

А. В. Шаповалов  
И. В. Яценко

Вертикальная  
математика  
для всех

Готовимся к задаче С6 ЕГЭ  
с 6 класса

Издательство МЦНМО  
2013

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

Ш24

**Шаповалов А. В., Яценко И. В.**

Ш24 Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6 класса. — М.: МЦНМО, 2013. — 128 с.  
ISBN 978-4439-0579-2

Эта книга поможет научить школьников 6–8 классов и старше при- менять свои математические знания далеко за пределами обычной про- граммы своих классов. Если традиционная «горизонтальная» математика пополняет знания вширь, то «вертикальная» ведет ввысь и вглубь, при- вивая навыки анализа в нестандартных ситуациях. Собранные в книге задачи и приёмы позволяют начать такое обучение заранее и на материа- ле, близком к школьной программе и доступном широкому кругу учащихся. В итоге пугающая многих задача ЕГЭ С6 становится несложным упраж- нением.

Книга предназначена для самостоятельной работы школьников, будет полезна и их родителям. Учителя могут на её основе вести кружки в 6–9 классах и готовить к ЕГЭ учеников 10–11 классов. Задачи из книги могут быть использованы как дополнительные (а иногда и подготовительные) при изучении соответствующих тем школьной программы.

ББК 22.1я72

*Александр Васильевич Шаповалов*

*Иван Валериевич Яценко*

ВЕРТИКАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ВСЕХ. ГОТОВИМСЯ К ЗАДАЧЕ С6 ЕГЭ С 6 КЛАССА

Подписано в печать 4.9.2013 г. Гарнитура Charter ITC. Формат 60×90/16.  
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 8. Тираж 5000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования  
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241-74-83, (495) 745-80-31.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».  
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

© А. В. Шаповалов, И. В. Яценко, 2013.

ISBN 978-4439-0579-2

© МЦНМО, 2013.

## ВВЕДЕНИЕ

Математическая подготовка состоит из двух частей: знания математических формул и теорем и умения их применять. Важно уметь математически думать как в стандартных, так и в нестандартных ситуациях. Последнему, к сожалению, учат достаточно редко. Бытует заблуждение: это нужно лишь тем, кто обладает творческим мышлением и собирается посвятить свою жизнь точным наукам. Процент творчески мыслящих учеников действительно невелик, из них выходят победители олимпиад. Любопытно, однако: в науку из них идут лишь немногие, большинство оказываются востребованы в массовых профессиях — программисты, менеджеры, экономические аналитики. Но и менее успешные участники олимпиад, летних школ и математических кружков находят себя в этих профессиях. Востребованным оказывается умение разбираться в нестандартных ситуациях. А оно не столь уж редко. Вспомните, ведь и вам наверняка приходилось в такие ситуации попадать: отменили электричку, забыли дома кошелек, ключ перестал открывать дверь... В общем, стандартный способ перестал работать, но вы как-то разобрались и выкрутились. Скажем, применили какие-то знания или средства, о которых в нормальной ситуации и не вспоминали.

Ровно так же решаются и нестандартные задачи, в частности пресловутая задача С6 из ЕГЭ. Математических знаний для нее нередко хватает и семикласснику, но подводит неготовность разбираться в ситуации. Вот эту-то готовность кружковцы и олимпиадники в себе постоянно и тренируют, и она потом им помогает в жизни даже тогда, когда содержимое уроков оказывается забытым.

Традиционный курс математики в школе содержит, конечно, навыки анализа ситуации. Однако потребность в таких навыках возникает сравнительно редко и нерегулярно. Темы, где навыки нужны, заслуженно считаются сложными (например, математический анализ или решение неравенств с рациональными функциями). Кружковцы же с этими темами обычно справляются гораздо успешнее. Хитрость тут в том, что навыки и сложный материал они изучают по отдельности: навыки приобретаются в младших

классах и на простом и интересном в этом возрасте материале, а сложный материал в старших классах ложится на уже подготовленную почву. Помогает и то, что привыкание к непростым навыкам происходит без спешки, в течение длительного периода, а не за короткие недели, отведенные на усвоение темы.

Данная книга призвана помочь заинтересованным школьникам научиться таким навыкам, а учителям — заблаговременно научить. Книга доступна школьникам начиная с 6 класса, подавляющее число задач по материалу относятся к алгебре 7–8 класса. Материал задач достаточно близок к школьному, но авторы старались выбирать интересные формулировки. Основной способ работы — самостоятельное решение задач, затем сравнение своих решений с приведенными в книге, чтение и осмысление решений и комментариев. Школьники могут заниматься сами или консультируясь с учителями, родителями, продвинутыми сверстниками. Учителя могут давать задачи как дополнительные на уроках, а также вести по материалам книги факультативы и кружки.

Мы надеемся, что книга не только повысит успеваемость проработавших ее школьников, но и поможет преодолеть барьер между школьной и кружковой математикой, а также барьер между изучением математики и ее применением.

### Структура книги

Книга разбита на 6 разделов: 1. Простая арифметика. 2. Уравнения и неравенства. 3. Делимость и остатки. 4. Дроби, доли, средние. 5. Логика и перебор. 6. Задачи на максимум и минимум.

В каждом разделе есть несколько озаглавленных тем, представленных 3–4 задачами с подробными решениями и комментариями, а также список номеров дополнительных задач, подходящих по теме. После тем в каждом разделе идут дополнительные задачи раздела, среди которых есть и некоторые пункты задач Сб. Они специально не выделены, чтобы показать, что в них нет ничего особого по сравнению с соседними задачами — ни по формулировкам, ни по трудности. Ответы и решения дополнительных задач вынесены в последнюю главу каждого раздела.

