# **IV Европейский математический турнир г. Тверь, 15-20 марта 2021 года**

# **Тур 1. Сеньоры. Гранд-лига** *17 марта*

**1.** У Васи есть несколько (больше одной) доминошек, каждая клетка которых окрашена в один из трех цветов. Оказалось, что Вася может использовав все доминошки сложить из них прямоугольник с трехцветной диагональной раскраской. Докажите, что Вася может сложить прямоугольник с другими длинами сторон, соблюдая те же условия.

**2.** На доске написаны два различных натуральных числа: n и k. Паша и Вова делают ходы по очереди, начинает Паша. За один ход необходимо стереть одно из чисел и записать вместо него меньшее натуральное число, которое ещё не появлялось на доске. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n и k при правильной игре побеждает Паша?

**3.** На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Филипп выбрал одно из этих чисел и переписал в тетрадку все числа, которые делят выбранное или делятся на выбранное. Оказалось, что чисел, больших 500, в тетради 4 штуки, а меньших 500 – всего 6 штук. Какое число мог выбрать Филипп?

**4.** Обозначим через Tn количество способов выбрать нескольких из n человек и поставить их в шеренгу. Способы различны, если шеренги разные. Докажите, что Tn - Tm делится на n-m

**5.** Дан равнобедренный треугольник PQR с углом при вершине Q, равным 108°. Точка O расположена внутри треугольника PQR так, что ∠ORP=30°, а ∠OPR=24° . Найдите величину угла ∠QOR .

**6.** Многоугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны (например, правильный треугольник и ромб – равносторонние). Можно ли разрезать квадрат на три равносторонних многоугольника (не обязательно одинаковых)?

**7.** По кругу расставлены натуральные числа от 1 до n в некотором порядке. Для каждой пары соседних чисел посчитали модуль их разности, а затем сложили все эти числа. Найдите наибольшее возможное значение этой суммы.

**8.** В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить натуральные числа от 1 до n так, чтобы никакие два различных числа одного цвета не давали в произведении точный квадрат?

*Авторские задачи*: 1 – Р.Ефремов, 4, 8 – С.Лучинин, 6 – А.Шаповалов

<http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html>

# **IV Европейский математический турнир г. Тверь, 15-20 марта 2021 года**

# **Тур 1. Сеньоры. Первая лига** *18 марта*

**1.** Вася сложил из доминошек прямоугольник 21х100 и раскрасил его диагонально в три цвета. В результате каждая доминошка раскрасилась в два цвета. Докажите, что из этих доминошек Вася может составить прямоугольник 35х60, диагонально раскрашенный в три цвета. (Диагональная трёхцветная раскраска означает, что каждая диагональ одного из направлений одноцветна, и если она не одноклеточная, то граничит с двумя диагоналями двух других цветов).

**2.** Выписаны числа 1, 2, 3, …, 2021. Можно ли из них выбрать такое число N, чтобы среди остальных у него было ровно 10 делителей и ровно 10 кратных (само число мы ни там, ни тут не считаем)?

**3.** Натуральные числа a, b и c таковы, что a2+b2 делится на c2, a2+c2 делится на b2 и b2+c2 делится на a2. Верно ли, что все числа равны?

**4.** Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Его стороны AB и CD продлили за точки B и D на свои длины, получив точки P и R. Стороны BC и DA продлили за точки C и A на удвоенные длины, получив точки Q и S. Прямые PQ и RS пересекают прямую AC в точках X и Y. Найдите отношение XY:AC.

**5.** По кругу расставлены натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке. Для каждой пары соседних чисел посчитали модуль их разности, а затем сложили все эти числа. Найдите наибольшее возможное значение этой суммы.

**6.** Компьютер напечатал на ленту числа 1, 2, 3, ..., 999 в некотором порядке подряд без пробелов, каждое по одному разу. Получилось строка из цифр. Какое наибольшее количество раз на этой ленте может быть напечатана одинаковая комбинация из трёх подряд идущих цифр?

**7.** Ковбои Ивэн и Одд выпустили в мишень по 20 пуль, каждый раз выбивая очки: Ивэн чётное, а Одд – нечётное число. Ивэн попал в десятку, восьмёрку, шестёрку, четвёрку и двойку столько раз, сколько Одд в семёрку, пятёрку, тройку, единицу и девятку соответственно. В сумме они выбили поровну очков. Сколько девяток выбил Одд?

**8.** В ряд стоят 11 одинаковых шкатулок с одинаковыми монетами, в самой левой 11 монет, в каждой следующей на одну монету больше, чем в предыдущей. Шутник переложил из некоторой шкатулки Ш одну монету в шкатулку слева через одну. Как найти Ш за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

*Авторские задачи*: 4, 6 – Д.Белов, 3 – С.Лучинин, 1, 7 – А.Шаповалов

<http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html>