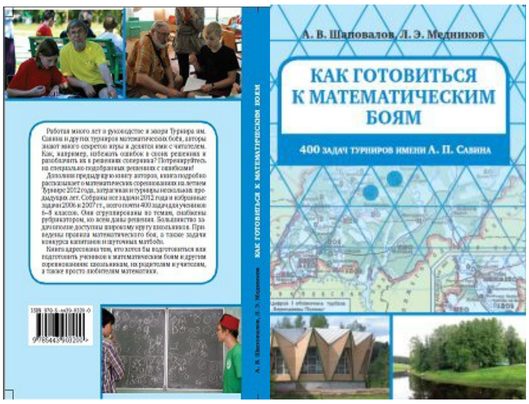
Как готовиться к математическим боям. 400 задач турниров им. А.П.Савина.

Шаповалов А.В., Медников Л.Э.



Аннотация

Работая много лет в руководстве и жюри Турнира им. Савина и других турниров математических боёв, авторы знают много секретов игры и делятся ими с читателем. Как, например, избежать ошибок в своих решениях и разоблачить их в решениях соперника? Потренируйтесь на специально подобранных решениях с ошибками!

Дополняя предыдущую книгу авторов, книга подробно рассказывает о математических соревнованиях на летнем Турнире 2012 года, затрагивая и турниры нескольких предыдущих лет. Собраны все задачи 2012 года и избранные задачи 2006 и 2007 гг., всего почти 400 задач для учеников 6–9 классов. Они сгруппированы по темам, снабжены рубрикатором, ко всем даны решения. Большинство задач вполне доступны широкому кругу школьников. Приведены правила математического боя, а также задачи конкурса капитанов и шуточных матбоёв.

Книга адресована тем, кто хотел бы подготовиться или подготовить учеников к математическим боям и другим соревнованиям: школьникам, их родителям и учителям, а также просто любителям математики.

Первое издание книги вышло в 2014 году.

Как готовиться к математическим боям

За последние 20 лет математические бои в России широко распространились. Учителя математических классов и руководители кружков оценили это соревнование как очень полезное для заинтересованных школьников. Обсуждение задач в кругу самих учащихся – как в процессе решения, так и на самом бое – во-первых, служит заметным дополнительным источником знаний, а во-вторых, убеждает учащихся в объективном характере таких знаний, что даёт сильный стимул к дальнейшему изучению математики. Работа в команде привлекает даже тех школьников, которые лично для себя не захотели бы дополнительно заниматься математикой. Турниры проводятся на школьном, городском и даже общероссийском уровне, и нередки случаи, когда мест для всех желающих команд просто не хватает. Итак, решено: играем матбой и лучше – против соседнего класса, кружка, школы или даже города! Но чтобы не ударить в грязь лицом, надо подготовиться. Способов много, и эта книга поможет выбрать подходящие и воплотить их.

Решение задач

Разумеется, здесь, как и при подготовке к другим математическим соревнованиям, главным средством было и будет решение задач и изучение необходимой теории. Если противник решил всё, а ваша команда ничего – то при любой системе подсчета победы не жди. Книг с теорией и задачами издано много, немало материала можно найти и в интернете. Заметим, однако, что большинство сборников задач посвящены, в основном, задачам олимпиад, а задачи матбоев имеют свою специфику, о которой мы ещё скажем ниже. Немногочисленные сборники задач математических боёв публикуются же обычно без решений или с краткими указаниями вместо решений. Да и большинство задач таких подборок не блещет оригинальностью, попадая в варианты боёв, в основном, из сборников олимпиад. В этом отношении Турнир им. А.П. Савина является счастливым исключением, с самого начала сохраняя традицию использовать по большей части авторские задачи. Почти 400 задач данного сборника представляют задачи и варианты Турнира. Все задачи снабжены исчерпывающими решениями, и даже те решения, что выглядят подозрительно краткими, являются полными – просто из решения «выжата вода».
Мы постарались структурировать их так, чтобы задачи было легко найти и использовать для подготовки школьников от 6 до 9 классов и команд самого разного уровня. В отличие от большинства сборников, задачи разбиты не по вариантам (что бывает нужно довольно редко), а по темам (которые зависят как от материала условия, так и от метода решения). Если задача, как это часто бывает, может быть отнесена к нескольким темам, то она помещается в одну из них, а в остальных темах на задачу дана ссылка. Чтобы подобрать нужную трудность, при каждой задаче указаны классы, которым она подходит. Кроме того, полезно помнить, что задачи игры «Математический квадрат» легче задач устной олимпиады для данного класса, а те, в свою очередь, легче задач командной олимпиады и задач боёв, чья трудность ещё зависит от лиги (см. Учебный бой по готовому варианту).

Устные задачи

Бой начинается с конкурса капитанов. Двум капитанам или представителям команд даётся устная задача «на ответ», обычно несложная, но часто – с подвохом. Побеждает тот, кто первым скажет правильный ответ (часто, впрочем, выигрывает тот, кто не торопится – противник даёт неправильный ответ и проигрывает). Поскольку от капитана требуется в первую очередь основательность, на конкурс капитанов нередко выставляют другого участника – быстро соображающего, но «бегуна на короткие дистанции». Для тренировки мы собрали около двух десятков таких задач в главе «Конкурс капитанов». К ним можно ещё добавить наиболее лёгкие задачи из «Математического квадрата». Все эти задачи можно использовать также для устной разминки всех участников в начале занятия кружка.

Вязкие задачи

На олимпиадах ценятся задачи с компактным и легко проверяемым решением и нещадно отбраковываются задачи, по которым можно ожидать от школьников длинных решений. В самом деле, кому из жюри хочется читать или выслушивать «оперы» и долго и нудно доказывать школьнику, почему он неправ. А в математическом бое соль в том и состоит, чтобы при изложении решения завязывалась дискуссия между докладчиком и оппонентом. Поэтому используются задачи с подвохами, с разбором случаев, которые можно и пропустить, задачи, решающиеся в два или несколько ходов. Соответственно, полные и безупречные решения таких задач получить и изложить очень непросто. Найдя основную идею, стоит подумать, как довести её до решения, ещё лучше – до компактного или хотя бы просто излагаемого решения. Получив полное решение, надо его тщательно проверить и перепроверить. Тут очень помогает командная работа. Хорошо иметь в команде одного-двух скептиков, которые будут выслушивать решения и «цепляться» к сомнительным местам и неясностям. Даже если решение и в самом деле безупречно, они своими вопросами предвосхитят вопросы оппонента, тем самым лишив их эффекта неожиданности. Кроме того, такое выслушивание решений позволяет оценить степень вязкости задачи. Поскольку на какие-то задачи придется вызывать соперников, то лучше вызывать их на самые вязкие задачи: пусть лучше они ошибаются и теряют очки при рассказе!

***

Обсуждение «липовых» решений

Ошибки, возникающие «естественным» путем, обычно достаточно прозрачны и возникают непредсказуемо. Поэтому для целей тренировки их недостаточно. Руководителю надо взять на себя нелегкий труд рассказывать ученикам «липовые» решения, сначала заранее предупредив, а потом и без предупреждения. Но где взять такие решения? Первый источник – софизмы. Их, к сожалению, немного, но пару десятков в Интернете найти всё-таки удаётся. Но софизмы, увы, имеют обычно мало общего с теми ошибками, которые допускают школьники на боях. Более похожи на них те распространенные, но неполные или неправильные решения, которые попадаются в книгах торопливых авторов. Иные читатели даже предпочитают такие решения правильным ввиду их «простоты и краткости»! В своей книге [ТГ] мы поместили пару десятков таких решений вслед за правильными под рубрикой «Ложный след». Их тоже можно использовать, но надо иметь в виду, что задачи той книги сложнее, чем этой. Наконец, опытный преподаватель и сам не раз сталкивался в своей практике с неправильными решениями, где ошибки вовсе не очевидны. Осталось вспомнить эти решения, оформить и употребить в дело.

По зрелом размышлении авторы взяли на себя труд сделать подборку таких решений и в данной книге. 26 задач с псевдорешениями, их разоблачениями и отсылками к правильным решениям читатель найдет в главе «Липовая роща». Пытливый ученик может поработать с этими решениями и самостоятельно. Прочитайте задачу, порешайте её некоторое время, а затем прочтите предложенное псевдорешение и попытайтесь найти в нём все ошибки и недочёты. Запишите их коротко, а затем прочтите правильное решение (ссылка на него есть в конце решения). Попробуйте ещё раз найти все ошибки и оценить, сколько они стоят в очках. Наконец, почитайте разоблачение и сравните его с вашим списком ошибок и их оценкой.

Предисловие к задачнику

Здесь собраны все задачи математических боев и олимпиад турнира 2012 года, задачи «Математического квадрата» и конкурса капитанов, а также более сотни избранных задач двух прошлых турниров 2006 и 2007 года – всего около 400 задач. Мы разделили их на игровые (задачи «Математического квадрата» и конкурса капитанов) и основные (все остальные). Все игровые задачи – не новые, поэтому они выделены в отдельную главу и публикуются без указания автора. У основных задач автор, как правило, указан, а в тех редких случаях, когда он неизвестен, указан источник задачи или написано «Фольклор». Стоит отметить, что среди задач основных соревнований новые авторские задачи составляют свыше 80%. Для турниров математических боёв это беспрецедентно много. Традиция идет от самых первых турниров, где все 100% задач были новыми и авторскими – благодаря настойчивости их первого организатора С.И. Токарева. С ростом популярности турнира росло число лиг, задач требовалось больше, новизна всех задач стала нереальной. Впрочем, отступления от требования новизны допускаются почти исключительно в тех лигах, где школьники по разным причинам не обладают широким кругозором по части олимпиадных задач.

Основных задач набралось около трёхсот. Читателю непросто сориентироваться в таком массиве, разбиение по вариантам и по хронологии тут мало помогает. Для удобства поиска и работы мы разбили задачи на темы, снабженные подзаголовками, а темы сгруппировали в четыре раздела: логика, комбинаторика, арифметика/алгебра и геометрия. Далее пронумеровали задачи от 1 до 275 и для каждой указали, каким классам она подходит. Как обычно, наиболее трудные задачи помечены одной или двумя звездочками.

Названия тем являются одновременно как бы статьями рубрикатора. За подзаголовком следуют номера дополнительных задач. Эти задачи находятся в других темах или среди игровых, но тематически подходят. Игровые задачи упорядочены и расположены в соответствии с особенностями «Математического» квадрата. Они нумеровались кодами: например, код 8Ал4 означает 8 класс, линейка «Алгебра», 4-я задача.

Все основные задачи снабжены полными решениями, вынесенными в отдельную главу. К некоторым задачам приведены два решения. Иногда после решения под заголовком «Путь к решению» приведены соображения, как такое решение можно придумать. Все игровые задачи снабжены ответами, а также указаниями или краткими решениями.

Мы старались выбирать короткие и содержательные решения и излагать их так, чтобы они были доступны ученикам соответствующего класса – и по материалу, и по идеям. Иногда ради этого приходилось жертвовать краткостью. В других случаях мы приводили два решения: скажем, более длинное – для семиклассников, затем более короткое – для восьмиклассников.

Для желающих узнать состав вариантов, подборки задач по годам и по авторам созданы соответствующие списки номеров в рубрикаторе. При этом в списках для олимпиад порядок в списке соответствует порядку на олимпиаде, а в остальных списках номера идут в порядке возрастания.

Тексты условий задач в данной брошюре могут несколько отличаться от тех вариантов, которые давались во время турнира. Исправления делались для единообразия формулировок и устранения двусмысленностей и языковых шероховатостей. Большинство решений брошюры сообщены нам членами методической комиссии и авторами задач, за что мы им очень благодарны. Мы, однако, несем ответственность за все ошибки и опечатки этой книги.

Основные задачи

Арифметика и алгебра

Цифры

См. также задачи 20, 21, 53, 56, 6Ц1-2, 6Ц4-5, 6Ч1, 8Ал2, 8Ар4, 8К1.

1. (6-7) Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. Сколько всего таких дат в XXI веке? (*А. Шаповалов*)

2. (6-7) Астролог считает год счастливым, если в его записи используются четыре последовательные цифры. Например, следующий, 2013-й год будет именно таким. А когда, по мнению этого астролога, был предыдущий счастливый год? (*Н. Нетрусова*)

3. (6) Четырёхзначное число назовем *временным*, если можно расположить его цифры и поставить посередине двоеточие так, чтобы получилось какое-то показание часов (например, *временным* являются числа 2010 и 1995, так как часы могут показывать время 00:12 и 19:59). Найдите наименьшее невременное число, большее, чем 2007. (*А. Шаповалов*)

4. (6-8) Решите ребус РОТОР:СОКОЛ = 3:1. (*А. Хачатурян*)

5. (6-7) Решите ребус: FOOLS + ROADS = RUSSIA. (*К. Кноп*)

6. (6-7) На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр, неизвестно). На доске осталось:

$$1127...173\times1017...565 = 1126...745.$$

Могло ли исходное равенство быть верным? (*Фольклор*)

7. (7-8) На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это число записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n, если известно что оно

а) двузначно;

б) трехзначно. (*А. Шаповалов*)

8. (7-8) Каждая цифра натурального числа N строго больше стоящей слева от нее цифры. Чему равна сумма цифр числа $9N$? (*С. Волчёнков*)

9. (7-8) Докажите, что между натуральными числами n и $9n$ есть натуральное число, чья сумма цифр на 7 больше чем у n. (*А. Шаповалов*)

10. (7-8) Верно ли, что любое натуральное число, делящееся на 9, отличается от некоторого натурального числа n на сумму цифр этого числа n? (*И. Акулич*)

11. (8-9) В одну строку без пробелов выписаны числа натурального ряда: 12345678910111213... Далее цифры полученной последовательности попеременно складываются на разные плечи качелей: цифру 1 – на левое плечо, цифру 2 – на правое, цифру 3 – на левое и т.д. Если на очередном шаге сумма цифр на каком-то плече окажется больше, то это плечо перевешивает. Докажите, что качели никогда не перестанут качаться. (*А. Жуков*)

Простая арифметика

См. также задачи 6А1-6А3, 6К2, 7Г1.

12. (6-7) В дремучем лесу вот уже более 1000 лет живет Волшебная ёлка. Известно, что каждое утро на ней вырастают 100 иголок и каждая иголка живет ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько же сегодня иголок на Волшебной ёлке? (*Фольклор*)

13. (6-7) Старик Хоттабыч может совершить чудо, вырвав из своей волшебной бороды один волос (при этом на месте двух вырванных волос вырастает один новый). Сколько всего чудес может совершить старик Хоттабыч, если первоначально в его бороде 2012 волос? (*Фольклор*)

14. (6-7) Каждый мальчик съел по одной конфете, 5 котлет и 3 омлета, а каждая девочка – по 2 котлеты, 4 омлета и 6 конфет. Всего они съели 220 конфет и котлет вместе взятых. А сколько омлетов? (*По мотивам Харьковской областной олимпиады 1999/2000*)

Делимость и остатки

См. также задачи 47, 49, 50, 52, 55, 56, 59, 61, 62, 63, 113, 114, 122, 143, 155, 169, 174, 181, 189, 193, 194, 6Ц2, 6Ц3, 6Ч2, 6Ч3, 7А5, 7Т3, 7К1, 7К3, 8Ар1, 8Ар2, 8Ар4, 8К1, 8М1, 9П1, 9П2, 9П4, 9Т1.

