МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

18.12.2016, 10-11 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. **Решение.** Да, смогут. Гребет первый. 9+1 туда, 1 обратно. 8+2 туда, 2 обратно. 7+3 туда, 3 обратно. 6+4 туда, 4 обратно. 4+3+2+1 туда, 1 обратно. 10 туда, 2 обратно. 5+1+2 туда.

2. **Ответ.** $\{2,2,2\}$. **Решение.** Неравенство легко приводится к виду $0 \ge x\left(y-2\sqrt{y-1}\right)+y\left(z-2\sqrt{z-1}\right)+z\left(x-2\sqrt{x-1}\right)=x\left(1-\sqrt{y-1}\right)^2+y\left(1-\sqrt{z-1}\right)^2+z\left(1-\sqrt{x-1}\right)^2$
Но все неизвестные могут принимать только неотрицательные значения, откуда и следует ответ.

3. **Ответ.** Нет, не может. **Решение.** Пусть данный трёхчлен $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$). В силу условия $4ac>b^2$ и $(b+1)^2\geq 4(a+1)(c+1)$. Если бы при этом выполнялось неравенство

   $(b-1)^2\geq 4(a-1)(c-1)$, то, складывая два последних неравенства, мы получили бы: $b^2+1\geq 4ac+4$, что противоречит первому неравенству.

4. **Решение.** Перепишем равенство $KB\times PC=PM\times BC$ в виде $KB/BC=PM/PC$. Тогда по теореме синусов для треугольников BKC и PMC имеем $\sin KCB/\sin BKC = \sin PCM/\sin PMC$. Числители дробей равны, значит $\sin BKC = \sin PMC$, т.е. углы BKC и PMC либо равны, либо $BKC+PMC=180^0$. В первом случае четырехугольник $BKMP$ является вписанным, во втором случае – четырехугольник $AKMC$ является вписанным.

5. **Ответ.** Нельзя. **Решение.** Пересечение плоскости с квадратиком — отрезок ненулевой длины. Эти отрезки образуют замкнутую ломаную. Представим себе ползущего по этой ломаной таракана. Выползая из квадратика, он пересекает либо ребро куба, либо одну из плоскостей, параллельных какой-то грани куба и содержащей стороны квадратика. Всего таких плоскостей $3\cdot 7=21$, и каждую плоскость таракан пересекает не более двух раз (две различные плоскости не могут иметь три общие точки). При этом плоскость сечения пересекает не более 6 рёбер (отрезки между такими пересечениями - это пересечение плоскости с гранью, а граней всего 6). Значит, число квадратиков через которые прошёл таракан, не превосходит $6+2\cdot 21=48$.

6. **Ответ.** Да, существует. **Решение.** Рассмотрим ряд 1, 2, 3, 7, 43… (каждое последующее число получается прибавлением единицы к произведению всех предшествующих, всего 2002 члена). Для любых чисел $a>b>1$ из этого ряда тройка $(a,b,1)$ – воодушевляющая, а остальные тройки воодушевляющими не являются. Всего таких троек $2001\times 2000/2$. Добавим к ряду 2003-е число вида $2x+1$, где $x+1$ – 2002-е число. Тогда все старые воодушевляющие тройки остаются таковыми, и к ним добавляются тройки вида $(2x+1,b,1)$, где $x+1>b>1$ (поскольку число x делится на число b). А тройка $(2x+1,\ x+1,1)$ и тройки, у которых третье число отлично от 1, одушевляющими не являются. Значит в новом ряду число одушевляющих троек равно $\dfrac{2001\cdot 2000}{2}+2000=1000\cdot 2003$, что и требовалось.

www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html