О книге А. В. Шаповалова и И. В. Ященко «Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6 класса». — М.: МЦНМО, 2013

С. Р. Когаловский

About the book of A. V. Shapovalov and I. V. Jaschenko «Vertical mathematics for all. Preparing for the tasks C6 exam with a class 6». – M.: MCNMO, 2013

S. R. Kogalovskii

Рецензия на указанную в заголовке книгу.
Review specified in the title of the book.
Ключевые слова. *Продуктивное обучение математике. Метапредметная деятельность. Теоретическое мышление. «Высшие» и «низшие» формы мышления. Необходимость «низших» форм мышления.*
Key words. *Productive learning mathematics. Meta-object activities. Theoretical thinking. "Higher" and "lower" forms of thinking. The need to "lower" forms of thinking.*

Не иссякает поток работ, в которых предлагаются разнообразные средства совершенствования обучения тем или иным разделам школьного курса математики. Одни из них направлены на успешное освоение способов исследования квадратичных функций, другие – на успешное освоение способов решения тригонометрических уравнений, и т д. «Автономная» их направленность предопределяет их эмпирический характер. Многие из средств, предлагаемых в этих работах, испытаны основательной статистической проверкой. Но такая проверка, проводимая тоже «автономно», подтверждает эффективность предлагаемых средств только применительно к исследуемым ситуациям, рассматриваемым отдельно, вне целостного процесса обучения. И потому она не позволяет проверить, не достигается ли эффективность этих средств как направленных на «*ближние»* цели (на что направлено подавляющее большинство методических работ) ценою сужения возможностей движения к намного более значимым «*дальним»* целям. (К тому же статистические исследования едва ли могут

помочь раскрыть природу трудностей, с которыми на протяжении длительного времени сталкивается обучение математике).

Имеется немало и учебников, привлекающих тщательностью методической отработки, доступностью и для «слабых» школьников, но таких, что обучение, отвечающее их духу, направляет учащихся единственно на «ближние» цели, то есть на усвоение единственно их предметного содержания. Оно не поднимает учащихся над этим содержанием, не превращает это содержание и сам процесс его освоения в средства восхождения на метапредметный уровень, не ведет к превращению предметного содержания этих учебников в средства метапредметной деятельности. Оно уводит от восхождения на метапредметный уровень, а тем самым занижает и уровень освоения изучаемого предметного содержания, препятствует превращению его в Живое Знание. Такое обучение уводит учащихся от «дальних» целей: от развития их способностей к поисково-исследовательской деятельности, а тем самым от развития способностей к самообучению, к открытию новых знаний, от общего интеллектуального развития.

«Вертикальная математика», предстающая, на первый взгляд, как задачник по арифметике, снабженный образцами решений задач и комментариями к ним, занимает достойное место среди сравнительно небольшого количества книг, направляющих школьников на «дальние» цели. Педагогический талант ее авторов демонстрируют характер предлагаемых ими задач, формы их постановок, характер обсуждения способов их решения, блестяще воплощаемое эвристическое начало. Авторы предстают как достойные продолжатели творчества старых мастеров.

Но и в ряду таких книг «Вертикальная математика» выделяется комплексами задач как целостностями, в рамках которых и задачи, давно вошедшие в учебный обиход, обретают новое качество и эффективно служат освоению и развитию механизмов метапредметной деятельности.

Это служит и успешному освоению школьниками программного материала по математике и делает процесс его освоения процессом освоения стратегий поисково-исследовательской деятельности, а тем самым процессом их общего интеллектуального развития.

Эта книжка помогает «*научить школьников 6–8 классов и старше применять свои математические знания далеко за пределами обычной программы своих классов. Если традиционная, «горизонтальная» математика пополняет знания вширь, то «вертикальная» ведет ввысь и вглубь, прививая навыки анализа в нестандартных ситуациях. Собранные в книге задачи и приёмы позволяют* <осуществлять> *такое обучение ... на материале, близком к школьной программе и доступном широкому кругу учащихся*» - говорится в аннотации к ней. Представленный в ней способ обучения направляет на достижение «дальних» целей прежде всего посредством освоения и развития механизмов метапредметнй деятельности (включающей эвристику и праксиологические средства). Такое обучение осуществимо как процесс *сотворчества* учителя и учащегося, продуктом которого является обретение учащимся *способностей к творчеству*, не в последнюю очередь как способностей к эффективной поисково-исследовательской деятельности, как приобщенности к общим формам такой деятельности и ее стратегиям.