15. (6-7) Саша живёт в своём доме, в котором окон на 2 больше, чем дверей. Все братья Саши – Петя, Коля и Лёня – тоже живут каждый в своём доме. В доме Коли окон на 5 больше, чем дверей, а в доме Пети окон на 4 больше, чем дверей. Может ли у всех братьев Лёни в домах в сумме окон быть в 4 раза больше, чем дверей? *(Фольклор)*

16. (6-7) Для проведения тренировочной командной олимпиады пригласили всех желающих школьников и заранее объявили, что в каждой команде – от 6 до 8 человек. Когда подсчитали количество пришедших, то выяснилось, что выполнить это условие невозможно, при этом на две команды школьников хватало. Сколько человек пришло на олимпиаду? (*А. Блинков*)

17. (6-7) У Мальвины были золотые колечки веса 1 г, 3 г, 4 г, 6 г, 8 г, 9 г, 11 г, 12 г и 16 г. Алиса и Базилио украли по 4 кольца. При этом Алисе досталось втрое больше золота, чем Базилио. Сколько весит оставшееся кольцо? (*Фольклор*)

18. (6-8) В Зазеркалье имеют хождение монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет и получила на сдачу на две монеты больше.

а) Могла ли покупка стоить 100 гиней?

б) Могла ли покупка стоить 60 гиней?

в) Какова минимально возможная стоимость покупки? (*А. Шаповалов*)

19. (6-7) В теремке лежали 100 конфет. Пришла мышка и съела некоторое количество конфет. Но тут пришла лягушка, и мышка сьела еще одну конфету, чтобы количество оставшихся делилось поровну на двоих. Потом пришли по очереди зайчик, лисичка, волк и медведь, и каждый раз мышка съедала по одной конфете, чтобы то, что осталось, делилось поровну на всех собравшихся. Наконец пришел слон. Какое наименьшее количество конфет придется съесть мышке на этот раз, чтобы количество оставшихся делилось поровну на семерых? (*И. Раскина*)

20. (6-7) Сумма трех натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться их произведение? (*Колумбия, 2004*)

21. (6-7) Докажите, что сумма всех семизначных палиндромов делится на 9. *(А.Шаповалов)*

22. (6-7) **а**) В стране имеют хождение банкноты в 60, 15, 12 и 10 динаров. Некто жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него была банкнота в 60 динаров. Могло ли оказаться, что гость прожил в гостинице 10 дней?

б) В стране имеют хождение монеты в 1 динар, а также в $^1/_4$ и $^1/_6$ динара. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него был 1 динар. Мог ли гость прожить в гостинице 10 дней?

в) В стране имеют хождение монеты в 1 динар, а также в $^1/_4$, $^1/_5$ и $^1/_6$ динара. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Сначала у него был 1 динар. Мог ли гость прожить в гостинице 14 дней? (Ни на что другое гость денег не тратил.) (*А. Шаповалов*)

23. (7-8) Приехав от бабушки, марсианин Надгоб через несколько дней написал ей первое электронное письмо. Промежуток между первым и вторым письмом длился на день дольше, между вторым и третьим – ещё на день дольше и т. д. Спустя длительное время бабушка рассортировала письма по дням недели, и на каждый хоть одно письмо да пришлось. Докажите, что в марсианской неделе чётное число дней. (*И. Богданов*)

24. (7-8) Мама пекла блины, а четверо детей их ели, каждый со своей скоростью. Получив сначала по блину, дети начали есть одновременно. Как только ребенок съедал блин, он получал еще один. Каждый хоть раз получил добавку. Наконец, мама объявила, что больше блинов не будет. Дети доели то, что у каждого оставалось, и закончили одновременно. Известно, что до этого не было моментов, когда бы заканчивали есть блин одновременно двое или больше детей. Какое наименьшее число блинов могла испечь мама? (*А. Шаповалов*)

25. (7-9) Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел (m, n), что m и n имеют одинаковые наборы простых делителей, и $m - 1$ и $n - 1$ также имеют одинаковые наборы простых делителей. *(Фольклор)*

26. (7-8) Берутся всевозможные произведения наборов из 2011 чисел от 1 до 2010, необязательно различных, а далее находится их сумма. Найдите остаток от деления этой суммы на 2011. (Наборы {1, 2, 2, 1, 1, 1, ...} и {2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, ...} считаются одинаковыми.) (*А. Юрков*)

27. Числа 1, 2, 3, ..., n записаны в строку в таком порядке, что из каждых трёх подряд записанных чисел одно равно сумме двух других. Может ли быть

а) (7) $n = 100$? **б**) (9) $n = 2007$? (*И. Акулич*)

28. (6-7) Можно ли расставить на окружности цифры 0, 1, 2, …, 9 так, чтобы сумма каждых трёх из них, идущих подряд, не превышала 13? (*Фольклор*)

29. (6-7) **а**) В треугольнике все углы измеряются целым числом градусов, причём все цифры в записи углов различны. Каков наибольший возможный НОД величин углов?

б) Сумма нескольких натуральных чисел равна 1000, все цифры в их записи различны. Какие значения может принимать наибольший общий делитель этих чисел? (*А. Шаповалов*)

30. (6-7) **а**) Найдите наибольшее простое число, которое нельзя представить как сумму двух составных.

б) Найдите наибольшее натуральное число, которое не представляется как сумма восемнадцати составных. (*А. Шаповалов*)

31. (6-7) Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причём самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили? (*А. Сгибнев*)

32. (7-8) У натурального числа есть десять различных простых делителей. Докажите, что найдется несколько делителей этого числа, сумма которых делится на 1024. (*Д. Калинин*)

33. (7-8) Пусть n и m – натуральные числа, причём $n > m$. Докажите, что n представимо в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых – делитель числа m, а другое взаимно просто с m. (*С. Конягин*, *А. Спивак*)

34. (9) Пусть p и q – произвольные целые числа. Последовательность чисел x_n определяется следующим образом: $x_0 = p$, $x_n = (n + 1)x_{n-1} + (-1)^n q$ для всех $n \geq 1$. Докажите, что x_n делится на n для всех натуральных n. (*И. Акулич*)

36. (9) Существует ли нечётное число, сумма всех делителей которого (исключая само число) больше него? (*А. Марачёв*)

37. (9) Пусть P – произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q – наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом. (*С. Токарев*)

Дроби

См. также задачи 36, 182, 6А4, 7А3, 8Ал3, 8М1.

38. (6-7) Клетчатая таблица называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы.

Существует ли магический квадрат 3×3, заполненный числами, обратными натуральным? (*А. Шаповалов*)

39. (6-8) За одно нажатие можно число на экране калькулятора увеличить на его дробную часть (например, из $^3/_7$ получить $^6/_7$, а из 3,8 получить 3,8 + 0,8 = 4,6).

а) Начав с положительного числа, меньшего 1, за три нажатия получили число 3. С какого числа начали?

б) Начав с положительного числа, меньшего 1, за десять нажатий получили число 10. С какого числа начали? (*А. Шаповалов*)

40. (7) Григорий Вячеславович планировал, что стоимость проживания на базе составит A рублей с человека в день (A – целое трёхзначное число, большее ста). Узнав, что команд очень много, он снизил оплату на b процентов (b – целое число). В итоге турнир проводился на двух базах, поэтому новая стоимость проживания была поднята также на b процентов. Могло ли оказаться так, что в итоге стоимость проживания на базе отличалась от первоначальной ровно на 1 рубль? (*А. Блинков*)

41. (7-8) В одном стакане было 100 мл раствора кислоты, причём доля кислоты (по объему) составляла 40%, а в другом – 150 мл с долей кислоты 50%. Ложку раствора из первого стакана перелили во второй и, после перемешивания, такую же ложку перелили из второго в стакана в первый. В результате доля кислоты в каждом из стаканов по-прежнему выражалась целым числом процентов.

а) Найдите доли кислоты в стаканах после переливаний.

б) Найдите вместимость ложки (объем ложки меньше стакана). (*С. Токарев*)

42. (8-9) Числа $a^2 - a$ и $a^4 - a$ целые. Докажите, что a – целое число. (*К. Кноп*)

Средние

См. также задачи 80, 82, 90, 7А2, 7А3, 7Т4, 8Ар1, 9П5.

43. (6-7) Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает найти десять различных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых совпадает с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать? (*А. Жуков*)

44. (6-7) Среднее арифметическое всех Володиных оценок по геометрии за четверть – целое число. Если заменить все двойки – тройками, тройки – четверками, а четверки – пятерками, то среднее арифметическое оценок опять-таки будет целым. Что Володя получил в четверти, если известно, что не все его оценки – одинаковые? (*В. Гуровиц*)

45. (7-8) Петя вычислил среднее арифметическое некоторого множества (т. е. неупорядоченного набора) различных степеней двойки. Лена вычислила среднее арифметическое некоторого другого множества различных степеней двойки. Может ли Петино число быть равно Ленином у? (*О. Крижановский*)

46. (7-9) Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались, и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании? (*А. Блинков*)

Комбинаторная арифметика и комбинаторная алгебра

См. также задачи 66, 73, 113, 114, 183, 8Ар3.

48. (6-7) Мартышка, Попугай, Удав и Слонёнок устроили концерт по случаю приезда бабушки Удава. На концерте было исполнено 7 номеров, причем каждый номер представлял собой либо пение вдвоем, либо танец втроем. Никакие два номера не исполнялись одним и тем же составом. Удав участвовал в исполнении одной песни и двух танцев. Мартышка исполнила больше номеров, чем Слонёнок. Сколько номеров исполнил Слонёнок? (*Е. Барабанов*)

49. (6-7) Разложите 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в них было разное число орехов, но никакую из куч нельзя было бы разбить на две так, чтобы число орехов во всех 11 кучках оставалось различным. (*А. Шаповалов*)

50. (7) У Сени есть пять альбомов с фотографиями. Как-то, рассматривая фотографии, он заметил, что суммарное число фотографий в любых двух альбомах принимает только три значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом альбоме? (*Е. Барабанов*)

51. (7-8) В Галактическом теннисном турнире, проведенном по «олимпийской» системе (проигравший – выбывает) участвовало 2^{100} спортсменов. В каждом туре играли все оставшиеся спортсмены. Все матчи одного тура проходили одновременно, и каждый из них судил один арбитр. Известно, что арбитр, судивший финал, не судил больше ни одной встречи. Докажите, что были, по крайней мере, еще два арбитра, судившие по одной встрече. (*Б.Френкин*)

52. (8-9) В строке 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 4 каждое из чисел от 1 до 4 встречается дважды, и количество запятых между одинаковыми числами равно этому числу. А можно ли записать такую строку для чисел от 1 до 2006? (*В. Гуровиц*)

53. (6-7) На доске вначале выписаны два числа: 1 и 2. За один ход разрешается увеличить любое число на доске на сумму цифр другого. Можно ли добиться, чтобы оба числа превратились в 2012? (*А. Шаповалов*)

54. (6-7) На дощечке написаны два числа: с левой стороны – 2012, а с правой – 1000. За один ход можно прибавить к числу, написанному слева, некоторое натуральное число, а число, написанное справа, умножить на то же самое число. Можно ли уравнять числа на разных сторонах дощечки, сделав не более 1000 ходов? (*А. Штерн*)

55. На доске были написаны некоторые целые числа. На каждом шаге мы выбираем числа a и b и заменяем их на числа $3a – b$ и $13a – 3b$.

а) (7) Вначале на доске были записаны числа 1, 2, 3, ..., 32. Можно ли через конечное число шагов получить на доске числа 2, 4, 6, ..., 64?

б) (9) Вначале на доске были записаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012. Можно ли получить числа 2, 4, 6, 8, ..., 4022, 4024? (*Хорватия*, *2012*)

56. (6-7) Миллионзначное натуральное число назовем *кошачьим*, если оно делится на произведение своих цифр. Сколько последовательных натуральных чисел могут быть кошачьими? (*В. Сендеров*)

57. (7) Числа от 1 до 100 раскрасили в несколько цветов так, что разность одноцветных чисел не равна 2, 3 или 6. Каково наименьшее возможное число цветов? (*В. Каскевич*)

58. (7-8) Прибор «Сложномер» представляет любое натуральное число в виде произведения простых чисел (не обязательно различных) и выдает количество сомножителей в таком представлении. Например, для 28 = 2·2·7 «Сложномер» выдает 3. Прибор начали последовательно применять к натуральным числам, начиная с 2. В какой-то момент прибор впервые выдал число, большее 2012. Докажите, что следующее выданное число меньше 2013. (*Б. Френкин*)

59. (7-8) По кругу написаны натуральные числа, причём каждое равно сумме или разности своих соседей. Докажите, что количество чисел на круге делится на 3. (*Фольклор*)

60. (6-8) Турнир математических боев в «Берендеевых Полянах» продолжался 7 дней. На 28 команд-участниц в столовой накрывалось ровно 28 столов. В первый же день не все команды ели за своим столом. Во второй день команд, евших не за своим столом, оказалось на 2 больше, в третий день – еще на 2 больше, и так далее. По окончании турнира Григорий Вячеславович подсчитал, что каждая команда все-таки сумела поесть за отведённым ей столом не менее пяти дней. Сколько команд ели за своим столом в последний день? (В течение одного дня команда ела за одним и тем же столом.) (*А. Блинков*)

61. (8-9) Дана бесконечная последовательность пифагоровых (т. е. прямоугольных с целочисленными сторонами) треугольников. Гипотенуза каждого из них служит катетом следующего. Может ли в этой последовательности быть бесконечно много треугольников, подобных египетскому (т. е. со сторонами 3, 4, 5), не обязательно идущих подряд? (*Б. Френкин*)

62. (8-9) Докажите, что числа от 1 до n можно расставить в ряд так, чтобы каждое делило сумму предыдущих. (*А. Шаповалов*)

63. (9) Каких чисел больше в первой тысяче: представимых или не представимых в виде
$x^3 - y!$, где x и y натуральны? (*В. Сендеров*, *Н. Агаханов*)

Уравнения в целых числах

См. также задачи 60, 7А5, 7К3, 7П4, 8Ал1.

