Свяжитесь с графом

П.КОЖЕВНИКОВ, А.ШАПОВАЛОВ

Любители занимательных задач вероятно встречали вопрос такого рода:

Задача 1. *Какое наибольшее число ребер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?*

Тут, конечно, надо уточнить, что вершины трогать нельзя, а ребро разрешается перекусывать где-то посредине. Нетрудно привести пример, когда перекусили 5 ребер из 12, и каркас не разваливается (см. рис.1), и ясно, что при любой попытке перекусить еще одно ребро каркас распадется на две части. Все, задача решена? Нет, конечно! Опытный в решении задач читатель понимает, что это только начало. То, что этот пример *нельзя улучшить*, не означает, что нельзя перекусить большее число ребер каким-то другим способом, может быть совсем не похожим на наш! Однако другие попытки приводят к тому же результату: 5 ребер перекусить удается, а 6 – нет. Появляется уверенность в справедливости утверждения: *каркас куба, в котором перекусили 6 ребер, обязательно распадется*. Но как это доказать? Перебирать варианты не хочется: даже с учетом симметрии куба их не так уж мало. Попробуем придумать доказательство, которое *объяснило* бы суть!

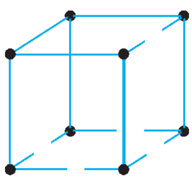

Рис. 1

Чтобы далее было удобнее рассуждать, каждую вершину будем считать шариком (см. рис.2). Пока каркас не распался, муравей может по *целым* ребрам проползти от любого шарика до любого другого. При этом ребра, которые перекусили, давайте вовсе удалим – связь между шариками не нарушится. Сколько же нужно целых ребер, чтобы обеспечить связь между всеми шариками?

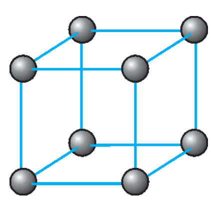

Рис. 2

Будем действовать с конца: удалим вначале вообще все ребра, а затем некоторые из них будем восстанавливать. После удаления всех ребер у нас есть 8 разрозненных шариков. Восстановим ребро между какими-то двумя шариками – у нас появится небольшой кусок каркаса. Далее, восстанавливая еще одно ребро, можно к нашему куску присоединить еще один шарик – и в нашем куске будет уже три шарика. Продолжая по одному присоединять шарики к имеющемуся куску, на 7-м шаге мы присоединим последний, 8-й шарик. Пять ребер, которые мы не задействовали в процессе, – это ребра, которые можно не восстанавливать (в исходной формулировке это те 5 ребер, которые можно перекусить). Возможный процесс восстановления показан на рисунке (рис.3).

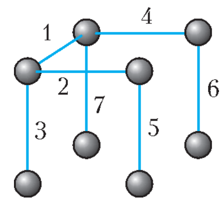

Рис. 3

Итак, смысл ответа «5» проясняется. Но вдруг мы действовали неэкономно?! Нельзя ли присоединять шарики не по одному, а группами? Однако тогда придется добавлять ребра на создание этих групп, ведь изначально шарики разрознены (чтобы сделать группу из двух шариков, потребуется одно дополнительное ребро, из трех – два ребра, и т.д.). Возня с группами подсказывает идею: давайте последим за числом групп!

Вначале каждый шарик составляет отдельную группу, т.е. всего групп 8. Восстанавливая очередное ребро, мы можем связать две группы в одну, уменьшив число групп на одну. Если же восстанавливаемое ребро соединяет два шарика внутри одной группы, то число групп не изменится. В конце процесса все шарики должны быть связаны в одну группу, а значит, операцию восстановления ребра придется проделать не менее чем $8 - 1 = 7$ раз, т.е. придется восстановить не менее 7 ребер. Все, задача, наконец, решена!

Чтобы лучше разобраться в приеме, решим еще одну задачу.