Помните, что дополнительные задачи предназначены для вдумчивого освоения тем и изложенных в них приемов. Они упорядочены по сложности, но приемы идут вразнобой. Не обольщайтесь частичными решениями: важно получить и правильный ответ, и его обоснование. Если найден только ответ, постарайтесь правильно объяснить (хотя бы самому себе) путь к нему. Если правильно выбран прием, а ответ неверный, постарайтесь понять причину ошибки. И учитесь придумывать способы проверять ответ, не заглядывая в книгу. Советы по проверке вы найдете в конце книги. Там же есть список использованных задач ЕГЭ.

## РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Блинков. Классические средние в арифметике и геометрии. М.: МЦНМО, 2012. (Школьные математические кружки).
2. Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукишин, К. М. Столбов, И. В. Яценко. ЕГЭ 2013. Математика. Задача Сб. Арифметика и алгебра. М.: МЦНМО, 2013.
3. С. А. Дориченко, И. В. Яценко. LVIII Московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач. М.: Теис, 1994.
4. Л. Э. Медников. Четность. М.: МЦНМО, 2009. (Школьные математические кружки).
5. А. И. Сгибнев. Делимость и простые числа. М.: МЦНМО, 2012. (Школьные математические кружки).
6. П. В. Чулков. Арифметические задачи. М.: МЦНМО, 2009. (Школьные математические кружки).
7. А. В. Шаповалов. Как построить пример. М.: МЦНМО, 2012. (Школьные математические кружки).
8. А. В. Шаповалов. Принцип узких мест. М.: МЦНМО, 2012.

## 1. ПРОСТАЯ АРИФМЕТИКА

Появление калькуляторов и компьютеров выявило, что искусство подсчета состоит вовсе не в умении выполнять четыре арифметических действия с данными числами: компьютеры делают это надежнее и быстрее. Но компьютер не может понять, с какими числами и какое действие надо совершить, чтобы получить результат, *нужный нам*. Попробуем с этим разобраться. Есть несколько простых приемов. Их полезно знать, хотя можно до таких приемов и самостоятельно догадаться. Важно усвоить, однако, что приемы эти — не набор ключей, перебирая которые, рано или поздно откроешь дверь, то есть решишь задачу. Могут быть решения, в которых не используется ни один из этих приемов, а могут использоваться и несколько. Поэтому наша цель — не только научиться приемам вычислений, но и освоить умение разбираться в связях внутри задачи. А когда разобрался, подходящий прием сам придет на ум.

### **Отбрось лишнее. Эффект «плюс-минус один».**

#### **Дополнение**

В цирке. Нам для представления нужен одногорбый верблюд. Но в заявке лучше попросить двугорбого: все равно один горб «срежут».

При подсчетах бывает выгодно подсчитать больше чем надо, а потом лишнее вычесть. Главное — разобраться, что именно надо вычитать.

В следующей задаче часто ошибаются на 1.

**1.1.** Первый день каникул — 15 февраля, последний — 27 февраля. Сколько дней в каникулах?

*Ответ:* 13.

*Решение.* С 1-го по 27-е февраля — 27 дней. Из них в каникулы не входят дни с 1-го по 14-е, то есть 14 дней. Их надо вычесть. Значит, в каникулах  $27 - 14 = 13$  дней.

*Комментарий.* Типичная ошибка: вычитая 15 из 27, получают 12. Но давайте проверим способ решения «на малых числах» (такую проверку программисты называют отладкой): если праздники

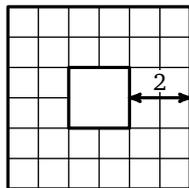
с 15 по 17 февраля включительно, то вычитание  $17 - 15$  дает ответ два, а непосредственный подсчет (отдыхаем 15-го, 16-го и 17-го) — 3 дня. Интуиция подсказывает, что и к 12 надо добавить 1. Но лучше, конечно, разобраться, что из чего вычитать. Чтобы избежать ошибки, ответьте на вопрос: какие дни в феврале *не* входят в каникулы? Сколько таких дней? Наглядно запомнить прием помогает картинка чисел, выходящих из-за забора (см. рис.)



**1.2.** В клетчатой рамке  $6 \times 6$  толщиной в две клетки — 32 клетки (см. рисунок). А сколько клеток в рамке  $16 \times 16$  такой же толщины?

*Ответ:* 112.

*Решение.* Представим, что рамка вырезалась из квадрата  $16 \times 16$  (в нем было 256 клеток). Тогда была вырезана квадратная дырка. Отступая на 2 с двух сторон, мы уменьшили размер дырки на 4 по сравнению с исходным квадратом, то есть вырезали квадрат  $12 \times 12$  (в нем 144 клетки). Итак, осталось  $256 - 144 = 112$  клеток.



*Комментарий.* Типичная ошибка: считают, что ширина и высота дырки равна 14. И здесь помогает отладка: посмотрев на пример в условии, увидим, что размер дырки меньше размера внешнего квадрата на 4, а не на 2.

**1.3.** Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 *не* делится на 50?

*Ответ:* 980.

*Решение.* Легче вычислить, сколько чисел делится на 50. Ясно, что делится каждое 50-е число:  $1 \cdot 50, 2 \cdot 50, \dots, 20 \cdot 50 = 1000$ . От-

бросив эти 20 чисел, получим, что  $1000 - 20 = 980$  чисел не делятся на 50.

*Комментарий.* Свойство «делится на 50» разбивает числа на два множества: те, что делятся, и те, что не делятся. Так можно разбить множество с помощью любого свойства: на те элементы, для которых оно выполняется, и на те, для которых оно не выполняется. Эти два множества являются *дополнением* друг к другу. Обычно количество элементов одного из множеств напрямую вычислить легче. Тогда количество элементов другого множества вычисляют путем *вычитания дополнения из целого*.