64. (7) Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, для которых

$x + \text{НОД}(y, z) = y + \text{НОД}(z, x) = z + \text{НОД}(x, y)$? (*С. Токарев*)

65. (7-8) Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие системе уравнений $\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n$, $m - n = 2012$. (*Греция*, *2012*)

66. (7-8) Петя выписал строку из трёх положительных чисел, под ней – строку из их попарных сумм, а под ней – строку из попарных произведений чисел второй строки. Числа третьей строки совпали (в каком-то порядке) с числами первой строки. Найдите эти числа. (*Б. Френкин*)

67. (7-8) Найти все тройки простых чисел (p, q, r), удовлетворяющие равенству $p^3 + q^3 = 2r^3$. (*В. Сендеров*)

68. (7-8) Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 = 2^{2007}$. (*С. Мазаник*)

69. (7-8) Пункты A, B и C соединены прямыми дорогами (хотя бы одна дорога между каждой парой городов). Известно, что между A и B есть всего 127 маршрутов (прямых и через C), а между A и C есть всего 164 маршрута (прямых и через B). Сколько всего маршрутов между B и C (прямых и через A)? (*А. Шаповалов по мотивам шведских олимпиад*)

70. (8-9) Найдите все пары натуральных чисел x и y, при которых $2^x(x + 1) = 2^y(x + y)$. (*В. Сендеров*)

71. (8-9) Найдите все простые числа вида $(3 + n)^4 - 256n$, где n натурально. (*В. Сендеров*)

72. (8-9) Найдите все натуральные x, y, при которых $9^x = 2y^2 + 1$. (*В. Сендеров*)

73. (8-9) У Данилы есть простое число p. Он полагает натуральное число k *хорошим*, если $k^2 + p$ раскладывается на множители, большие k. Три хороших числа Данила нашёл. Докажите, что он, если покопается, найдёт и четвёртое. (*М. Антипов*)

74. (9) Найдите все натуральные m, при которых число $1 + 2^m$ – простое и делит $3^m + 4^m$. (*В. Шарич*)

Задачи на движение

См. также задачи 252, 6А5.

75. (6-7) Вася отправился из пункта A в пункт B. Он прошел пешком $^1/_5$ часть пути, а затем сел на автобус и проехал оставшееся расстояние, что заняло по времени $^1/_4$ часть всего путешествия из A в B. На следующий день Вася отправился из пункта B в пункт C.

а) Вначале он ехал на автобусе, что заняло по времени $^1/_7$ часть путешествия из B в C, а остальной путь прошел пешком. Какую часть расстояния прошел Вася пешком во второй день? (Скорость автобуса постоянна, скорость Васи тоже.)

б) Вначале он ехал на автобусе, что заняло по времени $^1/_5$ часть путешествия из B в C, а остальной путь прошел пешком. Какую часть расстояния прошел Вася пешком во второй день? (Скорость автобуса постоянна, скорость Васи тоже.) (*Б. Френкин*)

76. (6-8) **а**) Маша вышла из дома, через 12 минут оттуда же вышли Миша и Тиша. Миша шел вдвое быстрее Тиши и догнал Машу за 4 минуты. За сколько минут догнал Машу Тиша? (*Жюри*)

б) Маша вышла из дома, через некоторое время оттуда же вышел Миша, который еще через какое-то время догнал Машу. Если бы Миша шел вдвое быстрее, то он догнал бы Машу в три раза быстрее. Во сколько раз быстрее Миша догнал бы Машу (по сравнению с реальным временем), если бы вдобавок Маша шла вдвое медленнее? (*Д. Шноль*)

77. (6-7) Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист отставал от них на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист? (*Фольклор*)

78. (7-9) Дорога от Судиславля до Москвы состоит из трёх участков: Судиславль – Кострома (50 км), Кострома – Ярославль (80 км) и Ярославль – Москва (260 км). Автобус, скорость которого нигде не превышала 80 км/ч, проехал от Судиславля до Ярославля за 2 часа, а от Костромы до Москвы – за 5 часов. Какое время автобус мог быть в пути? (*С. Волчёнков*)

79. (7-8) **а**) По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их третья встреча произошла на линии старта. Известно, что первый тратил на один круг на 45 секунд меньше второго. Через какое время после старта произошла первая встреча?

б) По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их седьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг трека, если известно, что первый тратил на него на 12 секунд меньше второго, а второй – не меньше 30 секунд?

в) По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их восьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг трека, если известно, что первый тратил на него на 14 секунд больше второго, а второй – не меньше 30 секунд? (*Фольклор*)

Уравнения и неравенства

См. также задачи 8Ар5, 9П3.

80. (6-7) Найдутся ли три положительных числа, из которых одно равно произведению двух других, другое – разности двух других, а третье – полусумме двух других? (*А. Шаповалов*)

83. (8-9) Пусть d – наибольшее из положительных чисел a, b, c, d. Доказать неравенство $a(d-b)+b(d-c)+c(d-a)\le d^2$. (*Сербская олимпиада*, *1995*)

84. (9) Пусть a и b – положительные числа, а n – натуральное число, большее 1. Докажите, что если $x > 0$ и $x^n \le ax + b$, то $x < \sqrt[n-1]{2a} + \sqrt[n]{2b}$. (*Германия*, *2012*)

91. (8) Решите систему: $6 \le x \le y \le z \le 8$; $(x+3y+3z)^2 \le 48xz$. (*С. Дворянинов*)

92. (9) Дано целое число a, большее 1. Найдите такую арифметическую прогрессию с первым членом a и содержащую два числа из набора $a^2, a^3, \ldots, a^{18}$, чтобы ее разность была наибольшей. (Не предполагается, что разность будет целым числом.) (*Чехия*, *2011/12*)

Квадратный трехчлен, многочлены, функции

См. также задачи 71, 74, 8Ал4, 8Ал5, 9П5.

93. (8-9) Даны пять вещественных чисел: коэффициенты квадратного трёхчлена и его корни. Их произведение положительно. Сколько их этих 5 чисел положительны? (*Б. Френкин*)

94. (8-9) **а**) Дан квадратный трёхчлен с ненулевыми коэффициентами, имеющий вещественный корень. Всегда ли можно поставить коэффициенты в таком порядке, чтобы полученный трёхчлен имел отрицательный корень?

б) Существуют ли такие три вещественных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом – два отрицательных? (*Б. Френкин*)

95. (8-9) **а**) Найдите все квадратные трёхчлены с целыми коэффициентами, у которых сумма корней равна их произведению и равна дискриминанту.

б) Найдите все квадратные трёхчлены, у которых сумма корней равна их произведению и равна дискриминанту. (*А. Блинков*)

96. (8-9) Докажите, что существует бесконечно много приведённых квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту. (*А. Хачатурян*)

97. (8) Найдите все простые натуральные числа p и q, для которых уравнение $x^2 + px + q = 100$ имеет два целых корня. (*В. Каскевич*)

99. (8-9) Графики двух приведённых квадратных трёхчленов пересекаются в точке A, а прямая m касается этих графиков в точках B и C. Известно, что $AB = AC$. Докажите, что m горизонтальна. (*А. Шаповалов*)

100. (8-9) Квадратный трёхчлен $P(x)$ имеет различные корни r и s. Симметрично отразив его график относительно вертикальной прямой $x = r$, получим график другого трёхчлена $Q(x)$. Сколько корней может иметь трёхчлен $P(x) + Q(x)$? (*Б. Френкин*)

101. (8-9) Существуют ли такие функции f и g, определенные для всех действительных x, что $f(g(x)) = x + 1$ при всех x, а $g(f(x))$ не равно $x + 1$ ни при каких x? (*А. Блинков*)

102. (9) a, b и c – различные целые числа. Известно, что уравнение $(x+a)(x+b)(x+c)+5=0$ имеет целый корень. Докажите, что других целых корней у него нет. (*Сингапурские олимпиады*, *модификация*)

103. (7-8) Многочлен стандартного вида с одной переменной тождественно равен сумме квадратов двух двучленов. Может ли он состоять из четырёх слагаемых? (*Д. Шноль*)

104. (8-9) Многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ таковы, что $P(x) = Q(x)R(x)$. Про $P(x)$ известно, что он имеет степень четыре и все его коэффициенты по модулю не превосходят единицы. Найти наибольшее возможное значение наибольшего из коэффициентов многочленов Q и R. (*В. Сендеров*)

Логические задачи

См. также задачи 15, 6Л1, 6Л3-4.

105. (6) В "Берендеевых Полянах" для всех школьников были проведены: математическая карусель, командная и личная олимпиады. Оказалось, что среди каждых трёх человек найдутся два, которые были награждены в одном и том же соревновании. Верно ли, что из этих соревнований можно выбрать такое, что все награжденные в нём школьники были награждены не только в этом соревновании? (*Д. Калинин*)

106. (6-7) **а**) Было 12 карточек с надписями «Слева от меня – ровно 1 ложное утверждение», «Слева от меня – ровно 2 ложных утверждения», …, «Слева от меня – ровно 12 ложных утверждений». Петя разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными?

б) Было 33 карточки с надписями «Слева от меня ровно 1 карточка, где написана ___», «Слева от меня ровно 2 карточки, где написана ___», …, «Слева от меня ровно 33 карточки, где написана ___». Вместо подчеркивания Петя вписал «ложь» или «правда» и разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число надписей могло стать правдой? (*А. Шаповалов*)

Лжецы и рыцари

В задачах про лжецов и рыцарей рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На Острове рыцарей и лжецов живут только рыцари и лжецы. Если явно не сказано другое, они знают друг про друга, кто есть кто.

См. также задачи 6Л2, 6Л5.

107. (6-8) На Острове рыцарей и лжецов как-то встретились три аборигена: *Ах*, *Ох* и *Ух*. Один из них сказал: «*Ах* и *Ох* – оба лжецы», другой сказал: «*Ах* и *Ух* – оба лжецы» (но кто именно что сказал – неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трёх аборигенов? (*Е. Барабанов*)

108. (6-7) Шесть незнакомых между собой жителей Острова рыцарей и лжецов поужинали за круглым столом при свечах, так что каждый из них разглядел и запомнил только двух своих соседей по столу. Назавтра одному из них – Артуру – захотелось узнать, кто сидел напротив него. Он может за один вопрос узнать у каждого про любого другого (кроме себя), спросив: «Сидел ли тот рядом с тобой за ужином?». Хватит ли Артуру четырёх вопросов? (*А. Шаповалов*)

109. (6-8) **а**) За круглым столом сидят 9 жителей Острова рыцарей и лжецов. Каждый их них сказал: «Мои соседи – рыцарь и лжец». Сколько среди них лжецов? *(Фольклор)*

б) За столом сидело несколько жителей Острова рыцарей и лжецов. Путешественник спросил каждого про его ближайших соседей. Каждый ответил: «Оба моих соседа – лжецы». Путешественник сказал: «Если бы вас было на одного больше или на одного меньше, я бы смог узнать, сколько среди вас рыцарей. А так не могу». Сколько человек было за столом? (*Д. Шноль*)

110. (6-7) Все гномы делятся на лжецов и рыцарей. На каждой клетке доски 4×4 стоит по гному. Известно, что среди них есть и лжецы и рыцари. Каждый гном заявил: «Среди моих соседей лжецов и рыцарей поровну». Сколько всего лжецов? (*А. Шаповалов*)

111. (6-7) В отряде богатырей все весят по-разному и делятся на наивных (всегда говорят правду) и тёртых (хану правды не говорят).

а) Несколько богатырей стали в круг. На вопрос хана: «У тебя есть тёртый сосед легче тебя?» все ответили: «Нет». После разминки они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос хана: «У тебя есть наивный сосед легче тебя?» кто-нибудь ответит: «Нет».

б) Несколько богатырей стали в круг. На вопрос хана: «У тебя есть тёртый сосед легче тебя?» все ответили: «Да». После разминки они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос хана: «У тебя есть наивный сосед легче тебя?» кто-нибудь ответит: «Да». (*А. Шаповалов*)

112. (6-8) На конгрессе были три секции: лекари, колдуны и знахари. По кругу выстроились 112 участников, среди которых знахарей и лекарей поровну. На вопрос “Верно ли, что оба твоих соседа из одной секции?” каждый ответил: “Да”. Лекарь всегда говорит правду, колдун всегда лжет, а знахарь лжет, если стоит рядом с колдуном (а иначе говорит правду). Могло ли в этом круге быть 66 колдунов? (*А. Шаповалов*)

Соревнования логиков

113. (6-8) Каждому из трёх логиков написали на лбу натуральное число, причём одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных? (*Фольклор*)

114. (**6-8**) Математик C предложил математикам A и B такую загадку:

– Я задумал три различных натуральных числа, произведение которых не превосходит 50. Сейчас я конфиденциально сообщу A это произведение, а B – сумму задуманных чисел. Попробуйте отгадать эти числа.

Узнав произведение и сумму, соответственно, A и B вступили в диалог:

A: Я не знаю этих чисел.

B: Если бы моё число было произведением, я бы знал загаданные числа.

A: Но я все равно не знаю этих чисел.

B: Да и я не знаю.

A: А я уже знаю их.

B: Да и я знаю.

Какие же числа задумал математик C? (*В. Лецко*)

Комбинаторные задачи

Классическая комбинаторика

См. также задачи 1, 32, 63, 69, 121, 220, 6К3, 6К4, 6Ч1, 6Ч3, 6Ч5, 7Т1, 7К2, 7К4, 8К1-3, 8К5, 9КГ1.

115. Набор из трёх палочек назовем *хорошим*, если из них можно сложить треугольник (то есть, сумма длин двух коротких больше длинной палочки).

а) (7-8) Есть 2007 палочек длин 1, 2, 3, ..., 2007. Каких наборов из них можно составить больше: хороших или не хороших?

б) (8) Найдутся ли не более 6000 палочек разной длины, из которых можно выбрать хороший набор ровно 2007 способами?

в) (9) Найдутся ли 25 палочек разной длины, из которых можно выбрать хороший набор ровно 2007 способами? (*А. Шаповалов*)

116. (8-9) Дан куб со стороной $n > 1$, где n – натуральное число. Сколькими способами его можно разбить на бруски размером $1\times1\times n$? (Куб неподвижен, то есть различные способы, которые при повороте куба совпадают, считаются различными.) (*В. Брагин*)

117. (8-9) На клетчатой доске $n\times n$ выделены поля большой диагонали из верхнего левого угла в правый нижний. За одну операцию разрешается выбрать любую клетку на диагонали, поставить по шашке на все пустые клетки слева от нее и снять все шашки с клеток под ней. Какое количество различных расположений шашек можно получить такими операциями из пустой доски? (Пустая доска тоже считается за одно расположение.) (*П. Грозман*)

Дискретная непрерывность

См. также задачу 133.

118. (6) На каждом листе тетради из 96 листов Дима нарисовал страшную рожу. Рисунок был либо с одной стороны листа, либо с другой, причем если Дима положит тетрадь на стол, то некоторые рожи будут «смотреть» вверх (на Диму), а остальные – вниз (в стол). Верно ли, что можно раскрыть тетрадь в таком месте (или вообще ее не открывать), чтобы вверх и вниз «смотрело» одинаковое количество рож? (*И. Акулич*)

Индукция

См. также задачи 117, 184, 216, 8Г1, 8К5, 8М5, 9П5.

