V Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 3. Сеньоры. Гранд-лига. Верхние бои.

19 марта

1. На доску выписали все неоднозначные делители числа 50! от 10 до 50! включительно. Раз в минуту Серёжа находит на доске два числа a и b, где a делится на b, старые числа стирает, а вместо них пишет частное a/b. В конце осталось одно двузначное число. Найдите, чему оно может быть равно.

2. Коля задумал трехзначное число, в записи которого нет цифр 0 и 9. Толя пытается угадать задуманное число. Каждым ходом он называет какое-либо трёхзначное число. Если названное число совпадает с задуманным хотя бы в двух разрядах, то Коля говорит: ``И так сойдёт'' и процесс заканчивается. Как Толе закончить процесс за 32 шага?

3. Петя и Вася играют на доске 20x20. Изначально в некоторой клетке этой доски стоит фишка. Ребята по очереди, начиная с Пети, двигают эту фишку на соседнюю по стороне клетку. Нельзя перемещать фишку через одну и ту же границу дважды. Проигрывает тот, кто не может ходить. При каких начальных положениях фишки побеждает Петя?

4. В треугольнике ABC $\angle A = 2\angle C$. На стороне AB выбрана точка M такая, что AM = AC. Оказалось, что CM = AB. Найдите углы треугольника ABC.

5. В графе на n вершинах наибольшее количество вершин в полном подграфе равно k. Докажите, что в графе можно выделить не более $3^{(n+k)/3}$ полных подграфов.

6. Перед Аней и Борей лежат 20 монет веса 1, 2, 3, ..., 14, 15, 37, 38, 39, 40, 41 граммов. Монеты выглядят по-разному, но определить на вид, какая весит больше, невозможно. Оба знают, сколько должны весить монеты, но только Аня знает про каждую монету её вес (а Боря не знает вес никакой конкретной монеты). За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь Аня сможет доказать Боре про монету массой 1 грамм, что она действительно столько весит?

7. Найдите все n>3, обладающие следующим свойством: для каждого делителя d числа n^2, где d>15, число d+15 является степенью простого числа (возможно, первой)

8. Дано натуральное число n. Числа $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ – положительные вещественные с условием $x_1+\ldots+x_n=y_1+\ldots+y_n=1$. Докажите, что

$$|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leqslant 2 - \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{x_i}{y_i} - \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{y_i}{x_i}.$$

Авторские задачи: 1 – А.Шаповалов

http://www.ashap.nfo/Turnry/EMT/ndex.html

V Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 3. Сеньоры. Гранд-лига, нижние бои; Первая лига, верхний бой.

19 марта

1. На доску выписали все способы представить число 50 в виде суммы двух или трех упорядоченных слагаемых (т.е. варианты 1+49 и 49+1 различны). Раз в минуту Серёжа находит на доске два однозначных числа и заменяет их на их сумму; или же находит двузначное число и заменяет его на два однозначных числа, а именно на две его цифры. Серёжа работает до тех пор, пока на доске не останется одно однозначное число. Чему оно может быть равно?

2. Петя и Вася играют на доске 19x19. Изначально в угловой клетке этой доски стоит фишка. Ребята по очереди, начиная с Пети, двигают эту фишку на соседнюю по стороне клетку. Нельзя перемещать фишку через одну и ту же границу дважды. Проигрывает тот, кто не может сходить. Кто выигрывает при правильной игре?

3. У Гриши и Саши были по одинаковому бумажному квадрату со стороной 1. Каждый из них смог разрезать свой квадрат на 6 прямоугольников периметра 2. Докажите, что наборы прямоугольников у них одинаковы.

4. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) угол A тупой. Точка M на продолжении стороны AC за точку C такова, что AC = CM. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает прямую AB в точке P. Оказалось, что прямые PM и BC перпендикулярны. Докажите, что APM – равносторонний треугольник.

5. На столе по кругу лежат 5 внешне одинаковых монет весами 1, 2, 3, 4 и 5 г. Известно, что веса идут по порядку, но неизвестно, по часовой стрелке или против часовой стрелки, и с какого места начинаются. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может, сделав два взвешивания на чашечных весах без гирь, после этого определить вес какой-нибудь из монет. Могут ли слова барона быть правдой?

6. Можно ли выписать в строку 160 натуральных чисел, каждое от 1 до 18, так, чтобы любые два различных числа от 1 до 18 встречались рядом в этой строке?

7. Посмотрев на часы со стрелками, Саша увидела, что угол между минутной и часовой стрелкой острый. Посмотрев на часы через два часа, Саша заметила, что угол стал вдвое больше, но остался острым. Какой угол Саша видит сейчас?

8. Даны пять натуральных чисел. В каждой тройке этих чисел их сумма делится на среднее из них по величине. Докажите, что среди чисел есть равные.

Авторские задачи: 7, 8 – А.Шаповалов

V Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 3. Сеньоры. Первая лига, нижний бой.

19 марта

1. *Полуладья* ходит как обычная, но не больше, чем на три клетки. Какое наибольшее количество полуладей можно поставить на доске 8x8 так, чтобы они не били друг друга?

2. На доску выписали все способы представить число 50 в виде суммы двух или трех упорядоченных слагаемых (т.е. варианты 1+49 и 49+1 различны). Раз в минуту Серёжа находит на доске два однозначных числа и заменяет их на их сумму; или же находит двузначное число и заменяет его на два однозначных числа, а именно на две его цифры. Серёжа работает до тех пор, пока на доске не останется одно однозначное число. Чему оно может быть равно?

3. Можно ли квадрат со стороной 8 разбить на 7 прямоугольников с периметром 16?

4. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) угол A тупой. Точка M на продолжении стороны AC за точку C такова, что AC = CM. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает прямую AB в точке P. Оказалось, что прямые PM и BC перпендикулярны. Докажите, что APM – равносторонний треугольник.

5. На столе по кругу лежат 5 внешне одинаковых монет весами 11, 12, 13, 14 и 15 г. Известно, что веса идут по порядку по часовой стрелке, но неизвестно, с какого места начинаются. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти самую тяжёлую монету?

6. Посмотрев на часы со стрелками, Саша увидела, что угол между минутной и часовой стрелкой острый. Посмотрев на часы через два часа, Саша заметила, что угол стал вдвое больше, но остался острым. Чему теперь равен этот угол?

7. Прапорщик выдал каждому солдату паёк, состоящий из чая, сгущёнки и тушёнки. Паёк рядового состоит из 2 пачек чая, 4 банок сгущёнки и 4 банок тушёнки. Паёк сержанта сытнее и состоит из 3 пачек чая, 7 банок сгущёнки и 8 банок тушёнки. Оказалось, что банок сгущёнки было выдано на 50 штук больше, чем пачек чая. Сколько всего банок тушёнки было выдано?

8. На турнир приехали только лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). На вопрос «Чётно ли число рыцарей, с которыми вы дружите?» каждый ответил «Нет». На вопрос «Чётно ли число лжецов, с которыми вы не дружите?» каждый ответил «Да». Чётное или нечётное число людей приехало на турнир? (Дружба взаимна.)

Авторские задачи: 3, 6 – А.Шаповалов, 1 – В.Шурыгин

http://www.ashap.nfo/Turnry/EMT/ndex.html