См. также задачи 1.10, 1.13, Д1.1, Д1.2, Д1.3, Д1.5, Д1.6, Д1.7, Д1.8, Д1.9, Д1.11, Д1.12, Д1.15, Д1.16, Д1.17, Д1.20, 2.1, 2.7, Д5.20б, Д6.8.

### Считай по частям. Включение-исключение

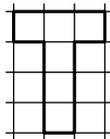
При подсчетах можно разбивать множество на удобные части, то есть такие, для которых считать легко. Если части перекрываются, то посчитанное дважды надо вычесть.

1.4. Этим летом я приехал к морю утром 25 июня, а уехал вечером 12 августа. Сколько дней я пробыл у моря?

*Ответ:* 49.

*Решение.* Разумно разбить дни у моря по месяцам: июнь, июль, август. Дни августа — с 1-го по 12-е, их всего 12. В июле входят все дни, то есть 31 день. В июне из 30 дней надо отбросить дни не у моря: с 1-го по 24-е, останется  $30 - 24 = 6$  дней у моря. Итого у моря я был  $6 + 31 + 12 = 49$  дней.

1.5. У буквы Т на рисунке ширина 3 клетки, высота — 4 клетки, а толщина палочек — одна клетка. А сколько клеточек в букве Т, у которой ширина 13 клеток, высота — 20 клеток, а толщина палочек — 3 клетки?



*Ответ:* 90.

*Решение.* Разобьем Т на два прямоугольника, отрезав верхнюю перекладину. Перекладина — это прямоугольник  $3 \times 13$  (в нем 39 клеточек), а оставшаяся часть ножки —  $17 \times 3$  (здесь 17 получено как  $20 - 3$ , а в прямоугольнике 51 клетка). Итого в букве Т  $39 + 51 = 90$  клеточек.

*Комментарий.* Разумеется, можно разбить и на 3 части: среднюю палочку  $20 \times 3$  и два одинаковых куска от верхней перекладины  $3 \times 5$ . Или заключить Т в прямоугольник  $20 \times 12$  и выкинуть два не входящих в Т малых прямоугольника под перекладиной.

1.6. В классе все любят играть в теннис или в шахматы. Шахматы любят 10 учеников, теннис — 15 учеников, и то, и другое — 6 человек. Сколько всего учеников в классе?

*Ответ:* 19.

*Решение 1.* Разобьем учеников на 3 группы: группа Ш любит только шахматы, группа Н — только теннис, а группа НШ — обе игры. В НШ 6 человек. В Ш и НШ вместе 10 человек, поэтому в Ш  $10 - 6 = 4$  человека. В Н и НШ 15 человек, поэтому в Н  $15 - 6 = 9$  человек. Итого, в трех группах (а значит, и в классе)  $6 + 4 + 9 = 19$  человек.

*Решение 2.* Играть любят все, поэтому, сложив  $10 + 15 = 25$ , мы учтем всех в классе. При этом 6 любителей двух игр были учтены по 2 раза. Значит, результат на 6 больше нужного, то есть на самом деле в классе  $25 - 6 = 19$  учеников.

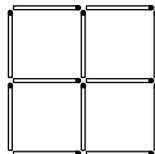
*Комментарий.* Формула включения-исключения позволяет подсчитать число объектов, обладающих хотя бы одним из двух свойств: складываем число объектов для каждого свойства и вычитаем «лишние», то есть те, которые обладают двумя свойствами одновременно (мы ведь их посчитали дважды).

См. также задачи Д1.14, Д1.15, Д1.17, Д1.20.

### Одинаковые группы и умножение

Умножение хорошо работает там, где удастся разбить множество на одинаковые по численности группы. При этом неважно, что групп будет много, лишь бы могли точно посчитать их количество и размер.

1.7. Если из спичек сложить клетчатый квадрат  $2 \times 2$ , то потребуется 12 спичек (см. рис). А сколько спичек надо, чтобы сложить клетчатый квадрат  $12 \times 12$ ?



*Ответ:* 312.

*Решение.* Клетчатый квадрат состоит из горизонтальных и вертикальных отрезков. Длина такого отрезка равна стороне квадрата, поэтому в каждом — по 12 спичек. Вертикальных отрезков на один больше чем клеток в нижнем ряду: самый левый и по одному для правой стороны каждой клетки, то есть их 13. Столько же и горизонтальных отрезков. Значит, всего спичек  $12 \cdot 13 \cdot 2 = 312$ .

**1.8.** В дремучем лесу вот уже более 1000 лет живет Волшебная елка. Известно, что каждое утро на ней вырастают 100 иголок и каждая иголочка живет ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько же иголок на Волшебной елке сегодня в полдень?

*Ответ:* 146100.

*Решение.* Иголки, которые сейчас на елке, появились за последние 4 года. Здесь год — это промежуток между двумя одинаковыми датами, например между 20 июля и следующим 20 июля. Если между датами вклинилось 29 февраля, то в году 366 дней, иначе — только 365. Так как 29 февраля вклинивается ровно раз в 4 года, в четырех годах  $365 + 365 + 365 + 366 = 1461$  день. В каждый из этих дней выросло по 100 иголок, значит, всего на елке  $100 \cdot 1461 = 146100$  иголок.

**1.9.** Между двумя селами по дороге 20 км. Два охотника вышли навстречу друг другу, каждый идет со скоростью 5 км/ч. Вместе с первым выбежала собака со скоростью 8 км/ч, добежала до второго охотника, развернулась, добежала до первого охотника, развернулась, снова добежала до первого охотника, и так бегала туда-сюда, пока охотники не встретились. Сколько всего километров пробежала собака?