Задача 2. *Из спичек сложена шахматная доска 8×8, сторона каждой клетки равна длине спички (см. рис.4). Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спички и не выползая за пределы доски. Какое наименьшее число спичек придется для этого убрать, если граничные спички убирать нельзя?*

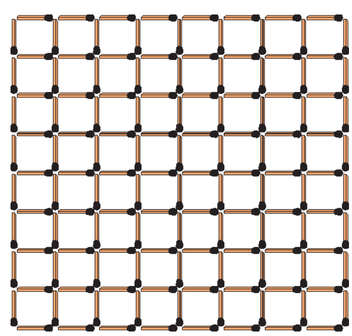

Рис. 4

Решение. Вначале у нас есть 64 отделенные друг от друга области-клетки. В конце они должны объединиться в единую область. Будем убирать спички по одной и следить за областями, на которые спички разбивают доску (под *областью* мы понимаем набор кле-

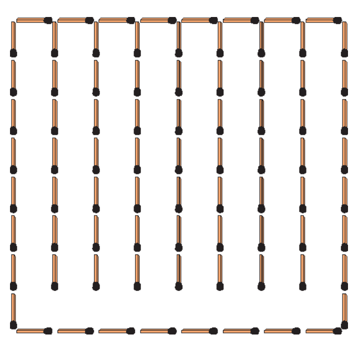

Рис. 5

ток, по которым жук может путешествовать, не переползая через спички). Ясно, что убрав спичку, мы можем слить не более двух областей в одну, т.е. уменьшим число областей не более, чем на одну. Нам понадобится не менее 63 слияний, и значит, убрать надо не менее 63 спичек.

А вот пример (рис.5): уберем все внутренние горизонтальные спички и все внутренние вертикальные спички на нижней горизонтали – как раз 63 спички в сумме. Задача решена.

Теорема о связности графа

Что общего в решениях задач 1 и 2? И там и тут были разрозненные объекты (шарики, клетки), которые мы объединяли в группы (области). В обеих задачах ключом к решению стала идея проследить за количеством групп (областей).

В обеих задачах есть связи между парами объектов: ребро куба соединяет пару вершин, спичка служит границей между парой соседних клеток. Связи тут очень наглядны, и это облегчает их подсчет.

Чтобы по возможности не повторять одни и те же рассуждения в разных ситуациях, математики вводят общие понятия. Структуры, в которых есть связи между парами объектов, называются *графами*. Наглядное представление графа такое: изображается система точек – вершин графа, где некоторые пары вершин соединены линиями – *ребрами* графа.

При этом не важно, где именно на плоскости расположены вершины, как именно выглядят ребра – в виде отрезков или кривых. Изображая граф, мы также не обращаем внимания на возможные пересечения ребер в точках, отличных от вершин.

Можно изготовить модель графа из пуговиц-вершин и нитей-ребер. Раскладывая такую модель на столе, или запутывая как угодно, мы граф не изменяем. В модели из пуговиц и нитей хорошо видны *связные* куски (*компоненты*): на такие компоненты можно разделить модель, не разрывая нитей.

Давайте более строго поговорим о связности в графах. Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно дойти до любой другой вершины, двигаясь по ребрам (т.е., переходя несколько раз из вершины в вершину по ребру). Пусть в произвольном графе зафиксирована вершина A. Множество вершин, в которые можно попасть из данной вершины A, двигаясь по ребрам, назовем *компонентой связности* вершины A и обозначим $K(A)$. При этом считается, что сама вершина A входит в компоненту $K(A)$.

Если из вершины A в вершину B можно пройти, двигаясь по ребрам, то компоненты связности $K(A)$ и $K(B)$ совпадают, а в противном случае у них нет общих вершин (докажите это!). Таким образом, множество всех вершин графа разбивается на компоненты связности (в частности, множество вершин связного графа представляет собой одну компоненту). На рис.6 изображен пример графа, у которого всего 4 компоненты связности. Обратим внимание на то, что в компоненте может быть одна *изолированная* вершина.

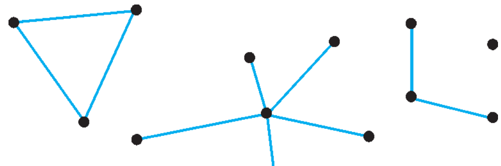

Рис. 5

Сформулируем важную и часто используемую теорему о связности:

Теорема. *1. Пусть дан связный граф с n вершинами. Тогда в нем не менее $n-1$ ребер.*

2. Пусть граф с n вершинами распадается на c компонент связности. Тогда в нем не менее $n-c$ ребер.

Доказательство. (Оно фактически воспроизводит рассуждения из решений разобранных задач.)

