

# Олимпиада им. Г.П.Кукина

## 10 класс. 2010-2011 уч. год.

1. Точки  $A, B, C, D$  – соседние вершины правильного многоугольника (именно в таком порядке). Известно, что  $\angle ACD=120^\circ$ . Сколько вершин у этого многоугольника?
2. Можно ли расставить по окружности 2011 натуральных чисел так, чтобы каждое число было равно либо сумме, либо разности двух соседних чисел?
3. Все коэффициенты квадратного трёхчлена  $ax^2+bx+c$  – положительные числа. По этому трёхчлену строится новый трёхчлен по следующему правилу: каждый коэффициент заменяется на произведение двух других коэффициентов (например, из трёхчлена  $2x^2+x+3$  получается трёхчлен  $3x^2+6x+2$ ). Затем то же делается с полученным трёхчленом и так далее, пока не будет получено 2010 трёхчленов, включая исходный. Сколько из полученных трёхчленов могут иметь отрицательный дискриминант? Привести все варианты ответа и доказать, что других вариантов нет. (*Штерн А.С.*)
4. Положительное число  $y$  и произвольное число  $x$  подобраны так, что выполнено неравенство  $y(y+1)\leq(x+1)^2$ . Докажите, что выполнено неравенство  $y(y-1)\leq x^2$ . (*фольклор*)
5. Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $P$  так, что  $\angle BPC=90^\circ$  и  $\angle BAP=\angle BCP$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно, причём  $BP=2PM$ . Докажите, что точки  $A, P$  и  $N$  лежат на одной прямой. (*фольклор*)
6. На  $n$  синих карточках написано по натуральному числу, не превосходящему  $m$ , а на  $m$  красных карточках – по натуральному числу, не превосходящему  $n$ . Докажите, что можно выбрать все или часть карточек так, чтобы сумма чисел на синих была равна сумме чисел на красных. (*фольклор*)

[www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html](http://www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html)