I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Командная олимпиада

28 февраля

1. Пусть $x>y$ – положительные числа. Может ли на числовой прямой число 2 стоять ровно посредине между дробями (x+y)/x и (x+y)/y?

2. Разрежьте треугольник с углами 30°, 40° и 110° на три равнобедренных треугольника.

3. Три наименьших делителя числа n – это $1<k<m$. Известно, что $n=(3k+m)^2$. Найдите все такие n.

4. Из клетчатого листа бумаги, раскрашенного в шахматном порядке, Петя вырезал по клеточкам полоску 1×12 и приклел ее на холодильник. Он расставляет на ней 12 одинаковых по форме магнитных фишек семи цветов радуги: одну красную, одну фиолетовую и по две оранжевых, желтых, зелёных, голубых и синих. Петя называет расстановку *хорошей*, если выполнены два правила:
Ф. Фиолетовая фишка стоит между синими (не обязательно рядом);
Ж. Желтые фишки стоят на клетках разного цвета.
Сколько всего существует хороших расстановок?

5. Четыре точки A, B, C, D таковы, что D и C лежат по одну сторону прямой AB и $AB=AD+BC$. Биссектрисы углов ABC и BAD пересекаются в точке E. Докажите, что $CE=DE$.

6. Какое наименьшее число клеток нужно отметить на клетчатой доске 18×18 так, чтобы фигуркой на рисунке нельзя было накрыть 5 неотмеченных клеток? Фигурку можно поворачивать и переворачивать.

7. Назовем натуральное число *удачным,* если его можно представить как сумму натуральных чисел, у которых сумма обратных величин равна 1 (например, число 29 удачно: 29=2+3+12+12 и 1/2+1/3+1/12+1/12=1).
Докажите, что все числа вида $24n^2$ – удачные.

8. На плоскости нарисовано 100 единичных отрезков, каждые два имеют общую точку. Докажите, что все отрезки можно накрыть каким-нибудь треугольником периметра меньше 14.

Авторские задачи: 7,8 — А.Шаповалов. *Новые формулировки по известным мотивам*: 1, 3, 4, 6 — А.Шаповалов.

www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html