 1.2б). Получим, что искомая площадь фигуры опять же равна площади прямоугольника размером 5×3.

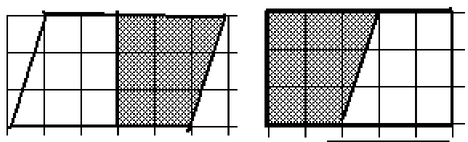


Рис. 1.2б

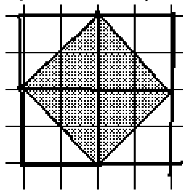
Ответ: 15 клеток.

Отметим, что рассмотренные способы решения оказались возможными, так как указанная фигура – четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны и равны. Такой четырёхугольник называется ***параллелограммом***.

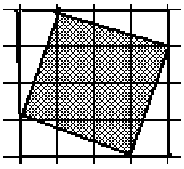
Можно также обсудить с учащимися, что площадь параллелограмма равна площади прямоугольника, у которого одна из сторон равна стороне параллелограмма, и равны расстояния между параллельными сторонами.

Пример 1.3. На клетчатой бумаге нарисуйте квадрат, площадь которого равна а) 8 клеток; б) 10 клеток.

Рис. 1.3а



Решение. а) Построим сначала квадрат со стороной 4 клетки. Его площадь равна 16 клеток. Отметим середины его сторон и соединим их последовательно (см. рис. 1.3а). Полученный квадрат (выделен цветом) имеет площадь 8 клеток, в чём несложно убедиться, если разбить исходный квадрат на 8 равных треугольников, из которых половина составляет искомый квадрат



б) *Полностью аналогичный способ решения здесь не сработает, так как построить квадрат площади 20 ничуть не проще, чем площади 10. Но можно построить другой квадрат и «отрезать» от него 4 равных треугольника, вершины которых лежат не в серединах квадрата.*

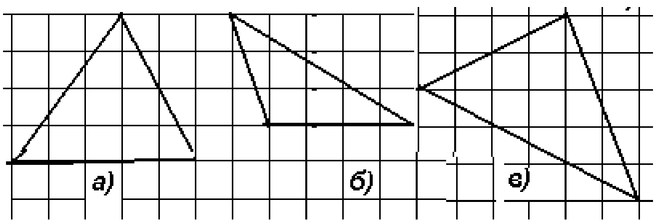
Рис. 1.3б

Опять построим квадрат площади 16, тогда «лишних» будет 6 клеток. Значит, каждый отрезаемый треугольник должен являться половиной прямоугольника площади 3 клетки. Это можно сделать, например, так, как показано на рис. 1.3б (искомый квадрат выделен цветом).

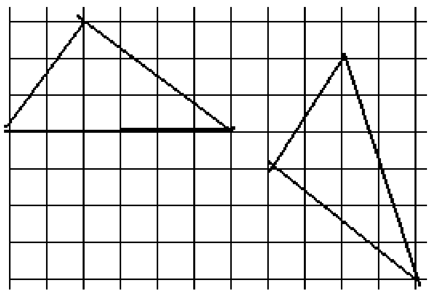
Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.1. Найдите площади треугольников, изображенных на рисунке.

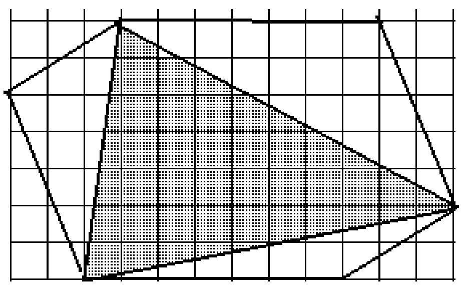
1.2. На клетчатой бумаге нарисуйте квадрат, площадь которого равна а) 5; б) 17; в) 18; г) 26 клеток.



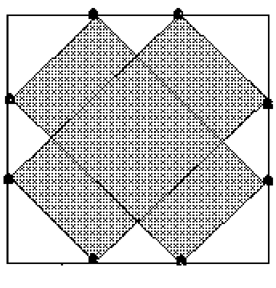
1.3. Не прибегая к вычислениям, докажите, что треугольники, изображённые на рисунке, имеют равные площади.