*Ответ:* 16.

*Решение.* Охотники встретились посередине, каждый прошел по 10 км, значит, шел  $10 : 5 = 2$  часа. За 2 часа собака пробежала всего  $8 \cdot 2 = 16$  км.

*Комментарий.* Попытка разбить путь на части между встречами приводит к сложению большого числа неравных слагаемых. Здесь надо отбросить ненужные подробности и понять, что важны только скорость собаки и время беготни, а куда она при этом бегала — совершенно неважно...

См. также задачи Д1.4, Д1.10, Д1.12, Д1.17, 2.4, 2.5.

### Считай добавки

Когда число получается как результат многих операций, бывает удобно отследить по шагам, как оно меняется. Тогда окончательный результат равен первоначальному числу плюс сумма всех добавок.

**1.10.** Мама резала на ломти два длинных батона. Всего она сделала 25 поперечных разрезов. Сколько ломтей хлеба получилось?

*Ответ:* 27.

*Решение.* Мы не знаем, сколько разрезов мама сделала на каждом из батонов, но это и не важно. Заметим, что при каждом разрезе один кусок распадается на два, то есть число кусков возрастает на 1. Считая каждый батон одним (хотя и большим) куском, видим, что сначала было два куска. Разрезами мама увеличила число кусков на 25, значит, получилось  $2 + 25 = 27$  кусков-ломтей.

*Комментарий.* В задачах такого типа тоже часто делают «ошибку на 1», путая число разрезов с числом кусков. Полезно запомнить, что при разрезании одного батона кусков будет на 1 больше, чем разрезов (промежутков между кусками). Как ни распределяй разрезы на два батона, при переходе от числа разрезов к числу ломтей добавка равна 2. Значит, всего ломтей будет  $25 + 2 = 27$ .

**1.11.** В театральную студию ходит 33 ученика. Их сумма возрастов равна 333. А чему будет равна сумма их возрастов ровно через 2 года?

*Ответ:* 399 лет.

*Решение.* Возраст каждого из учеников увеличится на 2. Значит, сумма возрастов вырастет на  $33 \cdot 2 = 66$  лет. Поэтому вместе им будет  $333 + 66 = 399$  лет.

**1.12.** На карточках были написаны числа 1, 2, 3, ..., 111. Ваня взял себе все карточки с четными числами, а Таня — с нечетными. У кого из них сумма чисел на карточках больше и на сколько?

*Ответ:* у Тани на 56.

*Решение.* Поскольку 111 на два не делится, у Тани окажется на одну карточку больше. Чтобы утешить Ваню, изготовим для него еще карточку с числом 0 (на сумму она не влияет). Пусть теперь они выкладывают карточки парами друг против друга: сначала самые

маленькие (0 против 1), потом следующие (2 против 3) и т.д. Получится  $112 : 2 = 56$  пар. В каждой паре Танино число на 1 больше Ваниного, поэтому в сумме у Тани будет на 56 больше.

См. также задачи 1.13, Д1.5, Д1.7, Д1.11, Д1.13, Д1.15, Д1.17, Д1.18, Д1.19, 2.8, Д2.14, Д3.17, Д4.2.

## Арифметическая прогрессия

**Определение.** Ряд чисел, идущих с постоянным шагом, называется *арифметической прогрессией*. В нем каждое число получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа  $d$  — *разности* прогрессии. Примеры: а) натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., б) 100, 92, 84, 76; в)  $-\pi$ , 0,  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ ,  $4\pi$ , ...

**1.13.** Чему равен 101-й член арифметической прогрессии 13, 33, 53, 73, ...?

*Ответ:* 2013.

*Решение.* Нетрудно видеть, что на каждом шаге мы прибавляем 20. От первого до 101-го члена надо сделать 100 шагов (снова эффект «плюс-минус 1!»). Значит, всего нам надо прибавить  $100 \cdot 20 = 2000$ . Поэтому 101-й член равен  $13 + 2000 = 2013$ .

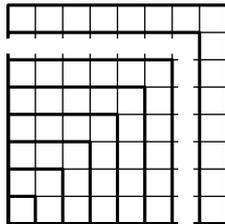
*Комментарий.* Мы применили прием «Считай добавки». С его помощью можно вывести формулу  $n$ -го члена арифметической прогрессии:  $a + (n - 1)d$ , где  $a$  — первый член,  $d$  — разность прогрессии.

**1.14.** Чему равна сумма первых сорока нечетных чисел?

*Ответ:* 1600.

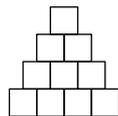
*Решение.* Нечетные числа идут с шагом 2, поэтому образуют арифметическую прогрессию. Как и в предыдущей задаче, подсчитаем, что 40-е число равно  $1 + 39 \cdot 2 = 79$ . Значит, надо вычислить сумму  $1 + 3 + 5 + \dots + 75 + 77 + 79$ . Сгруппируем числа в пары: самое маленькое с самым большим, следующее маленькое — со вторым среди больших, и т. д. При переходе к следующей паре меньшее из чисел увеличивается на 1, а большее — уменьшается на 1, поэтому сумма не меняется. Поэтому мы получим 20 пар с одинаковыми суммами:  $1 + 79 = 3 + 77 = 5 + 75 = \dots = 80$ . Общая сумма равна сумме сумм пар, то есть  $20 \cdot 80 = 1600$ .