Сотрем в графе все ребра. Тогда все его вершины станут изолированными, т.е., граф распадется на n компонент связности. Начнем восстанавливать ребра по одному. Каждое проведенное ребро либо соединяет две компоненты связности в одну, либо никак не меняет разбиение на компоненты. Тем самым, восстановление ребра может уменьшить число компонент не более чем на 1. Поэтому, чтобы уменьшить число компонент с n до c, потребуется провести не менее $n-c$ ребер. В частности, чтобы сделать граф связным (т.е. сделать $c=1$), надо провести не менее $n-1$ ребер.

Попробуем еще раз вернуться к задачам 1 и 2, и проанализировать, какое отношение к ним имеет теорема связности.

Картинка на рис. 1 почти совпадает с наглядным представлением графа, и из теоремы сразу следует, что для сохранения связности нужно оставить не менее 7 ребер.

Картинка со спичками на рис. 4 тоже представляет собой изображение графа, но не того, который нужен для решения задачи. И неудивительно: ведь чтобы создать связь между клетками, мы *убираем* спичку! Опишем нужный нам граф. Поставим вершины в центры клеток (всего 64 вершины), а ребром будем соединять пары центров соседних клеток, если на границе между ними нет спички.

Рассматривая такой граф, мы полностью сводим задачу к ситуации, описанной в теореме.

Наверное, идея подсчета числа областей более ясно видна в задаче про спички (и ее решение выглядит даже более просто, чем доказательство теоремы).

Упражнения

1. Шоколадка 4×6 разделена бороздками на 24 квадратные плиточки. За один ход можно разламывать один любой кусок в любом месте и любом направлении, но обязательно вдоль бороздок. За какое наименьшее число разломов можно полностью разделить целую шоколадку на плиточки?

2. Решите задачу 2 в предположении, что убирать граничные спички можно, и жук может выползать за пределы доски (но жук хочет только иметь возможность посещать все 64 клетки).

Указание: можно считать, что вначале у нас есть 65 областей, считая внешнюю.

3. Пусть дан связный граф с n вершинами и k ребрами, причем $k > n-1$. Докажите, что можно удалить ребро так, чтобы граф остался связным.

Указание: можно использовать прием, который мы встречали: удалить сначала все ребра, а затем восстанавливать их по одному.

Из упражнения 3 вытекает, что примеры в задаче 1 всегда можно получить, перекусывая одно за другим 5 ребер, заботясь лишь о сохранении связности.

Упражнение 4. (Д. Храмцов, Всероссийская олимпиада, окружной этап, 1998 г.) Куб со стороной $n \geq 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

Необычные вспомогательные графы

Понятны типовые ситуации, которые легко описываются на языке графов: это города и соединяющие их дороги (авиалинии), знакомства людей в некоторой компании…

Далее мы рассмотрим задачи, в которых применение графов (и конкретно теоремы связности) не столь очевидно, но весьма продуктивно.

Намеком на использование графа в решении той или иной задачи могут стать связи *между парами* объектов или даже просто выделенный набор пар.

Задача 3 (по мотивам задачи И.Раскиной). *Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?*

Решение. *Ответ*: $m - 1$.

Пример. Если задать вопросы первому и второму, первому и третьему, …, первому и m-у, то рассадить будет легко: ответивших «да» сажаем в автобус вместе с первым, а остальных – в другой автобус.

А теперь рассмотрим ситуацию, когда было задано не более чем $m - 2$ вопроса. Построим граф вопросов: вершины соответствуют болельщикам, а ребра соединяют пары болельщиков, которым был задан вопрос. В нашем графе m вершин и не более $m - 2$ ребер, значит, по теореме связности он не связен. Но возможно ли по несвязному графу понять, как правильно разделить болельщиков? Рассмотрим одну из компонент связности A. Множество A делится на два подмножества A' и A'' (болельщики «Спартака» и болельщики «Динамо» соответственно). Аналогично, компонента связности B делится на подмножества B' и B''. В один из автобусов надо посадить болельщиков из множества A', однако неизвестно, какое именно из подмножеств B' и B'' к ним нужно добавить. В самом деле, если бы множество B' оказалось болельщиками «Динамо», а B'' – «Спартака», на все заданные им вопросы они дали бы в точности те же ответы (все вопросы были заданы внутри компоненты связности). А рассадка должна была быть другой. Значит, по ответам рассадка однозначно не восстанавливается.

Упражнение 5 (И.Раскина, турнир Савина, 2011). Решите предыдущую задачу, если дополнительно известно, что $m = 2n$, и что ровно n человек болеют за «Спартак» и n – за «Динамо».

