Задача о сплетниках

Посвящается памяти А. И. Гольберга[1]

Задача о сплетниках ходила среди московских любителей математики в первой половине 80-х. Автор узнал ее от А.И.Гольберга и обсуждал с ним возможную оценку снизу на число звонков. В 1987 году автору удалось придумать достаточно элементарное решение и предложить его в журнал "Квант но по недоразумению публикации не случилось. Много позднее автору стало известно, что на английском языке несколько решений были опубликованы ещч в 1972 году. В частности, данное решение во многом повторяет решение Baker and Shostak. Однако по-русски решений не публиковалось. Не претендуя на научную новизну, автор считает, что с методической точки полезно показать, как подобные задачи могут быть решены применением несложных фактов из теории графов.

Имеются n сплетников (где $n > 3$). Каждый узнал по одному новому слуху. о сплетниках Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им слухи. За какое наименьшее число звонков все сплетники узнают все слухи? [2]

Ответ. За $2n - 4$ звонка.

Обозначения, терминология и конструкция способа оповещения.

Большие буквы A, B, C, D, E (возможно, с индексами) обозначают сплетников, AB — звонок между сплетниками A и B; A-слух — слух, известный вначале только сплетнику A.

Заметим, что без ограничения общности можно считать все звонки мгновенными и не одновременными.

Способ оповещения для n сплетников $CO(n)$ — это набор звонков с указанием порядка выполнения, доводящий до каждого сплетника все слухи; $|CO(n)|$ — число звонков в этом наборе. Если $|CO(n)| = 2n - d$, то число d назовем *дефицитом* способа оповещения.

Предложение 1. *Для всех $n > 3$ существует способ оповещения из не более чем $2n - 4$ звонков.*

Доказательство. Есть $CO(4)$ из 4 звонков: $A_1A_2, A_3A_4, A_1A_3, A_2A_4$, то есть с дефицитом 4.

Если новый способ оповещения получается из старого добавлением одного сплетника и двух звонков, то дефицит не изменяется. Но всегда достаточно добавить только два звонка: пусть новый сплетник сделает самый первый и

[1]Гольберг Андрей Ильич(1954–1985), математик, призер Международной олимпиады по математике 1972 г.

[2]см. "Математическое просвещение"є 13, задача 9 (автор А.В.Анджанс).

самый последний звонки — кому угодно! Тем самым из $CO(4)$ индуктивно строится $CO(n)$ с дефицитом 4 для всех $n > 4$. $\square$

Наша цель: доказать, что менее чем $2n-4$ звонками не обойтись. Предположим противное. Тогда есть контрпример: способы оповещения $CO(n)$ с дефицитом больше 4. Выберем минимальный контрпример: способ для наименьшего n, а при данном n — способ с наименьшим числом звонков. Назовем такой способ *минимальным способом оповещения* и обозначим $MCO(n)$. Отметим, что из минимального способа нельзя выкинуть звонок или выкинуть одного сплетника и два звонка.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. *Цепочка* $A_1A_2A_3\ldots A_k$ — это упорядоченный по времени набор звонков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$. *Цикл* — это цепочка $AA_1A_2A_3\ldots A_kA$, где все $A_i \neq A$. Назовем A *начальником* цикла.

Очевидно, что упорядоченный по времени набор звонков является способом оповещения тогда и только тогда, когда для любой упорядоченной пары сплетников (A, B) найдется цепочка вида $A\ldots B$.

Лемма о циклах. *В минимальном способе оповещения нет циклов.*

Доказательство. Пусть в $CO(n)$ есть цикл $AA_1A_2A_3\ldots A_kA$. Достаточно доказать, что из $CO(n)$ можно получить $CO(n-1)$ с таким же дефицитом. Покажем, что можно выкинуть начальника цикла и уменьшить число звонков на 2. А именно, выкинем звонки AA_1 и A_kA, а остальные звонки начальнику переадресуем и.о. начальника. Такими и.о. будут участники цикла, а именно: до звонка A_1A_2 — сплетник A_1, между звонками $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i+1} — сплетник A_i, а после $A_{k-1}A_k$ — сплетник A_k. Нетрудно убедиться, что теперь в каждый момент времени и.о. знает все те из невыкинутых слухов, которые знал бы в этот момент начальник. Поэтому оставшиеся звонки дают $CO(n-1)$ с тем же дефицитом.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Зафиксируем способ оповещения. *Распространяющий набор A-слуха $P(A)$* — это все звонки, входящие в цепочки с началом A. *Собирающий набор A-слуха $C(A)$* — это все звонки, входящие в цепочки с концом A.

Ясно, что звонки распространяющего набора являются ребрами связного графа с n вершинами, поэтому в нем не менее $n-1$ звонка. То же верно и для собирающего набора.