*Комментарий.* 1. Разбиение на пары «первый с последним, второй с предпоследним и т. д.» встречается часто. Для арифметической прогрессии это, очевидно, дает пары с одинаковыми суммами. Если число слагаемых  $n$  четно, то на такие пары удастся разбить всю сумму, и результат равен  $\frac{(a+z)n}{2}$ , где  $a$  — первое, а  $z$  — последнее число. Как ни странно, эта формула работает и при нечетном количестве чисел (тогда  $\frac{n}{2}$  — не целое, но и число в серединке дает только полсуммы пары).



2. Равенство  $1600 = 40^2$  — не случайность: сумма первых  $n$  нечетных чисел действительно всегда равна  $n^2$ . Это становится очевидным, если разбить клетчатый квадрат на «уголки»: числа клеток в уголках и будут последовательными нечетными числами.

**1.15.** В клетчатой «пирамиде» высотой 4 всего 10 клеток (см. рис). А сколько клеток в устроенной таким же образом «пирамиде» высотой 50?

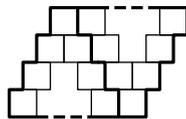


*Ответ:* 1275.

*Решение 1.* Число клеток в слоях увеличивается от 1 до 50 с шагом 1. Просуммируем полученную арифметическую прогрессию:

$$1 + 2 + \dots + 50 = \frac{(1 + 50) \cdot 50}{2} = 1275.$$

*Решение 2.* Сложим две такие «пирамиды», как на рисунке. Тогда в каждом слое будет по 51 клетке, всего клеток  $50 \cdot 51 = 2550$ , и это число надо разделить на 2.



*Комментарий.* Запомните прием: может оказаться намного легче посчитать удвоенное количество. Так, записав второй экземпляр арифметической прогрессии под первым в противоположном порядке, получим равные суммы по вертикали, что сильно облегчит подсчет общей суммы. При этом не возникнет проблемы с «нецелыми парами».

См. также задачи Д1.16, Д1.19, Д3.23, Д6.7.

### Умножение сумм и разностей

Если группа детей покупает одинаковые шоколадки, то расход денег каждого равен числу взятых им шоколадок, умноженному на цену шоколадки. Пусть, однако, известно общее число купленных шоколадок. Тогда суммарные затраты можно посчитать проще: умножить это общее число на цену шоколадки. Вообще, вместо того чтобы умножать на одно и то же число каждое слагаемое, а потом складывать результаты, можно сразу умножить сумму. То же верно и для разностей вместо сумм, и для деления вместо умножения.

**1.16.** Вчера капитан Врунгель поймал на 8 рыб больше матроса Фукса. Сегодня каждый из них поймал втрое больше рыб, чем вчера. Кто сегодня поймал больше рыб и на сколько?

*Ответ:* Врунгель, на 24.

*Решение.* Пусть вчера они наловили щук, а сегодня — пескарей. И пусть Врунгель разделил своих щук на две кучи: в одной столько, сколько у Фукса, в другой — остальные 8. Заменим каждую щуку на трех пескарей. Тогда у каждого станет сегодняшнее число рыб. По-прежнему у обоих будет по одинаковой куче рыб, а лишние будут у Врунгеля во второй куче, где  $8 \cdot 3 = 24$  рыбы.

**1.17.** Каждый мальчик съел по 6 конфет, 2 котлеты и одному персику, а каждая девочка — по 8 конфет, одной котлете и 3 персика. Всего они съели 100 котлет и персиков вместе взятых. А сколько конфет?

*Ответ:* 200.

*Решение.* Заметим, что каждый съел вдвое больше конфет, чем котлет и персиков вместе. Значит, и всего конфет съедено вдвое больше, чем котлет и персиков вместе, то есть  $2 \cdot 100 = 200$ .

**1.18.** «А это вам видеть пока рано», — сказала Баба-яга своим 33 ученикам и командовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников все-таки увидели то, что видеть пока рано?

*Ответ:* 22.

*Решение.* Посчитаем тех, кто ничего не увидел. Это те, кто закрыл оба глаза. Оба глаза закрыли ровно те мальчики, которые за-

крыли левый глаз, то есть треть мальчиков. Точно так же оба глаза закрыла треть девочек. Значит, по правилу умножения сумм ничего не увидела треть всех учеников, то есть  $33 : 3 = 11$ . А остальные  $33 - 11 = 22$  все-таки подглядели то, что видеть было пока рано.

См. также задачи 2.9, Д4.12.

### Дополнительные задачи

**Д1.1.** Сколько всего есть а) двузначных; б) трехзначных чисел?

**Д1.2.** При раскладывании пасьянса у Пети собрались все пики и все картинки (валеты, дамы и короли) без других карт. Сколько карт у Пети? (Напомним, что пики — одна из четырех мастей, карт в каждой масти поровну, а всего в колоде 52 карты.)

**Д1.3.** Сколько трехзначных чисел не делятся на 40?

**Д1.4.** В вершинах квадрата записали четыре числа. Их сумма равна 25. На каждой стороне написали число, которое равно сумме чисел в концах стороны. Чему равна сумма всех восьми записанных чисел?

**Д1.5.** Петя склеивал пазл из 16 частей. За одну минуту он склеивал два куска в один (причем кусок мог быть первоначальный или склеенный из нескольких первоначальных кусков). За сколько минут Петя склеил весь пазл?

**Д1.6.** На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным, получится 5 кусков, если по желтым — 7 кусков, если по зеленым — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трех цветов?

**Д1.7.** Лесоруб одним ударом топора разбивает любой чурбак или полено на три части. Он хочет разбить чурбак на 33 части. Сколько ударов ему понадобится?

**Д1.8.** На каждой перемене Робин-Бобин съедал по шоколадке. Уроки были каждый день недели, кроме воскресенья, всего 29 уроков. Сколько шоколадок на переменах съел Робин-Бобин за неделю?

