

# Олимпиада им. Г.П.Кукина

## 10 класс. 2009-2010 уч. год.

1. Прямая на координатной плоскости с уравнением  $y=px+q$  называется хорошей если она имеет ровно одну общую точку с графиком функции  $y=x^4+qx-p$ . Два числа  $p$  и  $q$  подобраны так, что прямая с уравнением  $y=px+q$  – хорошая. Докажите, что прямая с уравнением  $y=qx+p$  тоже хорошая.  
(Штерн А.С.)
2. На столе стоит куб с ребром 3, составленный из 27 маленьких кубиков с ребром 1. Отрезок, соединяющий центры двух соседних кубиков, называется устойчивым, если он составляет с плоскостью стола угол 45 градусов. Сколько устойчивых отрезков можно провести в этом кубе? Кубики называются соседними, если они имеют общую грань, ребро или вершину.
3. Факториалом натурального числа  $n$  называется произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  (обозначение  $n!$ ). Например,  $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ . Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел представимых в виде произведения двух факториалов натуральных чисел несколькими (двумя или более) различными способами.  
(Штерн А.С.)
4. На большем катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  как на диаметре построена полуокружность, пересекающая гипотенузу  $AB$ . На полуокружности выбрана точка  $P$  такая, что  $CP=BC$ , а на катете  $AC$  выбрана точка  $Q$  такая, что  $AQ=AP$ . Отрезок  $BQ$  пересекает полуокружность в точке  $S$ . Докажите, что  $\angle CSP=2\angle CBP$ .
5. В квадрате  $2009\times 2009$  расставлены числа так, что в каждой строке числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце – геометрическую прогрессию. Докажите, что знаменатели всех геометрических прогрессий совпадают.  
(Усов С.В., Штерн А.С.)
6. В волшебной стране существует автомастерская, которая может переделывать автомобили по следующим схемам: 3 машины «Жигули» переделываются в одну «Волгу» и один «Мерседес»; 3 машины «Волга» переделываются в 2 машины «Жигули» и один «Мерседес». Какое наибольшее число «Мерседесов» можно получить из 2009 «Жигулей»? (Адельшин А.В.)