«Вертикальная математика» и сама является творческим продуктом, а значит, «*самодовлеющей предметностью*», «*нераздельной индивидуальностью*»[1] И потому попытки зримо ее представить здесь демонстрацией каких-либо ее фрагментов были бы обречены на неудачу. Конечно, те или иные особенности подхода к обучению, представленные в книге, те или иные ее фрагменты интересны и важны и сами по себе и достойны отдельного, специального исследования. Но как истинный творческий продукт она, вместе с ее главной ценностью, полнокровно постижима только через постижение ее как целого, не сводимого к свойствам

[1] А.Ф. Лосев. Диалектика творческого акта (краткий очерк)//Контекст 81. М. 1982 С. 49-78.

и функциям его частей, и притом как развивающегося целого. Для ее постижения необходимо погружение в ее текст, в его внутреннюю логику.

В книжке представлен широкий круг задач, от простых задач, подобных следующей:

> *На карточках были написаны числа 1, 2, 3, …, 111. Ваня взял себе все карточки с четными числами, а Таня — с нечетными. У кого из них сумма чисел на карточках больше и на сколько?*

до задач такого уровня:

> *Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.*
>
> *а) Может ли в результате получиться 0?*
>
> *б) Может ли в результате получиться 1?*
>
> *в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?*

Эта небольшая по объему книжка охватывает широкий круг предметов рассмотрения, от простейших арифметических задач до задач С6 ЕГЭ. Об этом говорят уже названия ее разделов:

Простая арифметика;

Уравнения и неравенства;

Делимость и остатки;

Дроби, доли, средние;

Логика и перебор;

Задачи на максимум и минимум;

Она завершается рекомендациями, относящимися к контролю и отладке решений сложных задач, и списком номеров тех из многих задач, успешно решаемых в процессе ее изучения, которые («как оказывается») являются пугающими многих старшеклассников задачами С6 ЕГЭ.

Процесс освоения этой книжки учащимися представим как состоящий из стадий, каждая из которых есть стадия освоения материала соответствующего раздела, состоящая из следующих двух подстадий:

1. Изучение приводимых способов решения задач (материал которых близок к школьному) и освоение в процессах их изучения необходимых теоретических средств. В последних, предстающих вначале как средства, относящиеся к определенному предметному содержанию, раскрывается их метапредметное, существо, и они осваиваются как широко используемые механизмы поисково-исследовательской деятельности.

2) Основной способ работы — самостоятельное решение учащимися предлагаемых задач, сравнение ими своих решений с приведенными в книге, осмысление приведенных решений и комментариев к ним.

Итогом каждой стадии является рождение соответствующего ей творческого продукта, каковым является новый уровень освоения стратегических (и тактических) средств поисково-исследовательской деятельности учащегося.

Авторы не используют и не предполагают использование *повторения* изучаемого материала. Они не предполагают использования каких-либо средств его *закрепления* (в традиционном поимании). Необходимость таких средств снимается его углублением и развитием посредством обращения к соответствующим комплексам задач.

По сути, авторы сообразуются с тем, что А. Ф. Лосев назвал агенетичностью творческого продукта. «*Генетическое объяснение вещи, удобное и нужное в одних отношениях, является неудобным и вредным в других, а именно в отношении цельной вещи, индивидуальной, нераздельной и неповторимой, которая только и способна объяснить сама себя*»[2] Точно также с помощью последовательности заданий, подобных задачам, использованным в процессе обучения, невозможно проверить, сформирован ли творческий продукт. Успешное выполнение школьником таких заданий может быть результатом его выучки, но не результатом сформированности способностей нового уровня к поисково-исследовательской деятельности на базе освоения новых ее стратегий и тактик, на базе освоения новых ее

[2] А.Ф. Лосев. Диалектика творческого акта (краткий очерк)//Контекст 81. М. 1982 С. 49-78.