119. Из колоды отложили часть карт. Докажите, что оставшиеся можно разделить между двумя игроками так, чтобы у них общее число карт, число карт каждой масти и число карт каждого достоинства отличалось не более, чем на 1. (*А. Шаповалов*)

Примеры и оценки

См. также задачи 2, 3, 6, 8, 10, 16, 18в, 19, 20, 22, 24, 28, 29, 30, 31, 36, 39, 46, 56, 57, 58, 64, 106, 144, 145, 150, 151, 152, 156, 157, 158, 161, 162, 163, 167, 168, 172, 174, 175, 184, 186, 191, 196, 198, 199, 203, 204, 206, 218, 219, 220, 221, 222, 6Ц3-4, 6К1, 6К5, 6Ч2, 7А1, 7А4, 7Т2-3, 7Т5, 7К5, 7П3, 7П5, 8Ал2-3, 8Г1, 8Ар5, 8К4, 8М1-5, 9П1-2, 9КГ2, 9КГ4-5,9Т2, 9Т4-5.

120. (7-9) Кузнец Емельян сделал набор из четырёх железных и одной золотой гирьки, где золотая по весу не меньше каждой из железных. Известно, что любой целый вес от 1 г до 10 г можно набрать одной или несколькими гирьками набора. Какое наименьшее количество золота мог потратить кузнец? *(А.Шаповалов)*

121. (7-9) **а**) Девять гномов трижды становились по одному в клетки квадрата 3×3, и каждый раз гномы, оказавшиеся в соседних по стороне клетках, здоровались. Докажите, что какие-то два гнома так и не поздоровались.

б) Сколько раз можно расставить числа от 1 до 9 в клетки квадрата 3×3 так, чтобы каждые два числа оказывались в соседних по сторонам клетках не более одного раза? (*А. Грибалко*)

122. (7-9) На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединяются дугой, если $|x-y|$ – простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все целые точки, так чтобы каждые две соединенные точки были разного цвета? (*Фольклор*)

123. (7-8) Каждый из членов Мирового Правительства знает по два языка и может общаться без переводчика со всеми своими коллегами, кроме одного. Сколько членов может насчитывать Правительство? (*С. Токарев*)

124. (7-8) **а**) Есть две кубические коробочки (без крышек), которые плотно вкладываются друг друга, как бы мы их не повернули. На всех 12 ребрах каждой из этих коробочек расставлены стрелки. Может ли оказаться, что при любом вложении одной коробочки в другую на примыкающих ребрах совпадут направления ровно 6 стрелок?

б) То же, но коробочек три.

в) Куб плотно лежит в коробке без крышки. На всех рёбрах куба и всех рёбрах коробки нарисованы стрелки. Известно, что как ни положить куб в коробку, на примыкающих ребрах совпадут направления ровно n стрелок. Чему может быть равно n? (*А. Блинков*, *И. Раскина*)

125. (8) В одном из судиславских городских автобусов недавно была введена новая форма оплаты проезда. Пассажиры приобретают талон, имеющий форму круга, разбитого на 13 равных секторов. Одна сторона талона покрашена в синий цвет, а другая – в жёлтый. При входе в автобус они вставляют талон в электронный компостер синей стороной вверх, и компостер пробивает несколько секторов, предварительно проверяя, что эти секторы не были пробиты ранее. Какое наименьшее количество секторов должен пробивать компостер, чтобы один и тот же талон нельзя было использовать дважды? (*А. Акопян*)

Алгоритмы

См. также задачи 53, 54, 57, 62, 115, 122, 139, 149, 151, 154, 155, 157, 158, 164, 165, 166, 177, 178, 210.

126. (6-7) Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трёх человек. Беда в том, что стиральная машина тяжёлая, поэтому погрузить ее в катер или вытащить из него можно только втроем. Смогут ли они переправиться? (*Д. Шаповалов*)

127. (7-8) Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трёхместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.) (*А. Шаповалов*)

128. Большая свеча сгорает за час и стоит 60 рублей, а маленькая сгорает за 11 минут и стоит 11 рублей. Можно ли отмерить минуту, затратив не более, чем

а) 200 рублей; **б**) 150 рублей? (*А. Шаповалов*, *Л. Медников*)

129. На Мишином плеере при нажатии кнопки «вперёд» номер текущей песни увеличивается, но не более, чем на 2, а при нажатии кнопки «назад» – уменьшается не более, чем на 2. Переходы на каждую из возможных песен происходят с ненулевой вероятностью (если достаточно много раз нажать на кнопку, начав с одной и той же песни, то каждый переход случится хотя бы один раз). Миша нажал кнопку «вперёд», и песня сменилась. Как ему узнать, на сколько увеличился номер песни? Разрешается сколько угодно жать на кнопки, но нельзя просто дослушать песню и подождать, что будет дальше. (Известно, что песни, о которых идет речь, расположены «достаточно далеко» от концов ленты.) (*М. Артемьев*)

130. Есть m тортов, каждый из которых имеет вес 1. Мы хотим разделить их поровну между n школьниками ($m < n$). Докажите, что это всегда можно сделать так, чтобы каждый кусок, получившийся при дележе, весил не меньше $m/3n$. *(К. Кноп, И. Богданов)*

Взвешивания

131. (6-7) Есть 12 внешне одинаковых монет двух сортов, по 6 каждого сорта, За одно взвешивание про любую группу можно узнать, сколько в ней монет первого сорта. Как за два взвешивания найти пару монет разного сорта? (Какая из них какого сорта выяснять не надо.) (*А. Шаповалов*)

132. (6-7) В наборе 7 гирь. Арбуз можно уравновесить тремя гирями, можно четырьмя, а можно и пятью. Докажите, что одну из гирь набора можно уравновесить несколькими другими. (*А. Шаповалов*)

133. (8-9) В ряд лежат 300 апельсинов, веса соседних отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что их можно разложить в пакеты по 3 штуки и положить пакеты в ряд так, чтобы веса любых двух соседних пакетов отличались не более чем на 10 г. (*А. Шаповалов*)

134. (8-9) Есть 10 яблок, каждое из которых весит не более 100 г, и две одинаковые тарелки. Докажите, что

а) можно выбрать какое-то количество яблок и положить их в одну или обе тарелки так, чтобы веса в тарелках отличались меньше, чем на 1 г.

б) можно положить в тарелки по одинаковому количеству яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше, чем на 2 г. (*А. Шаповалов*)

135. (6-8) В ряд лежат 5 монет. Известно, что две из них фальшивые (одного веса и легче настоящих). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, сколько настоящих монет лежит между фальшивыми? (*А. Шаповалов*)

136. (7-8) Есть 10 внешне одинаковых монет. Суд знает, что их веса 1 г, 2 г, ..., 10 г. Эксперт знает точный вес каждой монеты. У него есть весы с двумя чашками, которые показывают равновесие (загорается лампочка) или неравновесие, но не показывают, какая чаша тяжелее. Может ли эксперт провести три взвешивания так, чтобы по их результатам суд мог однозначно определить вес каждой монеты? (*А. Шаповалов*)

137. (7-8) На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырёх есть ровно одна фальшивая монета, среди последних двух – тоже одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже весят одинаково и легче настоящих.

а) Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить обе фальшивые монеты?

б) Импортные чашечные весы сообщают результат взвешивания на следующий день. Можно ли сегодня провести такие два взвешивания, чтобы завтра по полученным результатам наверняка определить обе фальшивые монеты? (*В. Трушков*)

138. **а**) (7-8) Гирьки весом 1, 2, 3, ..., 40 граммов разложили на две чашки весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось. (*А. Шаповалов*)

б) (8-9) То же для гирек от 1 до n граммов, где $n > 4$.

139. (7-8) Ире принесли семь драгоценных камней разного веса. Прибор «РИВ-6» умеет за одно испытание из шести камней выбрать два средних по весу.

а) Как за пять испытаний Ира сможет найти самый средний по весу камень из семи?

б) За какое минимальное число применений прибора она гарантированно сможет найти средний по весу камень? (*В. Трушков*, *И. Руденко*)

Клетчатые задачи

См. также задачи 121, 7К4, 9КГ1, 9КГ3, 9Т2, 9Т4-5.

142. (**7-8**) Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2 (поля d4, e4, d5, e5). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырёх квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать. (*В. Шарич*)

143. (7-8) При каких n квадрат $n \times n$ можно разбить на трёхклеточные уголки и правильно их раскрасить в два цвета? (Раскраска называется правильной, если уголки, имеющие общую границу ненулевой длины, раскрашены в разные цвета.) (*М. Артемьев*)

144. (7) Есть клетчатая рамка 10×10 толщиной в одну клетку (см. рис.). Ее разрезали по границам клеток на различные части и сложили из них квадрат 6×6. Каково наибольшее число частей? (*А. Шаповалов*)

145. (7) Галя вышивает крестиком узор на квадрате 10×10. Она считает узор красивым, если он центрально-симметричен и при этом каждые два крестика одного цвета соединены цепочкой крестиков того же цвета с общими сторонами. Какое наибольшее число цветов сможет использовать Галя? (*И. Раскина*, *А. Артемьев*)

1147. (6-7) Карандаш раскрасил деревянный кубик в соответствии с развёрткой (на рисунке в центре цифры означают цвета). Самоделкин распилил его на 8 кубиков, у каждого получились три грани окрашены, а три – нет. Он составил кубики обратно в виде куба, вся поверхность которого окрашена. Гурвинек смотрит на кубик и видит, конечно, не все грани, а только три, повёрнутые к нему (рис. справа). Но он утверждает, что знает, какой кубик лежит в дальнем от него углу. Какой? (*Кукинская*, *2011*)

148. (6-7) Можно ли в таблице 3×3 расставить числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в каждых трёх клетках, никакие две из которых не лежат на одной вертикали или горизонтали, равнялась 15? (*Д. Калинин*)

149. (7-9) **а**) Можно ли в клетках таблицы 12×12 расставить натуральные числа от 1 до 144 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечётными?

б) То же для таблицы 100×100 и чисел от 1 до 10000. (*В. Берник*, *И. Акулич*)

150. **а**) (6) Есть лист клетчатой бумаги и карандаши шести цветов. Какое наименьшее число клеток надо закрасить так, чтобы для любых двух разных цветов нашлась закрашенная в них пара клеток с общей стороной?

б) (7) То же для карандашей 10 цветов.

в) (8-9) То же для карандашей 7 цветов. (*С. Токарев*)

151. (6-8) **а**) На шахматную доску по одной выставляются чёрные и белые ладьи в любом порядке. В момент выставления ладья должна побить поровну белых и чёрных ладей (например, не бить никого). Какое наибольшее количество ладей может быть выставлено? (Ладьи бьют друг друга, если стоят на одной вертикали или горизонтали, и между ними нет других ладей.)

б) То же, но ладьи выставляются только *на край* шахматной доски. (*А. Шаповалов*)

152. (7-8) Могут ли 7 слонов побить все клетки доски 4×10? (*А. Шаповалов*)

153. (7-8) Можно ли кубик Рубика 8×8×8 оклеить без щелей и перекрытий прямоугольниками 1×2 так, чтобы каждый прямоугольник заклеивал ровно две клетки и у всех было

а) ровно 6 соседей?

б) одинаковое четное число соседей?

(Соседи имеют общую границу ненулевой длины. Перегнутый прямоугольник может закрывать две клетки на соседних гранях.) (*А. Шаповалов*)

154. (7-8) В прямоугольной таблице клетки нумеруются по порядку: сначала первая строка слева направо, затем вторая строка слева направо и т. д. Барон Мюнхгаузен готов для каждого n предъявить такую таблицу, разрезанную на n многоугольных частей с равными суммами номеров в каждой части. Не хвастает ли барон? (*А. Шаповалов*)

155. (8-9) Клетки доски $m\times n$ раскрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки – в чёрный цвет, чёрные – в красный, а красные – в белый. При каких m и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски были покрашены в чёрный цвет, а чёрные – в белый? (*М. Ахмеджанова*, *К. Кохась*)

156. (7-8) В левом нижнем углу шахматной доски стоит шашка. Ее можно передвигать на одну клетку вверх, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку по диагонали вниз-влево. Можно ли, двигая шашку таким образом, обойти все клетки доски, побывав на каждой из них один раз? *(Фольклор)*

157. (7-9) **а**) Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в три цвета так, чтобы выполнялось условие: если у клетки k есть два соседа p и q одного цвета, то у k есть ещё два соседа одинакового цвета, но не такого, как у p. Сможет ли он это сделать? (Соседями считаем клетки с общей стороной.)

б) При каких m художник сможет так раскрасить доску в m цветов? (*Е. Барабанов*, *И. Акулич*)

158. (7-8) Петя по одной выставляет ладьи на пустые клетки доски 5×5. За каждую ладью, которая в момент выставления может побить ладей не меньше, чем пустых полей, Петя получает рубль. Какое наибольшее количество рублей сможет заработать Петя? (Ладья бьет другую ладью или клетку, если между ними нет других ладей.) (*А. Шаповалов*)

159. (6-7) На шахматную доску поставили три коня и три ладьи так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой. Докажите, что кони друг друга не бьют. (*А. Шаповалов*)

160. (7-8) На доске 10×10 стоят 20 фишек с номерами 1, 1, 2, 2, …, 10, 10. На каждую вертикаль и на каждую горизонталь попали по две фишки. Может ли для каждой пары фишек с одинаковыми номерами кратчайший путь ладьи между ними быть равен их номеру? (Сторона клетки равна 1). (*А. Грибалко*)

161. (7-9) Есть обычный комплект домино из 28 доминошек. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить весь комплект так, чтобы в каждой паре клеток с общей стороной, накрытых *разными* доминошками, были одинаковые цифры? (Комплект домино – это набор из 28 прямоугольников 1×2, в каждой клетке которых написана одна из цифр от 0 до 6, причём каждая пара цифр встречается ровно на одной доминошке. При выкладывании комплекта 8 клеток останутся не накрыты.) (*А. Шаповалов*)

162. (7-8) В угловой клетке шахматной доски 100×100 стоит фишка. За один ход разрешается передвинуть ее на соседнюю клетку по горизонтали, вертикали или диагонали так, чтобы при этом расстояние от центра начальной клетки до центра той, в которой находится фишка, постоянно увеличивалось. Какое наибольшее число ходов можно сделать, соблюдая это условие? (*А. Грибалко*)

163. (7-9) Муравей стартовал из угла шахматной доски. Ему разрешено пересекать каждую клетку по диагонали, запрещено бывать внутри одной клетки дважды, запрещено выходить за пределы доски и ползать вдоль границ клеток. Внутри какого наибольшего числа клеток он может побывать? (*А. Шаповалов*)

164. (7-9) Куб $n{\times}n{\times}n$ состоит из n^3 кубических клеток. Хромая ладья одним ходом передвигается на одну клетку в любом параллельном ребрам куба направлении, причем никакие *два шага подряд она не делает в одном направлении*. Замкнутый маршрут хромой ладьи прошел через все клетки по разу.