1.4. Противоположные стороны шестиугольника равны (см. рисунок). Не прибегая к вычислениям, докажите, что площадь закрашенного треугольника равна половине площади шестиугольника.

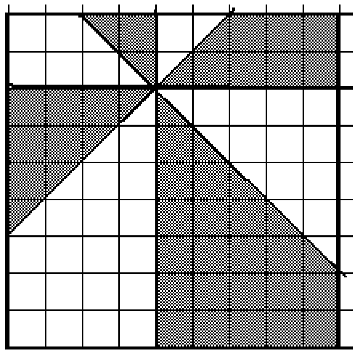


1.5. Каждая сторона квадрата разделена на три равные части (см. рисунок). Во сколько раз площадь квадрата больше площади закрашенной части?



1.6. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.

1.7. Через точку внутри квадрата проведены прямые по сторонам и диагоналям клеток (см. рисунок). Не прибегая к вычислениям, докажите, что равны площади закрашенной и не закрашенной частей.



Ответы, решения, комментарии

1.1. Ответ: а) 10 клеток; б) 6 клеток; в) 12 клеток.

Решение. Действуя аналогично решению примера 1.1, получим:

а) Искомая площадь равна 5·4 – (3·4 : 2 + 2·4 : 2) = 10 (см. рис. 1.4а).

Есть и более короткий способ. Этот треугольник можно разбить на два прямоугольных (см. рис. 1.4а). Тогда искомая площадь равна (3·4 + 2·4) : 2 = 10. Это решение позволяет убедиться, что площадь треугольника равна половине площади прямоугольника, имеющего такую же длину горизонтальной стороны и такую же высоту. Этот факт можно обсудить с «продвинутыми» школьниками и проверить, получив ответ в пункте б).

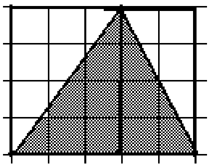


Рис. 1.4а

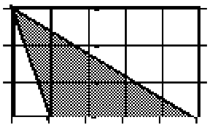


Рис. 1.4б

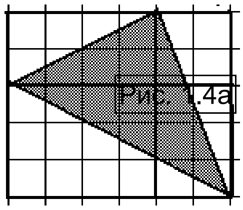


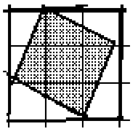
Рис. 1.4в

б) Искомая площадь равна 5·3 : 2 – 1·3 : 2 = (5·3 – 1·3) : 2 = 6 (см. рис. 1.4б).

в) Искомая площадь равна (6·5 – (6·3 + 5·2 + 4·2) : 2) = 12 (см. рис. 1.4в).

1.2. Ответ: см. рис. 1.5 а – г.

Рис. 1.5а



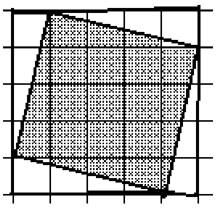


Рис. 1.5б

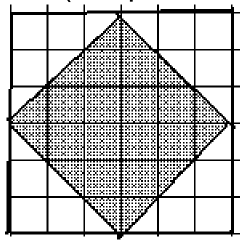


Рис. 1.5в

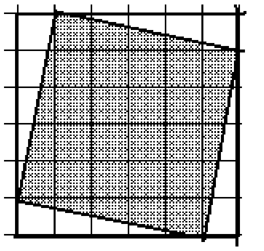
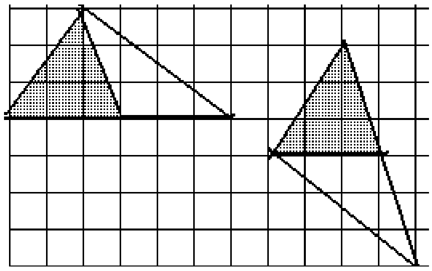