Разберем еще несколько задач (помимо задачи 2) на клетчатой таблице. В следующей задаче, как и в задаче 2, нам поможет граф, иллюстрирующий соседство клеток.

Задача 4. *На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идет по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).*

Решение. *Ответ*: $2n + 2$.

Пример: прямоугольник $n \times 1$.

Оценка. Сумма периметров n клеток равна $4n$. Из этих периметров складывается периметр многоугольника и удвоенная сумма длин отрезков сетки внутри многоугольника: ведь к каждому внутреннему отрезку клетки примыкают с двух сторон. Чтобы оценить общую длину внутренних отрезков, построим граф: вершины – клетки прямоугольника, ребра связывают клетки с общей стороной. Этот граф связен: ладья может свободно путешествовать между всеми клетками внутри многоугольника. По теореме, у графа не менее $n - 1$ ребра, т.е., общая длина внутренних отрезков не менее $n - 1$. Но тогда периметр многоугольника не более $4n - 2(n-1) = 2n + 2$.

Комментарий. Конечно, эту оценку можно доказать и индукцией по числу клеток. Но индуктивное утверждение нужно формулировать умело. На занятиях математического кружка немало школьников пытались опираться на кажущееся очевидным (а по сути близкое к упражнению 3) утверждение: «многоугольник из $(k+1)$-й клетки можно получить, добавив одну клетку к какому-нибудь многоугольнику из k клеток», но так и не смогли его доказать…

Заметьте, что во многих задачах бывает полезна более общая конструкция «двойственного графа», когда области в некоторой «карте» на плоскости объявляются вершинами, а если у двух областей-вершин есть общая часть границы, то они соединяются ребром.

Упражнение 6 (А.Шаповалов, Турнир им. Савина, 2009 г.). На клетчатой бумаге нарисован тысячеугольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?

Задача 5 (Турнир городов 1988 г.). *Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется хорошей, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?*

Путь к решению. Среди всевозможных пар цветов явно выделены хорошие. Это намек на возможность построить граф «цветов» и оценить число ребер в нем!

Решение. *Ответ*. 22 пары.

Пример. Нетрудно построить пример с 22 хорошими парами цветов. Например, 22 хороших пары получаются, если в «море» первого цвета плавают «островки» каждого из остальных 22-х цветов. Здесь хорошие пары цветов – это в точности пары с участием первого цвета.

Докажем, что меньше чем 22 хорошие пары быть не может. Рассмотрим такой граф Г: каждому цвету сопоставим вершину графа (итого 23 вершины), для каждой хорошей пары цветов соединим ребром соответствующие им вершины. Если доказать, что граф Г связный, то по теореме о связности в нем будет не менее 22 ребер. Возьмем в Г любую пару вершин-цветов A, B, и на тетрадном листе отметим клетку K цвета A и клетку L цвета B. Будем перемещаться, начиная с клетки K, в соседние по стороне клетки, и через несколько ходов придем в клетку L. В соответствии с перемещением по тетрадному листу будем двигаться по вершинам графа Г: если мы на очередном ходу из клетки M цвета C перешли в соседнюю с ней клетку N другого цвета D, то в графе Г мы из вершины C переходим в вершину D (C и D соединены ребром, так как клетки M и N соседние); если цвет клетки не меняется, то в графе мы остаемся на месте. Так мы получаем в графе Г путь по ребрам из вершины A в вершину B. Это доказывает связность графа Г.

Упражнение 7. Клетки шахматной доски раскрасили ровно в 33 цвета. Пару разных цветов назовем хорошей, если можно поставить пару бьющих друг друга коней на клетки этих цветов. Найдите наименьшее возможное число хороших пар.

Указание. Здесь нас интересуют не пары соседних клеток, а пары клеток, с одной из которых ходом коня можно перейти на другую.

Задача 6 (С.Токарев). *Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?*

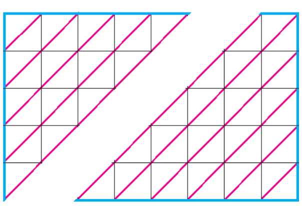

Рис. 7

Решение. *Ответ*: $m + n$.

Пример: Можно во всех клетках провести параллельные разрезы (рис.7), тогда количество частей будет $m + n$.

Пусть в каждой клетке проведен разрез вдоль одной из диагоналей.