а) Возможно ли это при $n = 4$?

б) При каких $n > 1$ это возможно? (*А. Шаповалов*, *О. Крижановский*)

165. (8-9) Трёхмерная доска 18×18×18 состоит из кубических клеток. Параллельные граням слои считаются плоскими досками 18×18. Шахматный слон ходит по диагонали в любой из этих плоских досок. Докажите, что если слон может попасть из клетки A в клетку B, то он может сделать это не более чем за 3 хода. (*М. Артемьев*, *К. Кноп*, *А. Шаповалов*)

Турниры

В шахматных турнирах дается 1 очко за победу, ½ – за ничью, 0 – за поражение. В футбольных турнирах дается 3 очка за победу, 1 – за ничью, 0 – за поражение. В однокруговом турнире каждый участник играет с каждым другим ровно один раз.

См. также задачи 7Т1-5.

166. (6-7) В турнире участвуют 64 боксера разной силы. Можно ли за 70 боёв выявить двух сильнейших?

167. (7-8) После окончания чемпионата мира по футболу для каждой команды посчитали отношение числа голов, забитых ею с пенальти, к числу пробивавшихся ею пенальти и отношение числа голов, пропущенных с пенальти, к числу пенальти, пробитых в ее ворота. Может ли у всех команд первый показатель быть меньше второго? (*А. Заславский*)

168. (7-9) В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью не больше трёх игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире? (*И. Акулич*)

169. (6-7) Групповой турнир ЧЕ по футболу был проведен для четырёх команд в один круг. В итоговой таблице команды расположились так, что у каждой, начиная со второй, ровно на 1 очко меньше, чем у предыдущей. Восстановите исходы всех матчей. (*А. Блинков*)

170. (6-7) В Лиге Чемпионов стран Балтии участвуют шесть футбольных команд (по две от каждой страны – Латвии, Литвы и Эстонии). Они должны провести турнир в один круг (причем все три матча каждого тура проходят одновременно). Можно ли так составить расписание туров, чтобы для обслуживания каждого тура приглашать ровно по одной судейской бригаде из каждой страны? (Например, бригада из Латвии может судить либо матч двух латвийских команд, либо матч, в котором латвийские команды не играют). (*А. Блинков*)

171. (6-7) В однокруговом шахматном турнире у каждого из игроков чего-нибудь было столько, сколько у остальных вместе, в частности у Оси – очков, у Нины – ничьих (в одной был пат), у Проши – проигрышей, а у Зины – забавных ходов. Восстановите результаты всех партий. (*А. Шаповалов*)

172. (6-7) В однокруговом турнире по футболу все команды набрали разное число очков.

а) Могло ли случиться, что разность забитых и пропущенных мячей у каждой команды тем больше, чем меньше сумма очков?

б) При каком наименьшем числе *ничьих* такое могло случиться?

в) При каком наименьшем числе *команд* такое могло случиться? (*А. Заславский*, *А. Шаповалов*, *Б. Френкин*)

173. (8-9) После нескольких игровых дней однокругового турнира выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры). (*С. Волчёнков*)

174. (7-8) В однокруговом турнире по футболу принимали участие 6 команд. По итогам турнира каждая команда, начиная со второй, набрала на 2 очка меньше, чем предыдущая. Как сыграли между собой команды, занявшие третье и последнее место? (*А. Грибалко*)

175. (7-8) От футбольного турнира 18 команд в один круг осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей: 18 – 18, 17 – 1, 16 – 2, 15 – 3, ..., 1 – 17. Докажите, что была хотя бы одна ничья. (*А. Шаповалов*)

176. (6-7) В однокруговом чемпионате по матбоям участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. В газете написали, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей. Докажите, что журналисты ошиблись. (*Ю. Лифшиц, Уральский турнир*)

Процессы

См. также задачи 7П1-5, 8Г1.

177. (6-7) В водоеме плавало 2007 щук и 2007 акул. Акула может съесть щуку, если та до этого съела чётное число акул. Щука может съесть акулу, если та до этого съела нечётное число щук. (Съеденное мгновенно переваривается.) Акулы не едят акул, а щуки – щук. Могло ли так случиться, что в водоеме осталась только одна рыба? Какая? (*И. Богданов*)

179. (6-9) **а**) Колонна солдат-новобранцев выстроилась несколькими одинаковыми шеренгами, составляющими прямоугольник. По команде «смирно» некоторые из них с перепугу сделали поворот направо, другие – налево, третьи – кругом, а кое-кто вообще остолбенел и остался неподвижен. Далее через каждую секунду происходит следующее: в каждой паре, оказавшейся лицом к лицу, один из солдат делает поворот направо. Верно ли, что повороты рано или поздно прекратятся?

б) Докажите, что если в каждой паре, оказавшейся лицом к лицу, делают поворот направо оба солдата, то со временем повороты прекратятся. (*И. Акулич*)

180. (7-8) В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел *плохой*, если они одной чётности и левое больше правого, либо они разной чётности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся. (*А. Шаповалов*)

181. (7-8) Откопав клад из 100 алмазов, каждый из семи гномов схватил алмазов, сколько успел. Когда у одного из гномов алмазов меньше, чем у каждого из остальных, он обижается, и все остальные, по древнему обычаю, должны отдать ему по одному алмазу. Этот процесс надо повторять, пока кто-либо из гномов обижается. Докажите, что передел собственности рано или поздно закончится. (*А. Артемьев*, *И. Раскина*)

б) То же для клада из 2012 золотых монет.

182. (8-9) На доске записаны числа 1, 2, 4, 8, ..., 512. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них частное от деления их произведения на их сумму. Докажите, что число на доске после девяти операций не зависит от порядка выбора чисел, и найдите это число. (*А. Шаповалов*)

183. (8-9) Саша разрезал головку сыра на 10 кусков и съел самый маленький кусок. Потом он разрезал один из кусков на два и съел самый маленький кусок из десяти. Эту операцию (разрезание и съедение) он сделал еще один раз. Какую наибольшую долю головки мог съесть Саша? (*А. Шаповалов*)

184. (7-9) За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). (*А. Шаповалов*)

а) Докажите, что за 3 операции треугольник можно превратить в любой другой треугольник того же периметра.

б) Докажите, что за 12 операций можно из правильного треугольника со стороной 1 сделать правильный треугольник со стороной 40.

в) За какое наименьшее число операций можно из правильного треугольника со стороной 100 сделать правильный треугольник со стороной 1? (*А. Шаповалов*)

Игры

См. также задачу 200.

185. **а**) (6) На длинном столе в ряд лежат 100 кучек по одному ореху. Первый и второй ходят по очереди. За ход нужно найти какие-нибудь две соседние кучки (то есть без кучек между ними), где правая не меньше левой, и объединить их в одну. Тот, кто делает последний ход, выигрывает. Кто из играющих сможет выиграть, как бы ни играл противник?

б) (7) На длинном столе в ряд лежат 2007 кучек по одному ореху. Первый и второй ходят по очереди. За ход нужно найти какие-нибудь две соседние кучки, где правая не меньше левой, и объединить их в одну. Тот, кто делает последний ход, выигрывает, и получает последнюю созданную им кучку. Какое наибольшее число орехов может гарантированно получить победитель? (*С. Усов*)

186. (6-7) На некоторых клетках прямоугольной клетчатой доски лежит по одному бобу, причём на каждой горизонтали и на каждой вертикали число бобов одно и то же (больше одного). Гарик и Вера ходят по очереди, начинает Гарик. За ход можно снять с доски любой боб. Если образуется пустая вертикаль, выигрывает Вера, если горизонталь – Гарик, а если горизонталь и вертикаль одновременно, то ничья. Докажите, что Вера всегда сможет выиграть. (*В. Гурвич*)

187. (6-8) Есть три кучки из 2005, 2006 и 2007 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять два камня, по одному из каких-нибудь двух кучек. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из ребят может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Д. Калинин*)

188. (6-8) Перед Петей и Васей лежат кучки по 100 монет. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять из чужой кучки одну или несколько монет и переложить в свою кучку. Каждым ходом надо перекладывать новое число монет. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

189. (6-7) На доске написаны натуральные числа от 1 до 27. Двое игроков по очереди вычеркивают по одному числу, пока не останется два числа. Если их сумма кратна 5, то выигрывает первый игрок, иначе – второй. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Фольклор*)

190. (7-8) **а**) На всех полях доски 1×2011, кроме крайних, стоит по шашке. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Ход – это прыжок шашки ровно через одну шашку на одно из свободных полей, перепрыгнутая шашка снимается. Центральная шашка отмечена. Выигрывает тот, кто снимет отмеченную шашку. Кто из игроков может выиграть, как бы не играл соперник? (Отмеченная шашка тоже может ходить.)

б) Игровое поле – бесконечная полоска шириной в одну клетку. На 100 клетках подряд стоит по шашке. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Ход – это прыжок шашки ровно через одну шашку на одно из свободных полей, перепрыгнутая шашка снимается. Одна из двух центральных шашек отмечена. Выигрывает тот, кто снимет отмеченную шашку. Кто из игроков может выиграть, как бы не играл соперник? (Отмеченная шашка тоже может ходить.) (*А. Шаповалов*)

191. (7-9) Фома и Ерёма делят клад из 100 золотых и 100 серебряных монет. Сначала Фома раскладывает монеты в ряд в каком хочет порядке. Затем Ерема начинает делёжку. Он берёт первую монету из ряда и либо забирает ее себе, либо отдаёт Фоме. Затем Фома берет вторую монету из ряда и тоже либо забирает ее себе, либо отдаёт Ерёме. Так, чередуясь, они распределяют по порядку монеты. Как только у кого-то из них накапливается 100 монет, другой забирает все оставшиеся монеты. Какое наибольшее число золотых может гарантировать себе Фома? (*А. Шаповалов*)

192. (7-9) **а)** См. п. б, когда вначале было три куска сыра.

б) Фома и Ерёма делят несколько кусков сыра. Сначала Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает все имеющиеся куски на две тарелки (не обязательно поровну). После этого Ерёма выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерёма. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу). (*А. Шаповалов*)

193. (8-9) Имеется куча из 2006! камней. Петя и Вася ходят поочередно, начинает Петя. За один ход из кучи разрешается взять не менее одного камня, но не более, чем $^1/_{2006}$ часть оставшихся в куче камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник? (*А. Гусаков*)

194. (**7-9**) Есть 720 спичек, разложенных в 100 кучек. Петя и Вася ходят по очереди. Каждым ходом выбирается кучка, делится на две меньшие части, и эти части сливаются с двумя из оставшихся кучек. Игрок победит, если после его хода во всех кучках станет поровну спичек. Если же после его хода остались всего две кучки, и они не равны, игрок проиграл. Кто может выиграть, как бы не играл соперник? (*А. Шаповалов*)

Графы

См. также задачи 173, 221, 8К2.

196. (7-8) В некоторой компании каждые два человека с общим знакомым имеют разное количество знакомых. Доказать, что в этой компании есть человек, у которого только один знакомый. (Все знакомства симметричны, у каждого человека есть хотя бы один знакомый.) (*С.Конягин*)

197. (**7-9**) Про каждую пару депутатов думы известно, могут ли они работать вместе либо только дискутировать (при этом есть депутат, который с кем-то работает, а с кем-то дискутирует). Думу удалось разбить на две группы, где в одной все пары рабочие, а в другой – все дискуссионные. Оказалось, что при переходе любого депутата в другую группу свойство однотипности всех пар в группе нарушается. Докажите, что по-другому разбить думу на две такие группы («рабочую» и «дискуссионную») нельзя. (*В. Гурвич*)

198. (9) 15 аэропортов связаны авиалиниями в единую сеть, то есть из любого аэропорта можно перелететь в любой другой (возможно, с пересадками). Из этих аэропортов не менее 5 – ключевые: при закрытии любого из них единая сеть распадается. Каково наибольшее число авиалиний в такой сети? (Авиалинии двусторонние, беспересадочные, и между каждой парой городов есть не более одной авиалинии.) (*В. Гурвич*)

199. (7-8) В Тридевятом царстве имеется 2012 городов. Царь Горох хочет открыть некоторое количество двусторонних авиалиний между городами так, чтобы из каждого города выходило не более 11 линий и от каждого города можно было добраться до любого другого, сделав не более шести пересадок. Каким наименьшим количеством авиалиний можно обойтись?

200. (8-9) Дано конечное дерево с неокрашенными вершинами и ребрами. Петя и Вася играют, ходя по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Оба всегда играют наилучшим образом.

В первой игре они красили по одной неокрашенной вершине за ход, каждый в свой цвет. Первую вершину каждый выбирал произвольно, затем выбирал вершину, связанную ребром с вершиной своего цвета. Победил Вася.

Во второй игре они красят по одному неокрашенному ребру за ход, каждый в свой цвет. Первое ребро каждый выбирает произвольно, затем надо выбирать ребро, имеющее общий конец с окрашенным ребром своего цвета. Кто победит на этот раз? (*Б. Френкин*)

Чётность

См. задачи 5, 20, 22, 25, 26, 27, 30, 36, 49, 56, 59, 61, 72, 74, 97, 123, 142, 149, 153, 160, 163, 164, 176, 177, 180, 185, 187, 208, 6Ц3, 6Ц5, 6Ч4, 7А3, 7П1, 8Ар3, 9Т1.

Геометрия

Разрезания и клетки

См. также задачи 9Т1, 9Т3.

201. (6-7). Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 на пять прямоугольников (не обязательно одинаковых) с периметром 2? (*А. Шаповалов*)

202. (6-7) **а**) Барон Мюнхгаузен разрезал квадрат на квадратики двух размеров и провел в каждом по одной диагонали. Он утверждает, что общая длина диагоналей маленьких квадратиков равна общей длине диагоналей больших. Могут ли слова барона быть правдой?