**Д1.9.** Вася купил 5 жетонов для игры в автомате. На каждую игру тратится жетон, но если выиграешь, получаешь бесплатно два жетона. Вася сыграл 17 раз. Сколько раз он выиграл?

**Д1.10.** Для каждого числа от 1 до 99 выписали его сумму цифр. Чему равна сумма всех выписанных чисел?

**Д1.11.** Улитка лезет на 10-метровый столб. За день она поднимается на 6 метров, а за ночь сползает на 5 метров. На какой день она доберется до вершины столба?

**Д1.12.** Груша и яблоко вместе весят 100 г, яблоко и апельсин — 120 г, груша и апельсин — 140 г. Сколько весят вместе яблоко, груша и апельсин? Сколько весит каждый фрукт по отдельности?

**Д1.13.** За столом сидели 20 человек. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял одну семечку, второй — две, третий — три, и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Пакет обошел вокруг стола больше 2 раз. На сколько больше было взято семечек на втором круге, чем на первом?

**Д1.14.** Сколько несократимых среди дробей  $\frac{6}{100}, \frac{6}{101}, \dots, \frac{6}{999}$ ?

**Д1.15.** Старик Хоттабыч может совершить чудо, вырвав из своей волшебной бороды один волос (при этом на месте двух вырванных волос вырастает один новый). Сколько всего чудес может совершить старик Хоттабыч, если первоначально в его бороде 2012 волос?

**Д1.16.** Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые не делятся на 5.

**Д1.17.** Какие 500 идущих подряд натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 2013 цифр?

**Д1.18.** Юный маг научился фокусу превращать шарик в два шарика и пять роликов, и трюку по превращению четырех шариков в три кубика и два ролика. Он зашел в комнату, где были только шарики, и через некоторое время там оказались 1500 кубиков, 1500 роликов и ни одного шарика. Сколько шариков было в комнате сначала?

**Д1.19.** Надо было найти сумму чисел  $0,1 + 0,2 + 0,3 + \dots + 9,8 + 9,9$ , а результат округлить до целого. Вася сначала округлил каждое число до целого, а результаты сложил. Какой результат больше: Васин или правильный? На сколько?

**Д1.20.** В наборе 7 гирь. Арбуз можно уравновесить тремя гирями, можно четырьмя, а можно и пятью. Докажите, что одну из гирь набора можно уравновесить несколькими другими.

## Ответы и решения

**Д1.1.** *Ответ:* а) 90; б) 900.

*Решение.* а) Из 99 чисел от 1 до 99 надо откинуть 9 однозначных:  
 $99 - 9 = 90$ .

б) Из 999 чисел от 1 до 999 надо откинуть 99 однозначных и дву-  
 значных:  $999 - 99 = 900$ .

**Д1.2.** *Ответ:* 22.

*Решение.* У Пети  $52 : 4 = 13$  пик, и по 3 картинки в каждой из трех  
 остальных мастей, итого  $13 + 3 \cdot 3 = 22$  карты.

**Д1.3.** *Ответ:* 878.

*Решение.* На 40 делятся трехзначные числа 120, 160, 200, ..., 960.  
 В этом списке  $(960 - 120) : 40 = 21$  промежутков между числами, зна-  
 чит, 22 числа. А всего есть 900 трехзначных чисел (см. задачу Д1.1).  
 Поэтому на 40 не делятся  $900 - 22 = 878$  чисел.

**Д1.4.** *Ответ:* 75.

*Решение.* Каждое число в вершине принадлежит еще и двум сто-  
 ронам, поэтому было сосчитано трижды. Значит, и сумму надо утро-  
 ить:  $3 \cdot 25 = 75$ .

**Д1.5.** *Ответ:* за 15 минут.

*Решение.* После каждой склейки число частей уменьшалось на 1.  
 Из 16 кусков склеился один (весь пазл), значит, было  $16 - 1 = 15$   
 уменьшений. На это потребовалось 15 минут.

**Д1.6.** *Ответ:* 21 кусок.

*Решение.* Чтобы разрезать на 5 кусков, надо сделать  $5 - 1 = 4$   
 разреза. Значит, красных колец 4. Аналогично желтых колец 6, зеле-  
 ных — 10. Итого на колбасе  $4 + 6 + 10 = 20$  колец. Разрезав по ним,  
 получим  $20 + 1 = 21$  кусок.

**Д1.7.** *Ответ:* 16 ударов.

*Решение.* При каждом ударе число частей увеличивается на 2.  
 Лесоруб хочет увеличить число частей на  $33 - 1 = 32$ . Для этого на-  
 до ударить  $32 : 2 = 16$  раз.

**Д1.8.** *Ответ:* 23 шоколадки.

*Решение.* Между 29 уроками 28 промежутков. Промежуток —  
 это перемена или ночь. Между 6 учебными днями было 5 ночей.  
 Значит, перемен (и съеденных на них шоколадок) было  $28 - 5 = 23$ .

**Д1.9.** *Ответ:* 6 раз.

*Решение.* На 17 игр Вася потратил 17 жетонов. Из них он купил 5, значит, выиграл  $17 - 5 = 12$ . Каждый выигрыш приносит 2 жетона, значит, было  $12 : 2 = 6$  выигрышей.

**Д1.10.** *Ответ:* 900.

*Решение.* Цифры 0 на сумму не влияют, а каждая ненулевая цифра 10 раз встречается в разряде единиц и 10 раз в разряде десятков. Поэтому сумма всех цифр равна

$$20(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 20 \cdot 45 = 900.$$

**Д1.11.** *Ответ:* на пятый.

*Решение.* Первый день улитка закончит на высоте 6 м. Далее за каждую пару ночь + день она поднимается еще на метр. Чтобы подняться с 6 м до 10 м, ей надо  $10 - 6 = 4$  таких пары. Вместе с первым днем это составит  $1 + 4 = 5$  дней (а именно, улитка достигнет вершины столба вечером пятого дня).

