Олимпиада им. Г.П.Кукина

11 класс. 2007-2008 уч. год

1. Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x^{2007}-x}=\sqrt{x-1}$.

2. Дан произвольный треугольник ABC. Строится последовательность треугольников по следующему правилу. Три стороны треугольника $A_1B_1C_1$ равны синусам углов треугольника ABC, три стороны треугольника $A_2B_2C_2$ равны синусам углов треугольника $A_1B_1C_1$ и т.д. Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника $A_{2007}B_{2007}C_{2007}$. *(Усов С.В.)*

3. Четыре положительных числа *a, b, c, d,* взятые именно в таком порядке, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что любой корень x_0 уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ удовлетворяет неравенству $x_0 < -1$. *(Штерн А.С.)*

4. На нижней ступеньке лестницы из 130 ступенек лежит 130 камней, остальные ступеньки пусты. За ход Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех, лежащих на этой ступеньке), и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из два камня – через одну ступеньку вверх или вниз и т.д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 15 ходов. *(Шаповалов А.В.)*

5. На длинном столе в ряд лежат 2007 кучек по одному ореху. Первый и второй ходят по очереди. За ход нужно найти какие-нибудь две соседние кучки (то есть без кучек между ними), где правая не меньше левой, и объединить их в одну. Тот, кто делает последний ход, выигрывает. Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы не играл противник? *(Усов С.В.)*

6. Шестигранник ABCDKLMN вписан в сферу, его грани ABCD и KLMN лежат в параллельных плоскостях, а ABLK, BCML, CDNM, DAKN – его остальные грани. Известно, что AB×LM=BC×KL. Докажите, что шестигранник ABCDKLMN является либо усечённой пирамидой, либо прямой призмой. *(Усов С.В.)*

www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html