б) *Домино* – это прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Барон Мюнхгаузен разрезал квадрат на домино двух размеров и провел в каждом по одной диагонали. Он утверждает, что общая длина диагоналей маленьких домино в полтора раза больше общей длины диагоналей больших. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

203. (6-7) Квадратный торт массой 900 г разрезали двумя прямолинейными разрезами, параллельными одной паре сторон, и двумя прямолинейными разрезами, параллельными другой паре сторон. Докажите, что Паша сможет выбрать из девяти получившихся кусков три, не имеющие общих сторон, суммарная масса которых не меньше 300 г. (*Фольклор*)

204. (7). Петя разрезал шахматную доску по границам клеток на части одинакового периметра. Оказалось, что не все части равны. Каково наибольшее возможное число частей? (*А. Шаповалов*)

205. (7-8) Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать как на три равных треугольника, так и на четыре равных (совпадающих при наложении) четырёхугольника. (*А. Шаповалов*)

206. (7-8) Квадратное поле разбили на прямоугольные участки, проведя 66 прямых параллельно сторонам квадрата. Назовем участок *завидным*, если его площадь больше площади любого соседнего с ним по стороне участка. Каково наибольшее возможное число завидных участков? (*В. Брагин*)

208. (7-8) Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра? (*В. Сендеров*)

209. (7-8) На клетчатой доске размера **а**) 3×10; **б**) 3×12 отметили 8 клеток так, что их центры являются вершинами двух прямоугольников со сторонами, параллельными краям доски. Докажите, что среди отрезков, соединяющих центры отмеченных клеток, найдутся три одинаковых. (*А. Грибалко*)

210. (7-9) Можно ли разрезать квадратный лист бумаги со стороной 1 м на 30 квадратов так, чтобы хотя бы один из квадратов имел сторону меньше 1 мм?

211. (8-9) Назовем треугольники *сходными*, если у них равны как минимум две из трёх сторон. Докажите, что найдется квадрат, который можно разбить на треугольники, сходные данному остроугольному треугольнику. (*А. Шаповалов*)

212. (8-9) Квадрат разрезан на равные треугольники. Обязательно ли у каждых двух треугольников найдутся параллельные стороны? (*А. Шаповалов*)

213. (8-9) Для каких натуральных N можно любой треугольник разбить на N треугольников, имеющих по равной медиане? (*А. Шаповалов*)

Системы точек и отрезков

214. (7-8) Плоскость раскрасили в два цвета. Докажите, что найдется одноцветный треугольник с углами 48°, 60°, 72°. (*К. Кноп*)

215. (9) На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. При этом для каждых трёх точек A, B, C из этого множества ортоцентр треугольника ABC также принадлежит этому множеству. Докажите, что множество состоит не более, чем из четырёх точек. (*Ю. Блинков*, *Д. Прокопенко*)

Геометрическая комбинаторика

См. также задачи 9КГ1-5.

216. (6-7) Есть некоторое количество одинаковых квадратных столов. Их можно расставить для банкета либо буквой «П», либо буквой «Т» («толщина» каждой буквы – один стол). В каком случае можно будет посадить больше гостей (периметр образовавшегося банкетного стола будет больше)? (*А. Блинков*)

217. (6-7) У Пети и Васи было по одинаковому бумажному многоугольнику. Каждый из них перегнул свой многоугольник по прямой и обвел по контуру получившуюся плоскую фигуру (частично двухслойную). У Пети получился квадрат. Мог ли у Васи получиться треугольник, у которого все углы – острые? (*А. Шаповалов*)

218. (7-8). **а**) Из шести палок длиной 1 м сложили треугольную пирамиду. На палках сидят три паука, при этом расстояние между любыми двумя (измеряемое кратчайшим путем по ребрам пирамиды) не меньше R. При каком наибольшем R такое возможно? (*А. Шаповалов*)

б) Паутина представляет собой правильный шестиугольник с длиной стороны 1, в котором проведены все диагонали, проходящие через центр. На паутине сидят семь пауков. Расстоянием между пауками называется длина кратчайшего пути между ними по паутине. Докажите, что расстояние между какими-то пауками не больше 1. (*К. Кноп*)

219. **а**) (7-8) Каким наибольшим может быть число сторон у многоугольника, полученного пересечением четырёхугольника и пятиугольника?

б) (9) Докажите, что при пересечении m-угольника и n-угольника не может получиться многоугольник более чем с $2m + 2n - 6$ сторонами. (*А. Шаповалов*)

220. **а**) (7-8) Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

б) (9) Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек, делящих ее на 15 равных отрезков. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На сколько частей отрезки разделили треугольник? (*В. Брагин*)

221. (8-9) Некоторые из сторон и диагоналей выпуклого n-угольника ($n > 3$) нарисовали жирными и тонкими линиями. Известно, что жирные отрезки не пересекаются и между каждыми двумя вершинами есть единственный жирный путь. То же верно для тонких отрезков. Каково наименьшее количество пересечений между жирными и тонкими отрезками? (Никакие три диагонали не пересекаются в одной точке.) (*Б. Френкин*)

222. (8-9) Докажите, что из любого треугольника площади 4 можно вырезать осесимметричную фигуру площади больше 3. (*А. Шаповалов*)

Простая геометрия

См. также задачи 253, 7Г2-7Г5.

223. (7). Выпуклый четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Среди них есть остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Какой вид у четвертого треугольника? (*Б. Френкин*)

224. (7-8) Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на треугольники. Из двенадцати углов этих треугольников как минимум семь равны α. Какие значения может принимать α? (*По мотивам Б. Френкина и К. Кнопа*)

225. (7) Даны два треугольника. Сумма двух углов первого равна некоторому углу второго. Сумма другой пары углов первого также равна некоторому углу второго. Докажите, что первый треугольник – равнобедренный. (*Б. Френкин*)

226. (7) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$; на стороне AB отмечена точка F так, что середина отрезка CF лежит на BD. Докажите, что $BF = CD$. (*С. Мазаник*)

227. (7) В квадрате $ABCD$ на стороне AB выбрана точка P, на стороне BC – точки Q и R, и на стороне AD – точка S. Вычислите $\angle BSQ + \angle BRP + \angle SPD - \angle RPC$, если известно, что $3BP = 3BQ = 3CR = 3DS = AD$. (*И. Акулич*)

228. (7-8) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а на стороне AD выбрана такая точка K, что $AK = 2$, $KD = 1$. Оказалось, что $\angle ACK = 30°$. Найдите OK. (*Уральский турнир*)

229. (7-8) Точка B лежит на отрезке AC. По одну сторону от прямой AC построены равносторонние треугольники ABE и BCF. Во сколько раз медиана BM треугольника BEF меньше суммы $CE + AF$? (*Д. Калинин*)

230. (7-8) На листе клетчатой бумаги по сторонам клеток нарисован квадрат $ABCD$ со стороной 8. E – середина стороны BC, Q – такая точка на диагонали AC, что $AQ : QC = 3 : 1$. Найдите угол между прямыми AE и DQ. (*Д. Прокопенко*)

231. (7-8) Дана трапеция $ABCD$. В ней $AC = AD$, $BD = AB$. Какая сторона является бóльшим основанием? (*Б. Френкин*)

232. (8) Все углы равностороннего выпуклого пятиугольника различны. Докажите, что наибольший и наименьший из них – соседние. (*К. Кноп*)

233. (7-8) В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $\angle PBC = {}^1/_3\,\angle ABC$ и $\angle QAC = {}^1/_3\,\angle BAC$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $TP = TQ$. (*Олимпиада Русановского лицея*)

234. (7-8) На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A отмечена точка A_1, а за точку B – B_1. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка A_2, а за точку C – C_1. На продолжении стороны CB за точку C отмечена точка C_2, а за точку B – B_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности. (*Дж. Конвей*)

235. (7-8) Каждые две противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ параллельны и равны, причем треугольник ACE равносторонний. Докажите, что для некоторой точки O все три треугольника AOB, COD, EOF также равносторонние. (*Д. Калинин*)

Четырёхугольники, подобие, окружности

См. также задачи 8Г2, 8Г3, 8Г4.

236. (7-8) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BCD = 120°$, $\angle CBA = 45°$, $\angle CBD = 15°$ и $\angle CAB = 90°$. Найдите угол BAD. (*Фольклор*)

237. (8) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BN. На луче AL взята точка P так, что $PN = PB$, а на луче BN – точка Q так, что $QL = QA$. Докажите, что $QL \parallel PN$. (*Балканиада*, *2010*)

238. (8) Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников, на которые медиана BM разбивает прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$). Найдите $\angle O_1BO_2$. (*Д. Швецов*)

239. (8) В квадрате $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Прямые AE и BF пересекаются в точке G. Описанная окружность квадрата вторично пересекает прямую AE в точке H. Докажите, что $GE = EH$. (*Н. Москвитин*)

240. (7-8) В прямоугольнике $ABCD$ соединили вершину C с серединой K стороны AD. Оказалось, что $CK \perp BD$. Пусть H – точка пересечения BD и CK. Докажите, что треугольник AHB равнобедренный. (*Д. Калинин*)

241. (8) Вокруг квадрата $ABCD$ описана окружность. На меньшей дуге BC взяли произвольную точку P. Отрезок PA пересекает сторону BC в точке K, а диагональ BD в точке L. Отрезок PD пересекает сторону BC в точке M, а диагональ AC в точке N. Докажите, что $NK \perp LM$. (*Отбор на Всеукраинскую олимпиаду*, *2008*)

242. (8) Окружность, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках M и N. Нашлась такая точка K, что $KB = KC$ и $KMAN$ – параллелограмм. Докажите, что K лежит на описанной окружности треугольника ABC. (*А. Блинков*, *Д. Швецов*)

243. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45°$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. (*В. Произволов*)

а) (8) Докажите, что точки A, P, M, N, Q лежат на одной окружности.

б) (9) Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите равенство площадей: $S_{AFG} = S_{PMF} + S_{GNQ}$.

244. (8-9) На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ внешним образом построили подобные прямоугольные треугольники EAB и FCB ($\angle EAB = \angle FCB = 90°$, $\angle ABE = \angle CBF$). Отразив точку B относительно середины отрезка EF, получили точку G. Докажите, что углы BDC и ADG равны. (*А. Акопян*)

245. (9) Пусть O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, M – середина его стороны BC, а E – точка пересечения прямых MO и AD. Докажите равенство $S_{ABO}:S_{CDO} = AE:ED$. (*М. Волчкевич*)

246. (8-9) Точка D вне остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD. (*Д. Калинин*)

247. (8-9) Хорда BR описанной окружности треугольника ABC пересекает сторону AC в точке P. Точки O_a и O_c – центры описанных окружностей треугольников APR и CPR соответственно. Докажите, что прямые AO_a и CO_c пересекаются на высоте треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

248. (8-9) В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, H – ортоцентр. Описанная окружность треугольника AHB вторично пересекает прямую BC в точке A_1, а описанная окружность треугольника BHC вторично пересекает прямую AB в точке C_1. Докажите, что точки H, A_1 и C_1 лежат на одной прямой. (*Д. Швецов*)

249. (9) В треугольнике ABC угол B равен 60°, O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, BM – медиана, L – середина OB. Докажите, что $LM \perp OH$. (*Д. Швецов*)

250. (9) CH – высота прямоугольного треугольника ABC (угол C – прямой). Вне ABC построены равносторонние треугольники AHA_1 и BHB_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1CB_1 лежит на гипотенузе AB. (*Д. Шевцов*)

251. (9) H – ортоцентр треугольника ABC, в котором $\angle B = 60°$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AH и CH пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1HC_1 лежит на биссектрисе треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

Симметрии

См. также задачи 99, 100, 190, 201, 207, 8Г3.

252. (6-7) Таня измерила угол между часовой и минутной стрелкой. Спустя полчаса она опять измерила угол между стрелками, и он оказался тем же самым. Определите, каким мог быть этот угол. (*Фольклор*)

254. (8) Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающих к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина. (*А. Шаповалов*)

255. (7-8) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведена биссектриса AD. На основании отмечена такая точка E, что $AE = BD$, на стороне AC – такая точка F, что

$AF = AB$. Докажите, что точка пересечения отрезков AD и EF лежит на высоте треугольника ABC. (*Д. Калинин*)

256. (7-8) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. B_1D – диаметр вписанной окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую AC, вторично пересекает вписанную окружность в точке P. Докажите, что середина отрезка DP лежит на биссектрисе треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

257. (7-8) Точка M принадлежит короткой дуге AB окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Точки P, Q симметричны M относительно боковых сторон CA и CB. Прямая l симметрична CM относительно биссектрисы угла ACB. Докажите, что $l \perp PQ$. (*Д. Калинин*)

258. (8-9) Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность. Пусть BD – диаметр этой окружности, K – произвольная точка меньшей из дуг BC, а K' и K'' – точки, симметричные K относительно прямых AC и BC соответственно. Докажите, что прямые AC, DK и $K'K''$ имеют общую точку. (*А. Акопян*)

259. (8) На окружности, описанной вокруг равностороннего треугольник ABC, взята точка P. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны P относительно середин сторон BC, AC, AB треугольника ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр треугольника ABC. (*А. Заславский*)

260. (7-8) AA_1, CC_1 – высоты треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямую AA_1 в точке M. Докажите, что прямая BM перпендикулярна одной из медиан треугольника CC_1B. (*Д. Швецов*)

261. (7-9) В треугольнике ABC $\angle B = 50°$, $\angle C = 30°$. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MBC = 20°$, $\angle MCB = 10°$. Доказать, что $AM \perp BC$. (*Сербская олимпиада*, *1995*)

262. (8-9) Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников BA_1B_1 и BC_1B_1, вторично пересекают прямую AC в точках K и L.

а) Докажите, что $B_1K = B_1L$.

б) Докажите, что $IK = IL$. (*Д. Швецов*)

263. (9) CD – биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точку A и касающаяся биссектрисы в точке D, вторично пересекает прямую AC в точке A_1. Окружность, проходящая через точку B и касающаяся биссектрисы в точке D, вторично пересекает прямую BC в точке B_1. Докажите, что окружность, симметричная описанной около треугольника A_1B_1C относительно CD, касается стороны AB. (*Д. Калинин*)

Геометрические места

См. также задачу 8Г5.

