Математическая олимпиада им. Г.П. Кукина; 10 класс

2007-08 уч.г.

Ответы и решения

1. Пусть t – разность прогрессии, x – корень многочлена Тогда уравнение можно переписать в виде $ax^2+(a+t)x+(a+2t)=0 \Leftrightarrow a(x^2+x+1)= -t(x+2)$. По условию параметры a, t положительны и при любом x $x^2+x+1>0$. Поэтому $x+1<0$.
2. Опустим на прямую AD перпендикуляры BH и CK. Поскольку AD – общее основание треугольников ABD и ACD, то CK=2BH, и треугольники ABH и DCK подобны по двум сторонам и прямому углу. Тогда угол $\angle$BAH = $\angle$ CDK, а значит, AB||CD, и треугольник ABO подобен треугольнику CDO по двум углам с коэффициентом подобия AB/CD=0,5. Следовательно $\frac{S_{AOB}}{S_{COD}}=\frac{1}{4}$.
3. *Оценка*. Рассмотрим доминошки с минимальным количеством точек. Тогда имеем одну пустую, одну – с одной точкой, две – с двумя, две – с тремя, три – с четырьмя. Если из этих 9 доминошек удастся выбрать 8 для магического квадрата, то минимальное количество точек в таком квадрате будет равно $0+1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4=19$. Что невозможно, так как количество точек в каждой строке одинаково, а число строк равно 4.
Пример магического квадрата, в котором 20 точек.

2	1	1	1
3	1	1	0
0	3	0	2
0	0	3	2

4. Будем нумеровать ступеньки снизу вверх. Вначале Сизиф должен пять раз поднять по 26 камней на ступеньку с номером 104. Затем – 5 раз спустить по 25 камней на ступеньку с номером 129. После этого нужно пять раз спустить оставшиеся 5 камней на ту же ступеньку с номером 129.
5. Ответ: нет, не может. Решение. Прежде всего, заметим, что уравнение $x^2+bx+c=0$ не может иметь целых корней, если оба коэффициента b, c нечётные. Абсциссы точек пересечения параболы с указанными прямыми есть корни следующих квадратных трёхчленов: $x^2+bx+c=0$ (с прямой AE), $x^2+bx+(c-2007)=0$ (с прямой BC), $x^2+(b-1)x+c=0$ (с прямой AB), $x^2+(b-1)x+(c-2007)=0$ (с прямой CE). Но ясно, что в одном из этих уравнений оба коэффициента нечётные.
6. Ответ: 100000. Решение. Прежде всего, заметим, что любое восхитительное число N – чётное. В самом деле, у нечётного числа все делители нечётные, а сумма двух нечётных чисел не может быть равна нечётному числу. Поэтому самый маленький собственный делитель числа N равен 2, а самый большой, соответственно, равен $N/2$. Обозначим второй «по малости» собственный делитель через a, а третий через b. Тогда должно выполняться равенство $\frac{N}{2}=\frac{N}{a}+\frac{N}{b}$. Если $a\geq 4$, то $\frac{N}{a}+\frac{N}{b}\leq\frac{N}{4}+\frac{N}{5}<\frac{N}{2}$. Значит, $a=3$ и $b=6$. Это означает, что число N делится на 6, но не делится на 4 и 5. Последнее условие означает, что число N при делении на 60 даёт один из следующих остатков: 6, 18, 42, 54. Среди каждых 60 последовательных чисел четыре восхитительных. Поэтому имеется $4\cdot\frac{1500000}{60}=100000$ восхитительных чисел, не превосходящих полтора миллиона.