Построим граф: вершины будут соответствовать треугольничкам – половинам разрезанных клеток, а ребро между вершинами проведем, если соответствующие треугольнички имеют общий катет. Нетрудно понять, что каждой из частей, на которые распался прямоугольник, соответствует компонента связности нашего графа (пример на рис.8). Число вершин равно удвоенному числу клеток, т.е. $2mn$. Число ребер равно числу границ между соседними клетками, т.е. равно $m(n-1) + n(m-1) = 2mn - (m+n)$. Согласно теореме, количество компонент связности в таком графе не меньше, чем $m + n$.

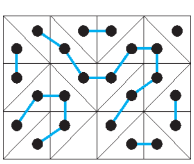

Рис. 8

Упражнение 8 (И.Акулич, XXIV турнир городов). Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы доска не распалась на части?

Указание: Построим граф, вершины которого – целые клетки или четвертушки разрезанных клеток (число вершин в нем зависит от числа разрезанных клеток).

Последнее упражнение интересно тем, что вспомогательный граф в ней можно построить многими способами. Кстати, и ответ далеко не очевиден.

Теперь приведем обещанное решение задачи М2339 задачника Кванта.

Задача 7 (В. Мокин, Задачник Кванта, М2339, обобщение задачи М1295). *Дана доска $m \times n$, разбитая на единичные клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись такие четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка; тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски, проделывая только описанные операции.*

Решение (В.Мокин). Построим граф: вершины – вертикали и горизонтали, их всего $m + n$. Ребро связывает вертикаль с горизонталью, если на их пересечении *нет фишки*. Изначально свободны $mn - (m-1)(n-1) - 1 = m + n - 2$ клетки, т.е., число ребер меньше $m + n - 1$. По теореме наш граф – не связный.

Клетку на пересечении горизонтали h и вертикали v будем обозначать (h, v), а если эта клетка свободна, то (h, v) означает и ребро от h до v.

Что произойдет при описанном в условии снятии фишки? Пусть четыре центра клеток расположены в вершинах прямоугольника на пересечении горизонталей p, q и вертикалей r, s, а фишка снимается с клетки (p, r). Тогда, по условию, клетки (p, s), (q, s) и (q, r), свободны.

Это означает, что в момент перед снятием фишки в графе были ребра (p, s), (s, q) и (q, r). Они образовывали путь из p в r, т.е. p и r лежали в одной компоненте связности. Снимая фишку, мы добавляем ребро (p, r), но компонент связности это не меняет. Поэтому граф был и остается *не связным*.

Заметим теперь, что на пустой доске каждая вертикаль связана с каждой горизонталью. Такой граф связен: горизонтали в нем связаны двузвенным путем через любую вертикаль, и наоборот. Но уже доказано, что связный граф мы получить не можем, поэтому все фишки снять нельзя.

Путь к решению. Построенный граф кажется необычным. Однако для математиков таблица из нулей и единиц – достаточно привычный способ представления так называемых *двудольных* графов: в таких графах вершины делятся на два сорта (две *доли*), а ребра могут связывать только вершины разных сортов. Доска из последней задачи естественно превращается в таблицу из нулей и единиц, если фишки заменить на 0, а пустые места – на 1. Как мы видели, интерпретация таблицы в виде двудольного графа может помочь (см., также решение задачи 10.8 регионального этапа Всероссийской олимпиады (см. «Квант» №2 за 2014 г.).

Имеется еще много интересных задач, где неожиданное использование графов помогает решить трудную задачу. Подобные сюжеты уже попадали на страницы «Кванта» (см., например, статью «Реконструкция генома: головоломка из миллиарда кусочков» в прошлом номере).

Мы надеемся вернуться к дальнейшему обсуждению этой красивой темы в будущем. А пока завершим знакомство трудной задачей, в которой теорема о связности графа срабатывает совершенно удивительным образом.

Задача 8 (Д.Фомин, Задачник Кванта, М1232). *Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите случаи:*

а) p и q – взаимно простые числа;

б) p и q имеют наибольший общий делитель $d > 1$.

Решение. *Ответы*: а) $p + q - 1$; б) $p + q - d$.

Пример. Нам важна не форма кусков, а их вес. Изобразим пирог отрезком $[0,\ pq]$ на числовой прямой и будем делить его на меньшие отрезки. Веса кусков будут пропорциональны длинам этих отрезков. Разделим синими точками большой отрезок на p равных частей, а красными – на q равных частей. Будет $p - 1$ синяя и $q - 1$ красная точки. Заметим, что точки деления соответствуют целым числам, при этом синие кратны q, а красные кратны p.