264. (9) На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что общая хорда окружности с центром C и радиусом CA и окружности с центром M и радиусом MC проходит через середину AB. (*Ю. Блинков*)

265. (9) В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, I – центр вписанной. Точки A', B' на лучах BC, AC таковы, что $A'B = AB = AB'$. Докажите, что $A'B' \perp OI$. (*А. Заславский*)

266. (6-7) Кеша вырезал из бумаги треугольник ABC с наибольшей стороной AB и перегнул его по прямой так, что вершина C попала на сторону AB и образовался четырёхугольник. Укажите множество точек на стороне AB, куда могла попасть вершина C. (*А. Шаповалов*, *В. Гуровиц*)

267. (7-8) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC – точка L так, что $AK + CL = {}^1/_2\,AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL. (*Д. Калинин*)

268. (9) Дан треугольник *ABC*. На стороне *AC* выбираются произвольная точка *K* и такая точка *L*, что $\angle ABK = \angle CBL$. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников *KBL*. (*Д. Швецов*)

269. (9) Дан треугольник *ABC*, точка *P* – середина дуги *ABC* описанной около него окружности Ω. Рассматриваются всевозможные вписанные четырёхугольники *PBKM*, где *M* лежит на стороне *AB*, а *K* – на стороне *BC*. Найдите геометрическое место точек пересечения пересечения отрезков *AK* и *CM*. (*Ю. Блинков*)

270. (9) Даны две концентрические окружности: большая и малая. *A* и *B* – диаметрально противоположные точки малой окружности, *C* – произвольная точка большой окружности. Лучи *CA* и *CB* впервые пересекают малую окружность в точках *K* и *M* соответственно. При каком положении точки *C* длина отрезка *KM* будет наибольшей? (*С. Дворянинов*)

Задачи на построение

271. (7-8) Докажите, что любой треугольник можно разрезать на три меньших треугольника так, чтобы каждую из получившихся частей можно было покрыть двумя другими. (*А. Шаповалов*)

272. (8) Дан треугольник *ABC* и точка *M* на стороне *AB*. Постройте на сторонах треугольника *AB*, *BC*, *AC* соответственно точки *E*, *F*, *G* так, чтобы $AG = GE$, $EF = BF$ и середина *O* отрезка *GF* лежала на *CM* (известно, что такие точки существуют). (*Д. Калинин*)

273. (9) Восстановите треугольник *ABC* по двум точкам: ортоцентру *H* и центру вписанной окружности *I*, если известно, что $\angle A = 60°$, а радиус описанной окружности равен *R*. (*Г. Филипповский*, *А. Заславский*)

274. (9) На сторонах *AB* и *AC* треугольника *ABC* нашлись такие точки *D* и *E*, что вписанная окружность четырёхугольника *BCED* равна описанной окружности треугольника *ADE*. Эти точки и окружности стерли. Восстановите стёртые точки с помощью циркуля и линейки. (*А. Шаповалов*)

275. (9) Бумажный квадрат *ABCD* со стороной 5 частично приклеен к столу по треугольнику *AKL*, где *K* лежит на стороне *AB* и $AK = 3$, а *L* лежит на стороне *AD* и $AL = 4$. Неприклеенную часть квадрата разрешается перегибать по прямой, не проходящей через точки *K*, *L*, *C* или *D*. Как за два таких перегиба совместить отрезки *BC* и *KL*? (Нельзя сгибать по линии, пересекающей приклееный треугольник, не разрешено сгиб разгибать обратно.) (*О. Крижановский*)

Задачи конкурса капитанов

1. Найдите ближайшую в будущем (после 1 июля 2012 г) дату-палиндром в формате ДД.ММ.ГГГГ.

Ответ. 02.02.2020.

2. **а**) Найдите ближайшую ко 2 июля 2012 г дату в будущем в формате ДД.ММ.ГГ, в которой все три числа, разделенные точками – простые.

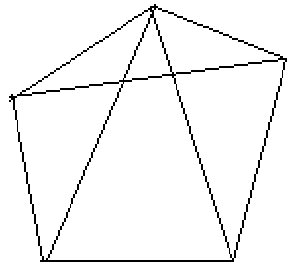
б) Найдите ближайшую ко 2 июля 2012 г дату в формате ДД.ММ.ГГ, в которой все три числа, разделенные точками – простые.

Ответ: 02.02.13

Ложный след. б) До ближайшей даты в прошлом (это 29.11.11) всего на один день больше.

3. Какой остаток даёт число 123000 при делении на 999?

Ответ: 123.



4. Сколько всего треугольников можно найти на рисунке?

Ответ: 11 (5 одиночных, 5 из двух частей, 1 из трех частей).

5. **а**) Какова наименьшая сумма цифр числа, кратного 14?

б) Приведите пример числа, кратного 14, с минимально возможной суммой цифр.

Ответ: **а**) 2; **б**) 10010.

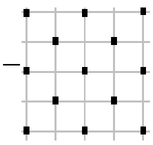
6. Дано число 123456. Не меняя порядка цифр, расставьте знаки арифметических действий и скобки, чтобы получилось выражение

а) как можно ближе к 100, но не равное 100;

б) равное 100.

Ответы: **а**) например, $1\cdot(2 + 3 + 4)\cdot(5 + 6) = 99$, $1\cdot(23 - 4)\cdot5 + 6 = 101$;

б) например, $1 + (2 + 3 + 4)\cdot(5 + 6)$.



7. Сколько существует квадратов с вершинами в отмеченных точках?

Ответ: 11 (5 квадратов со стороной 2, 4 – с диагональю 2, по одному – со стороной 4 и диагональю 4).

8. Сколько решений у ребуса Я + Я + Я = МЫ?

Ответ: 5.

9. Найти все пары простых чисел p и q, для которых $pq = 19 + p + q$.

Ответ: 3 и 11. **Указание.** $(p - 1)(q - 1) = 20$.

10. Представьте 222 как сумму трёх точных квадратов.

Ответ: например, $10^2+11^2+1^2$, $14^2+5^2+1^2$ или $13^2+7^2+2^2$.

11. Найдите наименьшее натуральное число с нечётной суммой цифр, кратное 11.

Ответ: 209.

12. Найдите все пары различных простых чисел с суммой 26.

Ответ: (3, 23) и (7, 19)

13. На какую цифру заканчивается сумма 1 + 2 + ... + 2012?

Ответ: на 8.

14. Найдите все двузначные числа, которые при вычеркивании одной цифры уменьшаются в 13 раз.

Ответ: 13, 26, 39, 65.

15. Сколько решений у ребуса: БОЧКА + МЁД = ВИННИ.

Ответ. 0 (использовано 11 разных букв).

16. **а**) Заполните таблицу 3×3 натуральными числами так, чтобы суммы в строках делились на 100, а в столбцах – не делились.

б) Заполните таблицу 4×4 натуральными числами так, чтобы суммы в строках делились на 2012, а в столбцах – не делились.

Ответы: **а**) например, пишем в каждую строку 1, 1, 98 именно в таком порядке;

б) например, пишем в каждую строку 1, 1, 1, 2009 именно в таком порядке.

17. Числа от 1 до 300 на 30 десятков последовательных чисел. Сколько из десятков содержат точные квадраты?

Ответ: 12 десятков. **Указание**. В первом десятке – три квадрата, в каждом из следующих – не более одного.

Липовая роща

Покупатель: Этот мёд у вас случайно не липовый?
Продавец: Что вы, мы торгуем только натуральным мёдом!

Какой только фантастики не приходится выслушивать судье матбоёв. Сложность многих задач сознательно подбирается на грани возможностей школьников, а их желание победить обычно превосходит способность к самокритике. Поэтому излагаются решения с ошибками, большими и малыми. Конечно, большинство ошибок грубые, но случаются и тонкие. Их пропускают оппоненты, и даже искушенное жюри порой не сразу может разобраться, где и что не так. Чтобы предостеречь школьников и взрослых от подобных ошибок, мы в других своих книгах публиковали для некоторых задач вслед за правильным решением и псевдорешение под заголовком «Ложный след» (см. [Сав17] и [ТГ]). Однако для тренировки будущих оппонентов лучше собрать эти «перлы» воедино. А так как на профессиональном жаргоне псевдорешения называют «липой», то собрание лип – это, конечно, «роща».

Почти все задачи взяты из этой книги. Каждая снабжена своим липовым решением. В «липе» может быть не одна, а несколько ошибок. Постарайтесь найти их все. К неверным утверждениям полезно подобрать контрпример. Попробуйте оценить величину каждой ошибки в очках (напомним, что задача в целом стоит 12 баллов). В конце главы вы найдёте разоблачение неправильных решений, а также отсылки к правильным решениям.

Арифметика и алгебра

Л2. (6-7) Саша живёт в своём доме, в котором окон на 2 больше, чем дверей. Все братья Саши – Петя, Коля и Лёня – тоже живут каждый в своём доме. В доме Коли окон на 5 больше, чем дверей, а в доме Пети окон на 4 больше чем дверей. Может ли у всех братьев Лёни в домах в сумме окон быть в 4 раза больше, чем дверей?

Ответ: не может. Поскольку Коля, Петя и Саша – все братья Лёни, то у них в сумме должно быть «лишних» окон в 3 раза больше, чем дверей. Однако $2 + 5 + 4 = 11$ на 3 не делится.

Л6. (6-7) Найдутся ли три положительных числа, из которых одно равно произведению двух других, другое – разности двух других, а третье – полусумме двух других?

Ответ: нет. Допустим, нашлись такие числа $a \le b \le c$. Полусумма лежит посередине между двумя другими – значит, это b. Разность меньше самого большого, и это не b, значит, a. Тогда c – это произведение a и b. Но если a – разность c и b, то c – сумма a и b. Однако сумма положительных чисел равна их произведению только если оба числа равны равны 2. Но для чисел 2, 2, 4 среднее не равно полусумме крайних. Противоречие.

Комбинаторика

Л15. (7-9) Фома и Ерёма делят клад из 100 золотых и 100 серебряных монет. Сначала Фома раскладывает монеты в ряд в каком хочет порядке. Затем Ерёма начинает делёжку. Он берет первую монету из ряда и либо забирает ее себе, либо отдает Фоме. Затем Фома берет вторую монету из ряда и тоже либо забирает ее себе, либо отдает Ерёме. Так, чередуясь, они распределяют по порядку монеты. Как только у кого-то из них накапливается 100 монет, другой забирает все оставшиеся монеты. Какое наибольшее число золотых может гарантировать себе Фома?

Ответ: 50 монет. Неважно, как Фома кладет монеты, в любом случае при своем выборе Ерёма золотые берет себе, а серебряные отдает Фоме. В результате либо у Фомы серебряных монет будет не меньше, чем золотых, либо у Ерёмы золотых будет не меньше, чем у Фомы. В обоих случаях у Фомы будет не более 50 золотых монет.

Не менее 50 золотых монет Фома сможет себе обеспечить, играя как Ерёма, то есть золотую беря себе, а серебряную отдавая Ерёме.

Геометрия

Л19. (6-7) Таня измерила угол между часовой и минутной стрелкой. Спустя полчаса она опять измерила угол между стрелками, и он оказался тем же самым. Определите, каким мог быть этот угол.

Ответ: 82,5°. Если минутная стрелка не обогнала часовую, то угол между ними все время уменьшался, равенство невозможно. За полчаса минутная стрелка повернулась на 180°. Если угол был тупой, то после обгона он станет острым (из-за движения часовой стрелки он только уменьшится) – равенства снова нет. Значит, угол 180° состоит из двух острых углов x (вначале и в конце) и угла 15°, на который повернулась часовая стрелка за полчаса. Поэтому $x = (180° - 15°):2 = 82{,}5°$.

Разоблачения

Л6. Верно, что сумма двух *натуральных* чисел равна их произведению только если оба числа равны 2. Однако в условии сказано только, что числа положительны, а для таких это неверно. Контрпримеров много, в частности: $^3/_2$ и 3.

Этот контрпример служит полным опровержением решения. Поскольку ответ неверен, то за верные утверждения о неравенствах между полусуммой, разностью и произведением докладчик заслужил не более 2 баллов.

См. 80.

Л19. Ответ неполон, поэтому, если оппонент задачу решил, ему проще всего сказать «Я не согласен с тем, что найдены все ответы, у меня есть контрпример».

А ошибка вот где. Неправда, что если нет обгона, то угол между стрелками все время уменьшался (или даже все время менялся монотонно). Стрелки разбивают циферблат на два угла, и мы каждый раз измеряем наименьший из них. Поэтому направление угла может меняться: как в момент обгона, так и в момент, когда стрелки противоположно направлены. Можно привести контрпример к этому утверждению: угол в 12.25 – тупой, в 12.30 он стал больше, а в 12.55 – меньше. Такой пример опровергает решение наполовину (случай с обгоном разобран верно), поэтому оппонет получит 3 балла, докладчик – не более 6 баллов.

См. 252.

Варианты 2012

Личная олимпиада

***6 класс**: 2, 201, 76а, 44, 217, 171, 29б, 108, 158*
7 класс: 103, 223, 159, 44, 253, 108, 29а, 256, 158
8 класс: 98, 242, 175, 76б, 248, 128а, 9, 271, 134а
9 класс: 100, 248, 175, 82, 271, 128б, 36, 264, 134б

Командная олимпиада

***6 класс**: 16, 30а, 202а, 169, 111а, 80, 153а, 195а*
7 класс: 30а, 202б, 169, 111б, 66, 153б, 195б, 260
8 класс: 30б, 183, 262а, 66, 174, 195б, 153б, 259
9 класс: 30б, 99, 183, 262б, 214, 274, 87, 174

Математические бои

1 тур
***Лига 6 классов**: 106а, 75а, 22б, 143, 124а, 188, 5, 17*
Лига 6-7 классов: 17, 5, 166, 22а, 106а, 75а, 156, 189
Лига 7 классов: 75б, 238, 22в, 173, 106а, 124б, 188, 143
Лига 8 классов: 95а, 62, 249, 162, 124в, 106б, 188, 239
Лига 9 классов: 62, 101, 95б, 236, 265, 65, 26, 162

2 тур
***Лига 6 классов**: 8, 139а, 165, 69, 1, 172а, 190б, 19*
Лига 6-7 классов: 1, 19, 110, 172а, 139а, 210, 54, 147
Лига 7 классов: 8, 172а, 59, 139а, 218а, 165, 190а, 231
Лига 8 классов: 218а, 102, 55а, 139б, 163, 237, 172б, 224
Лига 9 классов: 247, 251, 102, 61, 218б, 55б, 129, 172в

3 тур
***Лига 6 классов**: 18а, 20, 252, 176, 194, 14, 204, 152*
Лига 6-7 классов, бой 6-классников: 13, 15, 252, 152, 28, 77, 109а, 204
Лига 6-7 классов, бой 7-классников: 6, 15, 18а, 152, 20, 252, 194, 204
Лига 7 классов: 204, 194, 233, 252, 21, 199, 18б, 120
Лига 8 классов: 194, 42, 109б, 228, 160, 199, 233, 18в
Лига 9 классов: 273, 269, 84, 92, 130, 160, 35, 222

Финал
***Лига 6 классов**: 121а, 39б, 203, 24, 53, 112, 31, 49*
***Стыковой бой между лигами 6 и 6-7**: 12, 39а, 53, 121а, 146, 112, 31, 49*
Лига 7 классов: **Финал 1**: 232, 53, 39б, 209б, 58, 230, 136, 181а
Лига 7 классов: **Финал 2**: 121а, 53, 39б, 209а, 31, 230, 135, 181а
Лига 7 классов: **Финал 3**: 121а, 53, 39а, 209а, 31, 230, 135, 49
Лига 8 классов: **Финал 1**: 119, 73, 232, 53, 181а, 241, 49, 121б
Лига 8 классов: **Финал 2**: 133, 73, 232, 53, 69, 241, 49, 121б
Лига 9 классов: **Финал 1**: 250, 268, 154, 181б, 119, 73, 25, 85
Лига 9 классов: **Финал 2**: 119, 73, 232, 53, 181а, 268, 49, 121б

2006 год

2007 год

Авторы

ЛИТЕРАТУРА

[Сав17] *Шаповалов А.В., Медников Л.Э.* XVII Турнир математических боёв имени А.П.Савина. М., МЦНМО, 2012

[ТГ] *Медников Л.Э., Шаповалов А.В.* Турнир городов: мир математики в задачах. М., МЦНМО, 2012

О турнире 2012 года

Есть школьники, которые и летом хотят заниматься математикой, и тогда они едут в летние математические школы. А те из них, кто хочет еще и посоревноваться в решении задач, приезжает в Костромскую область на базу отдыха «Берендеевы поляны», где уже много лет подряд с 26 июня по 2 июля проводится турнир математических боев.

