Математическая олимпиада школьников имени Г.П. Кукина

20.12.15, 10 класс

Условия — см. www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. **Ответ.** Могут. **Решение.** Например, можно взять следующие числа: 0 и корни из дробей 2013·2014/2015, 2013·2015/2014, 2015·2014/2013.

2. **Ответ.** За 4 часа 10 минут и 4 часа 20 минут. **Решение.** Пусть с нормальной скоростью каждый проезжает круг за t. Тогда Петров проезжает 3,5 круга за $4t$, таких кусков у него 6 и ещё круг, поэтому он потратит на всё $25t$. Аналогично, Волков 8 раз по 2,5 круга за $3t$ каждый раз плюс 2 круга, итого $26t$. Отсюда t=10 минут, $25t$=250 минут и $26t$=260 минут.

3. **Решение.** Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними. Пусть $AK/KB=\alpha$. Тогда

$$S(AKN)=\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}S(ABD),\quad S(CLM)=\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}S(BCD)\Rightarrow$$

$$S(AKN)+S(CLM)=\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}S(ABCD).$$ Аналогично

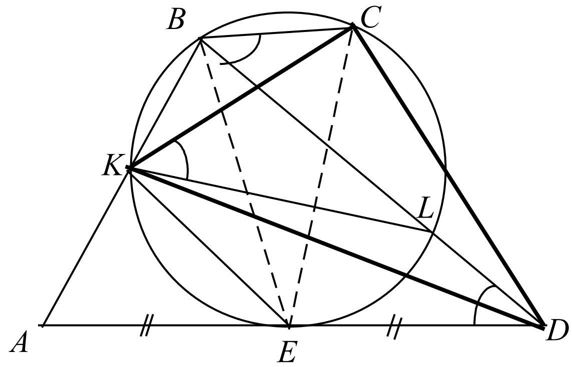
$$S(LBK)+S(DNM)=\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}S(ABCD)\Rightarrow S(KLMN)=\frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha)^2}S(ABCD)$$ и

$$S(PQRS)=\frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2}S(KLMN)=\frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2}\cdot\frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha)^2}S(ABCD).$$ Но $\frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\geq\frac{1}{2}$, откуда и следует утверждение задачи.

4. **Ответ.** Полукровка был один и стоял с краю. **Решение.** Поскольку никто не обманывал, и все ответы были различными, прозвучали все числа: 0, 1, 2, …, 99. Заметим также, что люди, стоящие на 1-м и 100-м местах, не могут принадлежать к одному племени, поскольку тогда они описывали бы одинаковые множества людей, и говорили бы одно и тоже. Пусть на 1-м месте стоит маг, а на 100-м стоит полукровка (или наоборот, что не важно). Тогда этот полукровка и скажет 99. Кто же мог назвать число 98? Только человек, по одну сторону от которого стоит 98 или 99 людей. То есть, человек с 1-го, 2-го или 99-го места. Но чётность показывает, что 2-й и 99-й назовут 0 или 1. Значит, число 99 назвал 1-й. Но он маг и других полукровок, кроме 100-го, в этом ряду нет.

5. **Ответ.** $2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$, $5040=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$, $7560=2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7$. **Решение.** У нечётного числа сумма любых двух простых делителей чётна, поэтому нечётное число элегантным быть не может. Обозначим наименьший простой нечётный делитель через p. Если хотя бы одно из чисел $p+2$, $p+4$

составное, то у него есть нечётный делитель, меньший числа $(p+4)/2$, что меньше p при $p>3$. Тогда в силу выбора p либо $p=3$, либо каждое из чисел p, $p+2$, $p+4$ является простым. Но все эти числа дают различные остатки от деления на 3. Значит одно из них делится на 3 и не может быть простым при $p\neq 3$. Получили, что в любом случае элегантное число делится на 2 и 3. Далее последовательно получаем, что оно делится на: 5, 7, 8, 9. Поэтому разложение элегантного числа на простые множители содержит $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2520$. Ясно, что, умножая это число на любой простой множитель, входящий в его запись, мы снова получаем элегантное число. Но умножать можно только на 2 или 3, в противном случае число перестаёт быть четырёхзначным. А при умножении его на новое простое число 11 или больше, мы тем более не можем получить четырёхзначного числа.



6. **Ответ.** 75°. **Решение.** Углы CBD и CKL равны, следовательно, $ABCD$ – трапеция. Так как E – середина AD, то $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Треугольники ABE и KCE равны по первому признаку ($AB=CK$, $BE=CE$, и углы KBE и KCE опираются на одну дугу), тогда $AE=KE$. Имеем, что в треугольнике AKD медиана равна половине стороны, откуда $\angle AKD=90°$. Так как $KE=ED$ и $KC=CD$, то CE – это серединный перпендикуляр к KD, следовательно, CE – это биссектриса угла KCD, то есть $\angle KCE=\angle KEA=30°$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой). Но тогда $\angle KDA=15°$ и $\angle BAD=75°$.