а) Если p и q взаимно просты, то точки деления соответствуют разным целым числам. Действительно, общая точка должна быть общим кратным p и q. В нашем случае это как минимум число pq, т.е. внутрь отрезка не попадает. Тогда будет всего $(p-1)+(q-1)=p+q-2$ точки, и они разделят пирог на $p + q - 1$ частей.

б) Если $\text{НОД}(p,q)=d>1$, то $p = md$, $q = nd$, где натуральные числа m и n взаимно просты. Общие кратные p и q имеют вид $kmnd$, где k – натурально. На большой отрезок они попадают при $k = 1, 2, \ldots, d - 1$. Тем самым, всего будет $(p-1)+(q-1)-(d-1)=$ $=p+q-d-1$ точек, и они разделят пирог на $p + q - d$ частей.

Оценка. Можно считать, что в гости могли прийти либо p дам, либо q гусаров. Всех их будем считать вершинами графа. Всего в графе $p + q$ вершин. Пусть есть план раздачи кусков и дамам, и гусарам. Даму и гусара, которым достался бы один и тот же кусок (или несколько кусков), соединим ребром. Итак, число ребер графа не больше числа кусков. Будем считать, что пирог весит pq фунтов. Рассмотрим компоненту связности. И дамы, и гусары из этой компоненты получили бы один и тот же набор кусков, т.е. в сумме поровну. Но дамы получают по q фунтов, гусары – по p, поэтому суммарный вес для компоненты делится на $\text{НОК}(p,q)$. (Кстати, вес отдельного куска не обязан быть целым, но нам это не важно, мы следим лишь за суммарными весами). Значит, компонента получает в сумме не менее $\text{НОК}(p,q)$.

а) Так как p и q взаимно просты, то $\text{НОК}(p,q)=pq$. Значит, компонента получает весь пирог, и других компонент нет. Граф связен, поэтому число ребер не меньше $p + q - 1$, то же верно и для числа кусков.

б) Известно равенство $\text{НОД}(p,q)\cdot\text{НОК}(p,q)=pq$. Тогда компонента получает не менее pq/d фунтов. Но тогда в графе не более d компонент связности. По теореме число ребер не меньше $p + q - d$, то же верно и для числа кусков.

Упражнение 9. Придумайте решение предыдущей задачи для случая $q = p + 1$ без применения графов.

Дополнительные задачи для самостоятельного решения

Задача 9 (А.Шаповалов, Турнир Савина, 2014). Нарисован выпуклый многоугольник, разбитый непересекающимися диагоналями на треугольники. Можно ли стороны и диагонали раскрасить в желтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из каждой вершины в любую другую по желтым отрезкам, а клоп – по красным?

Задача 10 (А.Шаповалов, Турнир Савина, 2011). Клетчатый квадрат 8×8 разрезали по границам клеток на три многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра.

Задача 11 (А.Анджанс, XXV Всесоюзная олимпиада). Фигура на рис. 9 разрезана по сторонам клеток на несколько многоугольников, ни один из которых не содержит квадрата 2×2. Каково наименьшее возможное число многоугольников?

Задача 12 (А.Марачев, XXXV Турнир городов). Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

– со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета – видны 9 кубиков фигуры);

– переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

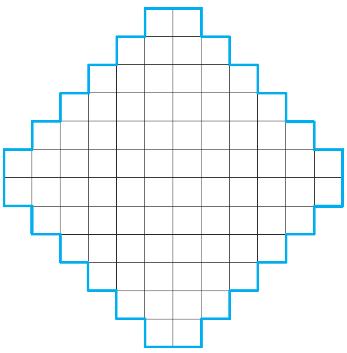

Рис. 1

Задача 13 (А.Шаповалов, турнир Савина, 2000 г.). Есть 101 банка консервов весами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний.

а) У завхоза есть двое чашечных весов: одни точные, другие – грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые – только если разница больше 1,1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

б) У завхоза есть только грубые весы. Какое наименьшее число взвешиваний ему понадобится?

Задача 14 (В. Болтянский, Задачник Кванта, М980б). Пусть точка O лежит внутри выпуклого многогранника с вершинами $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что среди углов A_iOA_j не менее $n - 1$ не острых.