18-й турнир собрал 32 команды из Москвы, Санкт-Петербурга, Костромы и Ярославля, от пятиклассников (игравших за 6 класс) до девятиклассников.

В день открытия турнира команды размялись игрой «Математический квадрат». Им были даны 16 или 25 задач, вписанных в клетки квадрата. Проверялись только ответы и, кроме баллов за верные ответы, начислялись ещё премии за верные решения целого столбца задач или целой строки. Игра была азартной, поскольку те, кто «закрывал» ряд первыми, премировались вдвойне. В 6 классах победили команды гимназии № 1543 и ФМШ № 2007, в 7 классах – команда гимназии № 1514 (все – Москва), в 8 классах – команда ФМШ №30 (Санкт-Петербург), в 9 классах – команда ЦО № 218 (Москва).

Разбить команды на лиги не только в соответствии с возрастом, но и с учетом их реальной силы позволила устная командная олимпиада. Ввиду хорошей погоды жюри, как обычно, сидело на улице, а школьники – у себя в разбросанных по территории домиках, откуда с энтузиазмом прибегали сдавать задачи. По результатам образовалось пять лиг для проведения математических боев: лиги 6, 7 и 8 классов (по 8 команд в каждой), 9 классов (4 команды) и 6-7 классов (по 2 слабейшие команды из 6 и 7 классов)

А на следующий день начались собственно математические бои. Команды с утра получали вариант, содержащий восемь нестандартных задач (жюри старалось подбирать интересные и разнообразные). До обеда команды старались их решить (и редко когда удавалось решить все восемь), а после обеда – бились с другими командами. На самом бое команды ведут диалог: более-менее по очереди рассказывают свои решения, а в решениях соперников стараются разобраться и, по возможности, опровергнуть. Львиную долю времени школьники общаются друг с другом, жюри вступает в диалог редко, в основном начисляя очки.

Бои длились 2 – 3 часа, редко дольше, и у школьников оставалось время для спорта, прогулок и экскурсий. После ужина большой популярностью пользовались интеллектуальные игры.

В середине турнира был устроен отдых от боев: полдня – автобусные экскурсии, полдня – личная устная олимпиада по параллелям. Как обычно, самые красивые (но сравнительно легкие) задачи приберегались именно для этой олимпиады. И если на бою школьник имел право рассказать максимум две задачи, то здесь можно было рассказывать все 9 (кое-кому удалось!). Дипломы первой степени завоевали: в 6 классе – А. Вишняков (ФМШ № 2007), в 7 классе – К. Коваленко (МГДДиЮТ), А. Чернышев (математический кружок «Квантик», Москва) и А. Трескунов (ЮМШ, С-Петербург), в 8 классе – В. Таранников (ФМШ № 2007). Ученик 9 класса ЦО №218 Андрей Гаркавый стал абсолютным победителем олимпиады и получил диплом «Гран-при», решив все предложенные задачи и набрав максимально возможный балл!

А в турнире математических боев победителями стали: в лиге 9 – команда центра образования № 218 г. Москвы, в лиге 8 – команда физико-математической школы № 2007 г. Москвы, в лигах 6 и 7 – команды г. Ярославля, в лиге 6-7 – команда Московского городского дворца детского и юношеского творчества.

По итогам турнира все команды-участницы и все призеры личной олимпиады награждались памятными дипломами, сувенирами и книгами по математике, так что награждено было более половины участников. Поскольку некоторые авторы книг работали в жюри, то особо ушлые школьники тут же подбегали к ним за автографами. Видимо, на память об интересном турнире.

Вот полный список призеров турнира боев (у московских команд город не указан).

Лига 6 классов

Диплом I степени: Ярославль (кап. А. Токмачев, рук. И.В. Преображенский)

Дипломы II степени: ФМШ 2007 (кап. А. Енгоян, рук. П.В. Чулков, Е.Г. Лысенок) Фрактал (кап. Н. Жукова, рук. А.П. Храпкина, А.П. Погода, Г.О. Семенов).

Дипломы III степени: Гимназия 1514-6 (кап. А. Соколова, рук. Э.А. Акопян) и Гимназия 1514-5 (кап. Б. Шаповал, рук. Л.О. Бычкова)

Лига 6-7 классов

Диплом I степени: ДНТТМ-7 (кап. С. Морозов, рук. Т.П. Зорина)

Диплом II степени: ЮМШ-7, Санкт-Петербург (кап. П. Никифоров, рук. А.В. Садовников, А.А. Теслер)

Лига 7 классов

Диплом I степени: Ярославль (кап. А. Сонина, И.В. Преображенский)

Дипломы II степени: Гимназия 1514 (кап. А. Емельченков, рук. Н.Т. Мартынова) и Квантик (кап. А. Чернышев, рук. И.А. Николаева).

Дипломы III степени: Гимназия 1543-7-3 (кап. И. Спиридонов, рук. И.В. Раскина) и Гимназия 1543-7-2 (кап. И. Петровский, рук. Ю.В. Паньковская)

Лига 8 классов

Диплом I степени: ФМШ 2007 (кап. В. Таранников, рук. В.В. Трушков)

Дипломы II степени: ЮМШ, Санкт-Петербург (кап. Г. Монаков, рук. К.А. Кноп) и ФМШ 2007-9-2 (кап. В. Зюзин, рук. Д.В. Прокопенко, П.В. Чулков).

Дипломы III степени: ФМЛ № 30, Санкт-Петербург (кап. С. Петров, рук. А.В. Садовников, А.А.Теслер) и Гимназия 1543 (кап. А. Феофилактов, рук. А.А. Заславский, А.В. Хачатурян).

Лига 9 классов

Диплом I степени: ЦО № 218 (кап. А. Зерцалов, рук. Ю.А. Блинков, Е.С. Горская)

Диплом II степени: Школа 179 (кап. А. Ситкарев, рук. А.Ю. Юрков)

Книги и другие призы для победителей предоставили компании «Яндекс» и МЦНМО (директор — И.В. Ященко).

Непосредственное проведение турнира обеспечивала методическая комиссия. Она занималась предварительным отбором задач, составляла все варианты и оперативно снабдада их решениями для жюри. В 2012 году комиссия была особенно представительной. В ней были математики-профессионалы, преподаватели математики и студенты математических факультетов вузов: В. Арутюнов, А. Блинков, Ю. Блинков, Е. Горская, А. Грибалко, А. Заславский, Н. Медведь, Д. Прокопенко, И. Раскина, С. Тихомиров, В. Трушков, А. Хачатурян, П. Чулков, А. Юрков (все – Москва), С. Волчёнков (Ярославль), В. Замятин и К. Кноп (оба – Санкт-Петербург), Л. Медников (Хайфа), А. Шаповалов (председатель, Стокгольм). В состав жюри турнира, помимо членов методкомиссии, входят и все желающие руководители команд школьников.

Успешное проведение турнира было бы невозможно без слаженной работы группы технического обеспечения, в состав которой (П. Дубов, О. Заславский, Н. Зюзина, М. Сандрикова, Д. Щербаков) входили, в том числе, и вчерашние школьники.

В большинстве своём авторами задач были члены методической комиссии. Из авторов, не присутствующих на турнире, отметим Б. Френкина и Д. Шноля, приславших много хороших задач.

Правила математического боя 2012 года

Общие положения

Математический бой – соревнование двух команд в решении математических задач. Он состоит из двух частей. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. По истечении этого времени начинается собственно бой, когда команды в соответствии с правилами рассказывают друг другу решения задач. Если одна команда рассказывает решение, то другая *оппонирует* его, то есть ищет в нем ошибки (недостатки), и если решения нет, то, возможно, приводит свое. При этом выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах (за решение и за оппонирование). Если команды, обсудив предложенное решение, все-таки до конца задачу не решили или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все баллы) может забрать себе жюри боя. В конце боя при разнице в 0, 1 или 2 балла объявляется ничья, иначе побеждает команда, которая набирает больше баллов. Если же по условиям боя он не может закончиться вничью, то жюри до боя объявляет это командам, и победившей считается команда, которая выиграла конкурс капитанов (подробно о нем сказано ниже).

Вызовы

Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда одна из команд *вызывает* другую на одну из задач, решения которых еще не рассказывались (например: “Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8”). После этого вызванная команда сообщает, *принимает ли она вызов*, то есть согласна ли рассказывать ее решение. Если да, то она выставляет *докладчика,* который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет *оппонента*, обязанность которого — искать в решении ошибки. Если нет, то докладчика обязана выставить команда, которая вызывала, а отказавшаяся отвечать команда выставляет оппонента.

Команда, желающая сохранить выходы к доске, может отказаться выставлять оппонента. Тогда она в этом раунде не участвует и не может изменить своего решения.

Ход раунда

Доклад

В начале раунда докладчик рассказывает решение. Он обязан сформулировать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказать их правильность и полноту. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничивается 10 минутами, после чего жюри решает, разрешать ли докладчику рассказывать дальше. После доклада (докладчик должен сказать “Доклад окончен”) начинается обсуждение.

Докладчик имеет право:

1. до начала выступления вынести на доску всю необходимую информацию (чертежи, вычисления и т.п.), потратив на это время, согласованное с жюри;
2. не отвечать на вопросы оппонентов, заданные во время доклада;
3. просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: “Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то”);
4. отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: (а) он не имеет ответа на этот вопрос; (б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); (в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями (б) и (в) арбитром выступает жюри.

Докладчик не обязан:

5. излагать способ получения ответа, если он может доказать правильность и полноту ответа другим путем;
6. сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Оппонирование

Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы *только с согласия докладчика*, но имеет право просить повторения части решения или разрешать докладчику не доказывать какие-либо очевидные с точки зрения оппонента факты. После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. На обдумывание вопросов и ответов на них у доски дается не более 1 минуты.

В качестве вопроса оппонент может:

7. заставить докладчика повторить любую часть доклада;
8. попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: (а) попросить дать определение любого термина ("Что Вы понимаете под...") (б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения ("Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ....")
9. попросить докладчика доказать сформулированное тем неочевидное не общеизвестное утверждение (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, изучающиеся в общеобразовательной школе);
10. после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Оппонент обязан:

11. формулировать свои вопросы в вежливой, корректной форме;
12. критикуя доклад, не допускать критики докладчика;
13. повторять и уточнять свои вопросы по просьбе докладчика или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: (а) признать решение правильным; (б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и/или пробелы с обязательным их указанием; (в) признать решение (ответ) неправильным с указанием ошибок в обоснованиях ключевых утверждений доклада или контрпримеров к ним (или ответу), или указанием существенных пробелов в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости оно может вмешиваться и раньше.

Выступающие игроки и команда. Полуминутные перерывы

Команды не имеют права общаться с докладчиком и оппонентом во время их диалога у доски. Это можно делать только во время полуминутного перерыва, который капитан команды может взять в любой момент по своей инициативе или в ответ на явно сформулированной просьбе докладчика/оппонента. Перерыв берется на полминуты (при этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Команда, взявшая перерыв, может сразу по его окончании взять следующий. Кроме того, она может *закончить его досрочно*, тогда *соперники тоже должны вернуть своего представителя к доске*. Каждая команда может взять в течение одного боя не более 6 полуминутных перерывов.

Перемена ролей. Некорректный вызов. Порядок вызовов.

Если оппонент доказал, что у докладчика нет решения (вопрос о том, доказал ли он это, решает жюри – см. ниже пункт “Начисление баллов”), то возможны два варианта. Если вызов на этот раунд был принят, то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. При этом бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же вызов на этот раунд не был принят, то говорят, что вызов был *некорректным.* В этом случае команда, вызывавшая некорректно, должна снова вызывать соперника в следующем раунде. Во всех остальных случаях в следующем раунде вызывает та команда, которая была вызвана в текущем раунде.

Число выходов к доске

Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве докладчика или оппонента не более двух раз за бой. Команда имеет право заменять докладчика или оппонента, но при этом выход засчитывается как тому, кого заменили, так и тому, кто вышел на замену. Кроме того, при замене время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на 1 минуту (эту минуту можно использовать непосредственно перед заменой, а можно и не использовать — в последнем случае команда соперников тоже *не имеет права* пользоваться ею).

В случае, если команда присутствует на бою в неполном составе, то жюри имеет право изменить количество выходов к доске каждого члена команды, о чем должно быть объявлено обеим командам до начала боя.

Окончание боя

В любой момент боя команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решённых задач, а делать вызов, который может оказаться некорректным, она не рискует). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказывать решения оставшихся задач. При этом вторая команда выставляет оппонентов и может получать баллы за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права, даже если они у нее и появятся.

Первый вызов. Конкурс капитанов

Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он дает правильный ответ, то он победил, а если неправильный – победил его соперник. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в игру. В этом случае победителем считается тот, кто выигрывает игру.

Жюри может проводить конкурс капитанов по 3 задачам. Тогда выигрывает капитан, победивший в 2 задачах.

Начисление баллов

Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если оппонент сумел найти в решении более или менее существенные ошибки, жюри, прежде всего, решает вопрос о том, *удалось ли оппоненту доказать, что докладчик не дал решения задачи*. Если это оппоненту не удалось, то он может получить за оппонирование до 5 баллов (в зависимости от серьезности недостатков и того, насколько докладчику удалось их исправить). Остальные баллы распределяются между докладчиком и жюри, и раунд заканчивается. Если же оппонент сумел доказать, что решения у докладчика нет, он получает за оппонирование 5-6 баллов и, если вызов был принят, право рассказать свое решение (см. выше пункт “Перемена ролей”). При этом докладчик тоже может получить некоторое количество баллов за продвижение в решении. Доклад и оппонирование после перемены ролей оцениваются из оставшихся баллов.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком, то оппонент тем не менее получает за них баллы так, как если бы он нашел эти недостатки сам. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае состоит из одной фразы: “У Вас нет решения”), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

Капитан

Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и так далее. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, имеющего право обращаться к жюри. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала ~~решения задач~~ боя.

Во время решения задач главная обязанность капитана — координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан с учетом пожеланий членов команды распределяет между ними задачи для решения, следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче, определяет тактику команды на предстоящем бое.

Жюри

Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Жюри может снять вопрос оппонента, если он не по существу, прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет на доске протокол боя.

Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием председателя жюри. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда изменен быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски.

Жюри обязано мотивировать свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

http://www.ashap.info/Knigi/XVIIIturnir/XVIII.html