Лемма о пересечении. *В минимальном способе оповещения наборы $P(A)$ и $C(A)$ могут пересекаться только по звонкам, в которых участвует сплетник A.*

Доказательство. Предположим противное: нашелся *общий звонок BC*, где B и C отличны от A. Покажем, что способ не минимален. По лемме о циклах достаточно показать, что найдется цикл. Рассмотрим цепочку из $P(A)$, которая кончается общим звонком, и цепочку из $C(A)$, которая начинается общим звонком. Если конец первой цепочки не совпадает с началом второй цепочки (то есть цепочки имеют вид $A \dots BC$ и $BC \dots A$), то их объединение $A \dots BC \dots A$ будет упорядочено по времени и даст цикл. Если же конец первой совпадает с началом второй (то есть цепочки имеют вид $A \dots DBC$ и $CBE \dots A$), то искомым циклом будет объединение без общего звонка, а именно $A \dots DBE \dots A$ (порядок звонков сохраняется, поскольку все звонки из первой цепочки прошли раньше звонка BC и, значит, раньше звонков второй цепочки).

Теорема о грубой оценке. *В минимальном способе оповещения для n человек будет не менее $2n - 5$ звонков.*

Доказательство. Если каждый сплетник сделал не менее 4 звонков, то всего было не менее $2n$ звонков, поэтому способ оповещения не минимален.

Пусть сплетник A звонил не более 3 раз. Тогда пересечение наборов $P(A)$ и $C(A)$ состоит не более чем из 3 звонков, поэтому их объединение состоит из не менее чем $(n-1) + (n-1) - 3 = 2n - 5$ звонков. □

Чтобы усилить грубую оценку, нам придется развить некоторую технику. Очевидна двойственность: если все звонки способа оповещения проделать в обратном порядке, то снова получится способ оповещения; при этом если способ был минимальным, то и двойственный способ будет минимальным.

Далее до конца зафиксируем $MCO(n)$.

Лемма о последнем звонке. *Если звонок AB последний для сплетника A, то он последний и для сплетника B.*

Доказательство. Предположим противное: после звонка AB был еще звонок BC. Но после своего последнего звонка A знает все слухи, значит B — тоже, в том числе и C-слух. Но тогда в результате звонка BC C-слух пройдет по кругу, что замкнет цикл с начальником C. По лемме о циклах это противоречит минимальности способа. □

В силу двойственности, то же верно и для первых звонков. Это дает корректное определение для *первых* и *последних* звонков в минимальном способе оповещения. А все остальные звонки назовем *средними* и рассмотрим *граф средних звонков*. Первые звонки разбивают сплетников на пары, поэтому таких звонков $\frac{n}{2}$; аналогично, последних звонков тоже $\frac{n}{2}$. Так как всего звонков не более $2n - 4$, то средних звонков не более $n - 4$. Рассмотрим граф средних звонков. В нем n вершин и не более $n - 4$ ребер, поэтому не менее 4 компонент связности. Обозначим через K_X компоненту, содержащую вершину X.

Выберем, как и в доказательстве теоремы о грубой оценке, сплетника A, сделавшего не более 3 звонков. Пусть AB — его первый звонок. Каким компонентам могут принадлежать средние ребра набора $P(A)$, то есть ребра, входящие в цепочки с началом A ? Первым звонком может быть только первое ребро такой цепочки, а последним — только последнее. После выкидывания из цепочки первых и последних звонков она может начаться только из A или из B. Значит, средние звонки набора $P(A)$ могут принадлежать только компонентам K_A и K_B. Аналогично, среди средних ребер набора $C(A)$ могут встречаться только ребра компонент K_A и K_C, где CA — последний звонок. Так как компонент не меньше четырех, то найдется компонента, чьи ребра не входят ни в $P(A)$, ни в $C(A)$.

Если в этой компоненте есть хотя бы одно ребро, то

$$|MCO(n)| \geq \|P(A) \cup C(A)| + 1 \geq (2n-5) + 1 = 2n - 4.$$

Если же в этой компоненте нет ребер, то она состоит из изолированной вершины D. Это значит, что сплетник D мог сделать только первый и последний звонок — всего не более двух. Тогда

$$|MCO(n)| \geq |P(D) \cup C(D)| \geq (n-1) + (n-1) - 2 = 2n - 4.$$

Задача решена.

ЛИТЕРАТУРА и ССЫЛКИ

[1] Brenda Baker, Robert Shostak; Gossips and telephones, Discrete Mathematics 2 (1972) 191-193.

[2] http://mathworld.wolfram.com/Gossiping.htm

[3] http://mathematik.uni-bielefeld.de/ sillke/PUZZLES/gossips.pdf