*Замечание.* Распространенная ошибка: некоторые видят добавку в 1 м за пару день + ночь, после чего дают ответ 10 дней.

**Д1.12.** *Ответ:* вместе 180 г, апельсин 80 г, груша 60 г, яблоко 40 г.

*Решение.* Сложив указанные суммы:  $100 + 120 + 140 = 360$  г, мы сосчитаем вес каждого из фруктов дважды. Значит, общий вес вдвое меньше:  $360 : 2 = 180$  г. Теперь вес каждого фрукта можно сосчитать как дополнительный к весу двух других фруктов: апельсин весит  $180 - 100 = 80$  г, груша весит  $180 - 120 = 60$  г, яблоко весит  $180 - 140 = 40$  г.

**Д1.13.** *Ответ:* на 400 семечек.

*Решение.* Получив пакет второй раз, человек должен взять на 20 семечек больше, чем в предыдущий раз: ведь каждый в круге обеспечил добавку +1, включая его самого. 20 человек взяли каждый на 20 семечек больше, итого все вместе взяли на  $20 \cdot 20 = 400$  семечек больше.

**Д1.14.** *Ответ:* 300 дробей.

*Решение.* Всего выписано  $999 - 99 = 900$  дробей (см. задачу Д1.1). Посчитаем сначала число сократимых дробей. Дробь можно сократить на 2, на 3 или на 6. Заметим, что 2 и 3 — разные простые числа,

следовательно, если дробь можно сократить и на 2, и на 3, то ее можно сократить и на 6. На 2 можно сократить, если знаменатель четный. Таких дробей ровно половина  $900 : 2 = 450$ . На 3 можно сократить, если знаменатель делится на 3. Таких дробей ровно треть ( $900$  делится на 3, поэтому числа можно разбить на  $900 : 3 = 300$  троек (100, 101, 102), (103, 104, 105), ..., в каждой из которых ровно одно число делится на 3). Аналогично на 6 делятся  $900 : 6 = 150$  знаменателей. Сложив числа, кратные 2, и числа, кратные 3, мы дважды учтем числа, кратные 6. Поэтому их надо вычесть. Итого сократимых дробей  $450 + 300 - 150 = 600$ . Количество несократимых дробей дополняет его до 900, то есть несократимых дробей  $900 - 600 = 300$ .

**Д1.15.** *Ответ:* 4025.

*Решение.* При совершении пары чудес количество волос в бороде Хоттабыча уменьшается на 1. Такие пары он может совершать, пока волос в бороде не меньше 2. Совершив 2011 пар чудес, Хоттабыч останется с бородой из двух волосков. Затем он совершит еще пару чудес, в бороде станет один волосок, и Хоттабыч совершит последнее чудо. Итого он совершит  $2(2011 + 1) + 1 = 4025$  чудес.

**Д1.16.** *Ответ:* 396 000.

*Решение.* Сначала найдем сумму всех трехзначных чисел:

$$\frac{900(100 + 999)}{2} = 494\,550.$$

Потом найдем сумму трехзначных чисел, делящихся на 5. Их

$$900 : 5 = 180,$$

и они образуют арифметическую прогрессию с разностью 5:

$$100 + 105 + \dots + 995 = \frac{180(100 + 995)}{2} = 98\,550.$$

Осталось отбросить лишнее — вычесть вторую сумму из первой:  $494\,550 - 98\,550 = 396\,000$ .

**Д1.17.** *Ответ:* 9513, 9514, ..., 10 012.

*Решение.* Если все числа не более чем четырехзначны, то цифр не более  $4 \cdot 500 = 2000$  — недостаточно. Если все числа не менее

чем пятизначны, то цифр не менее  $5 \cdot 500 = 2500$  — больше, чем надо. Значит, часть чисел четырехзначна, а часть — пятизначна. Замена четырехзначного числа на пятизначное добавляет одну цифру. При всех четырехзначных числах нам не хватает 13 цифр. Значит, надо взять 13 пятизначных чисел — самых первых:

$$9999 + 1, 9999 + 2, \dots, 9999 + 13 = 10\,012.$$

Вычисляя разность  $10\,012 - 500 = 9512$ , найдем самое большое четырехзначное, которое мы не взяли. Отсюда ответ.

**Д1.18.** *Ответ:* 1900.

*Решение.* Кубики появлялись только при трюках, по 3 за трюк, поэтому было сделано  $1500 : 3 = 500$  трюков. Эти трюки уменьшили число шариков на  $4 \cdot 500 = 2000$  и увеличили число роликов на  $2 \cdot 500 = 1000$ . Значит, остальные 500 роликов возникли при фокусах, по 5 за фокус. Тогда было  $500 : 5 = 100$  фокусов, при каждом число шариков увеличивалось на 1, то есть всего добавилось 100 шариков. Если вначале было  $x$  шариков, а в конце их не осталось, то  $x + 100 - 2000 = 0$ , откуда  $x = 1900$ .

**Д1.19.** *Ответ:* Васин результат на 5 больше правильного.

*Решение 1.* Числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 0,1. Каждое число в 10 раз больше своего номера, поэтому всего выписано 99 чисел. Их сумма равна  $\frac{99(0,1+9,9)}{2} = 495$ . Если же сначала округлить, получим сумму

$$0 + 0 + 0 + 0 + 1 + \dots + 1 + 2 + \dots + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10.$$

Слагаемое 0 встретилось 4 раза, слагаемое 10 — 5 раз, остальные — по 10 раз. Тогда сумма равна

$$4 \cdot 0 + 10(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 5 \cdot 10 = 0 + 450 + 50 = 500.$$

Итак, Васин результат на  $500 - 495 = 5$  больше правильного.