уровней. Показателем их сформированности является предъявление школьником решений задач, демонстрирующих реализацию таких способностей в новых для него ситуациях. Обращение к таким задачам является и средством развития способностей к поисково-исследовательской деятельности. Авторы книги следуют этому. Их неуклонное, не замутняемое частностями, следование названной выше роли предлагаемых ими комплексов задач (прежде всего как направляющих на развитие первомеханизмов математической деятельности, в числе которых математическое моделирование, не в последнюю очередь – знаковое моделирование, и комбинаторные механизмы), относящихся к «разноприродным» ситуациям, ведет к освоению и развитию механизмов метапредметной деятельности.

Читатели книжки подводятся к значимым обобщениям, но как бы уводятся от их понятийного выражения и работают с их «наивной» *деятельностной* формой (и визуальными образами). Они как бы уводятся от теоретического плана, от приобщения к теоретическому уровню мышления. Но здесь более чем уместно заметить, что теоретическое мышление - это сложный, многомерный комплекс, включающий в качестве своих неотъемлемых компонентов разные формы мышления, как «высшие», так и «низшие», разные логики, разные формы рациональности. Оно начинается уже на уровне образного мышления, могущего оказывать преображающее влияние на взаимодействующие с ним формы мышления.

Сосредоточение на метапредметной стороне дела, рассматриваемой в «наивной» деятельностной форме, уход от поспешного приобщения учащихся к понятиям, даже таким, которые представляли бы и фиксировали напрашивающиеся продуктивные обобщения, позволяет уже на самой элементарной математической базе высвечивать продуктивные формы работы механизмов математической деятельности и открывает возможность их более полнокровного освоения и развития, возможность более эффективного освоения метапредметной деятельности и тем самым

восхождения на теоретический уровень мышления и более полнокровного его освоения. Ведь на стадии рождения интуитивной идеи, явившейся истоком осваиваемого метода и представляющего его строгого математического понятия, и ее первичного использования особенно зримо предстает ее метапредметное существо.

Еще более зримо это метапредметное существо представимо в самом процессе восхождения от интуитивной идеи к понятию. В сформированном понятии, в его превращенности в «обиходное» орудие поисково-исследовательской деятельности это существо «опредмечивается» и потому пребывает обычно в скрытой форме. Оно скрывается, «уходит в тень», вместе с процессом формирования понятия как идеальной формы идеи, как ее продуктивной модели, обретающей онтологический статус и становящейся ее внутренней формой, эйдосом в платонистском смысле.

Поспешность же в обращении к строгому понятию уводит от вопроса «как?», то есть от обращенности к формам представления и реализации этой идеи, к их развитию. В результате понятийная форма воплощения идеи становится «орецептуренной» формой и превращается в застывший стереотип[3]. Такая поспешность подавляет развитие метапредметного плана. Более того, она ведет к его омертвлению.

Предлагаемый в книжке подход отличается от бытующего, представленного в большинстве учебников и следующего пониманию Л. С. Выготским, перехода от житейского понятия к научному как такого *преодоления* натуральной формы мышления, котороя представляет собой *«не эволюционный процесс, а сдвиг и скачок, в котором натуральная и культурная (реальная и идеальная) формы вступают в конфликты и*

[3] Здесь уместно заметить также, что знаковое моделирование, являющееся существенным компонентом математической деятельности на всех ее уровнях, несет в себе метапредметное начало и нередко открывает возможность усмотрения глубинных свойств исследуемого объекта посредством усмотрения и использования «визуально» проявленных структурных особенностей его знаковой модели, а тем самым возможность сведения «высших» форм математической деятельности к «низшим».

коллизии»[4]. В результате такого перехода научное понятие предстаёт как *противостоящее* житейскому, культурная (идеальная) форма - как *противостоящая* натуральной (реальной). Это переход, осуществляемый прямым *введением* научного понятия, его *привнесением*. Краткие предварительные пояснения**,** помогающие первичному пониманию вводимого понятия вне связи с его истоками, не меняют дела и не способствуют освоению *«нового и высшего плана мысли»* как нового и высшего.