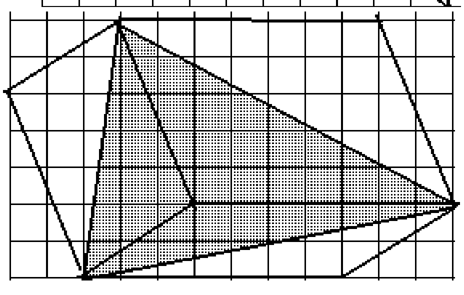
Рис. 1.5г

1.3. *В случае затруднений можно подсказать школьникам, что надо постараться разбить каждый треугольник на части так, чтобы части одного треугольника были соответственно равны частям другого. Похожим образом в примере 1.2 площадь параллелограмма сводилась к площади прямоугольника.*



Решение. Разобьём каждый из данных треугольников на два так, как показано на рис. 1.6. Тогда равны как закрашенные, так и незакрашенные пары треугольников. Значит, площади данных треугольников равны.

1.4. *Идея решения схожа с идеей решения задачи 1.3.*



Решение. Разобьём закрашенный треугольник на три треугольника так, как показано на рис. 1.7. Тогда данный шестиугольник будет разбит на шесть попарно равных треугольников. Следовательно, площадь закрашенной части равна площади не закрашенной, поэтому площадь исходного закрашенного треугольника составляет половину площади шестиугольника.

Рис. 1.7

1.5. *В случае затруднений можно подсказать школьникам, что квадрат можно разбить на клетки.*

Ответ: в полтора раза.

Решение. Проведём отрезки так, как показано на рис. 1.8. Вместе с уже имеющимися они разобьют квадрат на $4 \cdot 9 = 36$ равных прямоугольных треугольников, из которых $2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 = 24$ закрашено.

Учитывая, что 36 : 24 = 1,5, получим ответ.

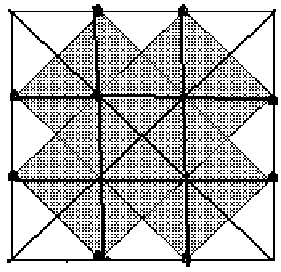


Рис. 1.8

1.6. Ответ: см., например, рис. 1.9 а, б.

Решение. Площадь квадрата 4×4 равна 16 клеток. В каждом из двух примеров: оставшиеся части – это два треугольника. Площадь одного из них равна половине площади прямоугольника размером 4×3 клетки, а площадь другого – половине площади прямоугольника размером 4×2. Таким образом, площадь шестиугольника равна 16 – 6 – 4 = 6 клеток.

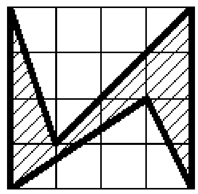


Рис. 1.9а

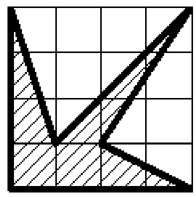


Рис. 1.9б

1.7. Решение. Переместим исходный квадрат со стороной 9 клеток, оставив на месте одну из закрашенных частей (см. рис. 1.10). Переместив в новый квадрат остальные
три закрашенные части, получим, что все четыре закрашенные части составляют ровно половину квадрата. Значит, и в исходном квадрате площади закрашенной и не закрашенной частей равны.

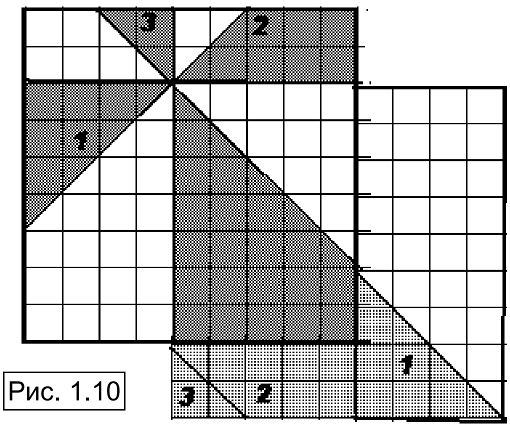


Рис. 1.10

Можно также использовать задачи Д1 – Д9.