МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

8 класс

1. Все люди на планете делятся на взрослых и детей. При этом детей - 20% населения. Васе сказали, что он входит в 5% самых начитанных взрослых, и в 10% самых начитанных людей. Какой процент всех детей не менее начитанны, чем Вася? *(Кукина Е.Г.)*

2. В компьютерной игре "Heroes of Might & Magic" Вася начал осаду замка. Изначально в отряде Васи был 1 эльф-лучник, а в замке - 2025 привидений. Каждый эльф за один ход поражает 45 привидений. Темный Волшебник в осажденном замке в конце каждого хода разделяет каждое из оставшихся привидений на два. Но и Вася не лыком шит, у него есть легендарный предмет, позволяющий каждому эльфу в отряде призвать ещё одного эльфа-лучника в конце хода. Падёт ли замок? И если да, то через сколько ходов? *(Крюк М.В.)*

3. Вера и Ника живут в одном доме. Вера говорит:
- Я живу во втором подъезде на втором этаже, и квартира у меня – номер 22.
Ника говорит:
- А моя квартира номер 33, я живу на третьем сверху этаже и подъезд мой третий, если считать с другой стороны.
Сколько квартир в доме?
(Все этажи и все подъезды абсолютно идентичны между собой). *(Кукина Е.Г.)*

4. В параллелограмме *ABCD* точка *M* - середина *AB*. Биссектриса угла *ABC* пересекает сторону *CD* в точке *N*. Оказалось, что *CM* и *BN* перпендикулярны. Докажите, что *AN* - биссектриса угла *DAB*. (*По материалам эстонских олимпиад. Штерн А.С.)*

5. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого числа. Пара последовательных натуральных чисел называется странной, если наибольший собственный делитель меньшего из этих чисел на 1 больше наименьшего собственного делителя большего из них. Найдите все пары странных чисел. (*Штерн А.С.)*

6. Клетчатую полоску 1x2025 разрезали по границам клеток на прямоугольники длиной не более 45 (среди прямоугольников есть неодинаковые). Обязательно ли из частей можно сложить квадрат 45x45? *(Шаповалов А.В.)*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

9 класс

1. Вася проезжает круг трека за 1 минуту, а Петя - за 2. Мальчики стартуют одновременно из одной точки, но в разные стороны. Однако в дальнейшем, как только они встречаются (навстречу или вдогонку), Петя мгновенно разворачивается и едет в другую сторону. Сколько пройдет времени до того момента, как они впервые оба одновременно окажутся в точке старта? *(Мещеряков Е.А.)*

2. Вера говорит:
– Я живу во втором подъезде на втором этаже, и квартира у меня – номер 22.
Ника говорит:
– А я, а я живу на третьем этаже в третьем подъезде – и моя квартира номер 33.
Может ли оказаться так, что Вера и Ника живут в одном доме?
(Все этажи и все подъезды в одном доме абсолютно идентичны между собой).
(Кукина Е.Г.)

3. Найдётся ли 2025-значное число из нечётных цифр, кратное 2025? (*Шаповалов А.В.)*

4. На доске написано выражение $*x^2+*x+*$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на числа, отличные от нуля. Петя начинает и хочет добиться, чтобы получился квадратный трёхчлен, у которого точки пересечения с осями координат образуют прямоугольный треугольник. Сможет ли Вася ему помешать? *(Штерн А.С.)*

5. Пусть ABC - неравносторонний треугольник. Точка A_1 - это точка пересечения биссектрис внешних углов B и C, B_1 - точка пересечения биссектрис внешних углов A и C, C_1 - точка пересечения биссектрис внешних углов A и B. Может ли треугольник ABC быть подобным треугольнику $A_1B_1C_1$? (*Мещеряков Е.А.)*

6. На одном острове было n (n>3) городов. Однажды король острова решил соединить города минимально возможным числом дорог, но так, чтобы при этом из каждого города можно было бы добраться в любой другой не более, чем по двум дорогам. Придворный математик нарисовал план, удовлетворяющий условию Его Величества. Когда он принёс план во дворец, придворный советник подсказал королю, что нужно добавить ещё дороги так, чтобы при закрытии любой из дорог (на ремонт), из каждого города можно было бы всё равно добраться до любого другого не более, чем по двум дорогам. Какое минимальное количество дорог нужно добавить к плану, чтобы условие советника выполнялось? (*Смирнов М.)*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

10-11 класс

1. В компьютерной игре "Heroes of Might & Magic" Вася начал осаду замка. Изначально в отряде Васи был 1 эльф-лучник, а в замке - 2025 привидений. Каждый эльф за один ход поражает 45 привидений. Темный Волшебник в осажденном замке в конце каждого хода разделяет каждое из оставшихся привидений на два. Но и Вася не лыком шит, у него есть легендарный предмет, позволяющий каждому эльфу в отряде призвать ещё одного эльфа-лучника в конце хода. Существует ли такой момент, что в конце двух подряд идущих ходов количество привидений в замке будет равным? *(Крюк М.В.)*

2. Докажите, что существует бесконечно много приведенных квадратных трехчленов, таких, что точки пересечения графика этого трехчлена с осями координат образуют прямоугольный треугольник. *(Штерн А.С.)*

3. $ABCD$ - выпуклый четырехугольник площади 1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно, причем $AA_1:A_1B=k$, $BB_1:B_1C=k$, $CC_1:C_1D=k$, $DD_1:D_1A=k$. Найдите площадь $A_1B_1C_1D_1$. *(Мещеряков Е.А.)*

4. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди четырех (не обязательно различных) натуральных p, q, r, t, удовлетворяющих условию: $pqrt = pq+pr+pt+qr+qt+rt$? *(Смирнов М.)*

5. В ряд стоят вперемешку 100 человек из двух племён, по 50 из каждого племени. Каждый стоящий посчитал, сколько человек стоит между ним и ближайшим соплеменником. Каково наибольшее количество различных чисел среди посчитанных? *(Шаповалов А.В.)*

6. Петя и Вася играют на клетчатом поле NxN из спичек. Играют по очереди, начинает Петя. Каждый игрок в свой ход обязан взять одну из внутренних спичек поля (спички на границе поля брать нельзя). Побеждает тот игрок, после хода которого появится путь из клетки (1,1) в клетку (N,N), не пересекающий спичек. Кто выиграет при правильной игре? (*Боярников Е.А.)*