Олимпиада им. Г.П.Кукина

10 класс. 2007-2008 уч. год

1. Три положительных числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что любой корень x_0 уравнения $ax^2+bx+c=0$ удовлетворяет неравенству $x_0<-2$. *(Штерн А.С.)*

2. В четырехугольнике $ABCD$ угол D острый, а угол A – тупой. Известно, что $CD=2AB$ и $S_{ACD}=2S_{ABD}$. Найдите отношение $\frac{S_{AOB}}{S_{COD}}$, где O – точка пересечения диагоналей четырёхугольника. *(Усов С.В.)*

3. Дан стандартный набор домино. Из восьми доминошек этого набора составьте магический квадрат 4×4 (т.е. квадрат, в котором во всех строчках, столбцах и каждой из двух диагоналей содержится одинаковое количество точек) с минимальным возможным количеством точек. *(Усов С.В.)*

4. На нижней ступеньке лестницы из 130 ступенек лежит 130 камней, остальные ступеньки пусты. За ход Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех, лежащих на этой ступеньке), и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из два камня – через одну ступеньку вверх или вниз и т.д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 15 ходов. *(Шаповалов А.В.)*

5. На координатной плоскости даны четыре точки A(0;0), B(2007;2007), C(0;2007), E(–2007;0). Можно ли так подобрать целые числа b, c, чтобы график квадратного трёхчлена $y=x^2+bx+c$ пересекал каждую из прямых AB, BC, CE и AE, причём все точки пересечения имели бы целые координаты? *(Штерн А.С.)*

6. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовём восхитительным, если самый большой собственный делитель этого числа равен сумме собственного делителя, второго по величине и собственного делителя, третьего по величине. (Например, число 18 восхитительное: 9=6+3). Сколько существует восхитительных чисел, не превосходящих полтора миллиона? *(Штерн А.С.)*