Процессы приобщения к строгим понятиям, снимающие конфликты между научным понятием и представлениями, протопонятиями, являющимися его истоком, между натуральной и культурной формами, должны быть процессами развития наличествующих форм мышления учащихся, ведущего к рождению культурных форм, представляемых формируемыми (строгими) понятиями, носителями идеального. «Тогда будут становиться существенно иными отношения между реальной и идеальной формами и сам характер идеального, поскольку сформированное понятие не будет представать как противостоящее протопонятию, послужившему его истоком, а будет формироваться и работать как *его* идеальная форма. Идеальное в таких процессах будет представать не как предсуществующее, а как формируемый процессом развития реального один из вариантов идеального. Процессы освоения строгих общих понятий становятся при этом процессами движения от неразвитого идеального к развиваемому и преображаемому идеальному»[5]. Важно и то, что такие процессы будут служить образцами построения продуктивных моделей исходных представлений. Подход авторов книжки, как представляется, согласуется с этим.

---

[4] Эльконин Б. Д. Введение в психологию развития. М. 1994. С. 11. Такое понимание совпадает с пониманием так процессов Л. С. Выготским.

[5] Когаловский С. Р. К проблеме модернизации математического образования// Школьные технологии. 2011. №6. С. 93-99.

«Наивные» формы мышления необходимы на всех уровнях обучения математике. Они являются необходимым компонентом теоретического мышления. К тому же, согласно Х. Вернеру, «*возврат (регрессия) к примитивным формам познания в определенных условиях является необходимым механизмом дальнейшего развития*»[6]. Всей своей данностью «Вертикальная математика», использующая только язык школьной арифметики, манифестирует продуктивность сосредоточения на «низших» формах математической деятельности и их развития, его необходимость для полнокровного освоения ее «высших» форм, тот дух и ту форму, в каких такое сосредоточение должно осуществляться.

Авторы не провозглашают громких деклараций. Они не противопоставляют предлагаемый ими подход к обучению математике бытующим подходам, но он предстает как существенно отличающийся от них и даже как противостоящий им. Существо его отличия состоит в пронизывании обучения метапредметной деятельностью, в освоении математических знаний как метапредметных средств поисково-исследовательской деятельности**.** Пронизывание обучения метапредметной деятельностью ведет к развитию механизмов понимания, необходимому для снятия трудностей, с которыми сталкивается обучение математике. Осваиваемые метапредметные знания и умения становятся праксиологическими знаниями. Важно и то, что они превращаются в *метакогнитивные* механизмы, то есть в механизмы управления ходом текущей интеллектуальной деятельности[7]. Это ведет к далеко идущему ее развитию.

«*Книга предназначена для самостоятельной работы школьников… Учителя могут на её основе вести кружки в 6–9 классах и готовить к ЕГЭ учеников 10–11 классов. Задачи из книги могут быть использованы как*

---

[6] Цит. по книге Н. И. Чуприковой «Психология умственного развития: Принцип дифференциации». – М. : Столетие, 1997., с. 86

[7] Когаловский С. Р. Место и роль метапредметной деятельности в обучении математике// Школьные технологии. 2014. №3. С. 93-99.

дополнительные (а иногда и подготовительные) при изучении соответствующих тем школьной программы» -говорится в аннотации. В действительности эта книге несет в себе большее: она может служить эффективным средством коррекционно-развивающего обучения. А главное – в ней видится набросок продуктивного учебника по математике, способствующего развивающему самообучению школьников и направляющего на восхождение к теоретическим знаниям и их развивающееся освоение посредством обучения через задачи, через обращения к развивающимся системам задач и анализ подходов к их решениям и самих решений. Одновременно в ней видится талантливое пособие по педагогике математики. И потому она будет весьма полезна не только школьникам, и слабо успевающим и продвинутым, но и учителям математики, и учителям начальной школы.