*Решение 2.* Сгруппируем числа с одинаковой целой частью в пары так, чтобы сумма в паре была целой: (0,1; 0,9), (4,3; 4,7) и т. п. Без пар останутся 9 целых чисел и 10 полуцелых: 0,5, 1,5, ..., 9,5. Суммы в парах и сумма полуцелых — целые числа, поэтому и общая сумма целая. Значит, правильный результат при округлении не

меняется. Посмотрим теперь, как будет меняться сумма при округлении слагаемых. В каждой паре одно число округлится с недостатком, другое — с избытком, сумма не изменится. Округление целых чисел ничего не меняет. При округлении полуцелых каждое из них увеличится на 0,5. Значит, общая сумма увеличится на  $10 \cdot 0,5 = 5$ .

**Д1.20. Решение.** Пусть два набора гирь весят одинаково. Если некоторая гиря входит в оба набора, то, выкинув ее из каждого набора, снова получим два набора одинакового веса.

Заметим, что веса гирь, оставшихся от каждого взвешивания, тоже равны. Значит, некий вес можно уравновесить двумя, тремя и четырьмя гирями. Если эта двойка гирь пересекается с тройкой или четверкой, то, выкинув общую гирю, уравновесим оставшуюся от двойки. Если нет, то тройка и четверка обязаны пересечься по двум гирям, иначе гирь (вместе с двойкой) всего больше семи. Выкинув общую пару гирь из этих наборов, получим, что одна оставшаяся от тройки гиря равна по весу двум гирям, оставшимся от четверки.

## КОНТРОЛЬ И ОТЛАДКА РЕШЕНИЙ

Решение сложных задач состоит из нескольких шагов. И даже если каждый шаг сам по себе прост, выполнить всю цепочку безошибочно не так легко. Простое увеличение аккуратности и внимательности не слишком помогает. Опытный бегун понимает, что пробежать километр — это не то же, что 10 раз пробежать стометровку. Так же и опытный решатель знает, что длинные вычисления надо выполнять не так, как короткие: их надо *организовать* и *проверить*.

Вот несколько советов.

1. Разделите решение на несколько логических частей. Каждая часть должна решать отдельную подзадачу. Надо (хотя бы для себя) четко сформулировать, какую именно подзадачу вы решаете и что именно должны получить в конце. Четко проговаривать полезно даже отдельные шаги: см., например, решение задачи 2.9.

2. Если есть сомнение в каком-то шаге, подумайте, как его проверить. Например, полезно почувствовать ситуации с «эффектом плюс-минус один» (см. задачи 1.1, 1.10, 1.13, Д1.1, Д1.5–Д1.8), когда вы «в принципе правильно» знаете, что делать, но можете ошибиться на 1. Устройте *отладку*: решите для проверки тем же способом задачу с маленькими числами, где ответ можно «проверить руками». Например, надо узнать, сколько дней с 7-го по 28-е мая включительно. Вам кажется, что  $28 - 7 = 21$  день. Изменим условие: сколько дней с 7-го по 8-е включительно? По той же схеме  $8 - 7 = 1$  день, но непосредственно видно, что дней два: 7-е и 8-е. Дальше можно предположить, что мы просто недоучитываем один день, добавить его и получить  $21 + 1 = 22$  дня. Это верно, но надежнее разобраться, откуда ошибка, и исправить ее (см. задачу 1.1).

3. *Отладкой* можно проверять и решения задач другого типа (см. задачу 1.2), в том числе более сложных. Проще всего проверяется ответ в виде формулы. Подставив вместо буквенных значений числовые, мы получим числовой ответ. Надо только подобрать такие числа, чтобы задача с ними легко решалась. Точно так же можно восстановить точный вид формулы, которую вы помните приблизительно. Пусть, например, вы засомневались, равна ли сум-

ма  $1 + 2 + \dots + n$  выражению  $\frac{n(n-1)}{2}$  или  $\frac{n(n+1)}{2}$ ? Подставив  $n = 2$ , вы сразу увидите, что правильный ответ дает вторая формула!

4. Решение задачи или подзадачи можно проверить, решив ее *двумя способами* (см., например, задачу 2.1).

5. Громоздкие вычисления с целыми числами можно проконтролировать, *вычислив последнюю цифру* результата (как мы делали в задаче 3.16).

6. Вычисления контролируют с помощью *оценок*. Скажем, перемножив два трехзначных числа, вы получили четырехзначное число. Тут что-то не так. Ведь оба сомножителя не меньше 100, поэтому произведение не меньше 10 000 — уже пятизначное число!

Осознав важность самоконтроля, вы наверняка придумаете много способов дополнительной проверки и сможете заметно повысить надежность своих выкладок. Помните «правило альпинистов»: на вершину взойдет не тот, кто не поскользывается, а тот, кто, поскользнувшись, сумеет подняться и пойти дальше. Успешных вам «восхождений»!

## ЗАДАЧИ С6 ЕГЭ

Д3.24, Д3.25, Д3.26, Д5.20, Д5.21, Д6.20, Д6.21, Д6.22.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Рекомендованная литература	5
1. Простая арифметика	6
2. Уравнения и неравенства	22
3. Делимость и остатки	41
4. Дроби, доли, средние	63
5. Логика и перебор	80
6. Задачи на максимум и минимум	105
Контроль и отладка решений	127
Задачи С6 ЕГЭ	128