Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования
Филиал Малого мехмата МГУ в ЦО №218 г. Москвы

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
6 И 7 КЛАССОВ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Москва
28 февраля 2010 года

Результаты Городской устной математической олимпиады будут размещены в сети Интернет на сайте

http://www.mccme.ru/ustn/

Варианты подготовили:

А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, Н. Нетрусова, И. Раскина, А. Сгибнев, А Шаповалов, Д. Шноль

Городская устная математическая олимпиада.
Задачи и решения.

* * *

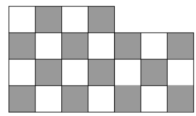
Технический редактор: *А. Горская*

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ
6 класс

Первый тур

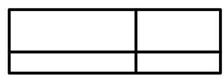
(каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. ЦИНОВКА. У бабушки была клетчатая тряпочка (см. рисунок). Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона — лицевая, а другая — изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).



2. ВМЕСТЕ ВЕСЕЛО ШАГАТЬ. Папа, Маша и Яша вместе идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша посчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?

3. НЕЧЁТНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ. На рисунке справа можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?



Второй тур

(каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. НАКЛЕЙКИ. Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя.

5. И снова ВМЕСТЕ ВЕСЕЛО ШАГАТЬ. Одноклассники Аня, Боря и Вася живут на одной лестничной клетке. В школу они идут с постоянными, но различными скоростями, не оглядываясь и не дожидаясь друг друга. Но если кто-то из них успевает догнать другого, то дальше он замедляется, чтобы идти вместе с тем, кого догнал.

Однажды первой вышла Аня, вторым Боря, третьим Вася, и какие-то двое из них пришли в школу вместе. На следующий день первым вышел Вася, вторым Боря, третьей Аня. Могут ли все трое прийти в школу вместе?

6. УВАЖАЙТЕ СТАРШИХ! На острове Правландия все жители могут ошибаться, но младшие никогда не противоречат старшим, а когда старшие противоречат младшим, они (старшие) не ошибаются. Между жителями А, Б и В произошёл такой разговор:

А: Б — самый высокий.

Б: А — самый высокий.

В: Я выше Б.

Следует ли из этого разговора, что чем моложе человек, тем он выше (для трёх говоривших)?

Третий тур

(каждая задача оценивается в 13 баллов)

7. ПОЧТИ-КВАДРАТЫ. Вася называет прямоугольник, стороны которого отличаются на 1, почти-квадратом. (Например, прямоугольник со сторонами 5 и 6 — это почти-квадрат.) Существует ли почти-квадрат, который можно разрезать на 2010 почти-квадратов?

8. У ПРИРОДЫ НЕТ ПЛОХОЙ ПОГОДЫ. Буратино закопал на Поле Чудес два слитка — золотой и серебряный. В те дни, когда погода хорошая, золотой слиток увеличивается на 30%, а серебряный — на 20%. А в те дни, когда погода плохая, золотой слиток уменьшается на 30%, а серебряный — на 20%. Через неделю оказалось, что один из слитков увеличился, а другой уменьшился. Сколько дней была хорошая погода?

9. УМНЫЕ И ДУРАКИ. В некотором государстве живут граждане трёх типов: а) *дурак* считает всех дураками, а себя умным; б) *скромный умный* про всех знает правильно, а себя считает дураком; в) *уверенный умный* про всех знает правильно, а себя считает умным. В думе — 200 депутатов. Премьер-министр провёл анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По данным анкет он не смог понять ответ. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он заполнил анкету про всю думу, включая себя, и прочитав её, премьер-министр всё понял. Сколько умных могло быть в думе (включая путешественника)?

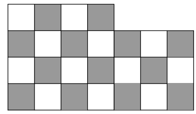
7 класс

Первый тур

(каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. ГОЛОВОЛОМКА. Замените буквы цифрами в ребусе $Г+О = Л - О = В \times О = Л - О = М - К = А$ так, чтобы все равенства стали верными; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а различным — различные. *Найдите все решения ребуса.*

2. ЦИНОВКА. У бабушки была клетчатая тряпочка (см. рисунок). Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона — лицевая, а другая — изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).



3. ОДНОКЛАССНИКИ. Одноклассники Аня, Боря и Вася живут на одной лестничной клетке. В школу они идут с постоянными, но различными скоростями, не оглядываясь и не дожидаясь друг друга. Но если кто-то из них успевает догнать другого, то дальше он замедляется, чтобы идти вместе с тем, кого догнал.

Однажды первой вышла Аня, вторым Боря, третьим Вася, и какие-то двое из них пришли в школу вместе. На следующий день первым вышел Вася, вторым Боря, третьей Аня. Могут ли все трое прийти в школу вместе?

Второй тур

(каждая задача оценивается в 10 баллов)

4. ХОЛОДНАЯ ЗИМА. Просыпаясь каждое утро в 8.30, истопник набивает печку углём до упора. При этом он кладёт ровно 5 кг угля. Каждый вечер, ложась спать (а ложится спать он также в одно и то же время), он опять набивает печку углём до упора и кладёт при этом ровно 7 кг угля. В какое время истопник ложится спать?

5. ЖИЗНЬ ПО ШАБЛОНУ. Петя вырезал из пластмассы неравносторонний треугольник. Покажите, каким образом можно, пользуясь только этим инструментом как шаблоном, построить биссектрису какого-нибудь угла треугольника, равного вырезанному.

6. ПЕРЕИГРОВКИ. В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один — 10 партий, три — по 8 партий и два — по 7 партий. Может ли он оказаться прав?

Третий тур

(каждая задача оценивается в 13 баллов)

7. ПОСЫЛКА. Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы, произвольно чередуя М и П, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдаёт посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

8. СТРАННЫЙ КВАДРАТ. Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2009, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

9. ОСТАНОВКИ. Сеть автобусных маршрутов в пригороде Амстердама устроена так, что: а) на каждом маршруте есть ровно три остановки; б) любые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку. Какое наибольшее количество маршрутов может быть в этом пригороде, если в нем всего 9 остановок?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. Это можно сделать несколькими способами, например, см. рис. 1 или рис. 2.

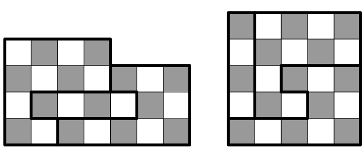


Рис. 1

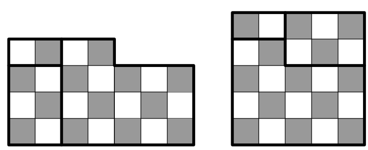


Рис. 2

А. Горская

2. Ответ: 90.

По условию, пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов, значит, пока папа делает 9 шагов, Маша делает 15 шагов. Пока Маша делает 15 шагов, Яша делает 25 шагов (оба числа в 5 раз больше, чем данные в условии задачи). Значит, пока папа делает 9 шагов, Маша с Яшей вместе делают 40 шагов. По условию задачи они вместе прошли 400 шагов, то есть в 10 раз больше, чем 40. Значит, и папа пройдёт в 10 раз больше, то есть 90 шагов.

Д. Шноль

3. Ответ: либо ни одного, либо четыре.

Заметим, что если отрезок разбит на два отрезка с целыми длинами, то возможны два случая: либо все три отрезка имеют чётную длину, либо два отрезка имеют нечётную длину и один — чётную. Если хотя бы по одному из измерений прямоугольника все отрезки — чётной длины, то и все площади чётные. Если же по обеим сторонам есть по два отрезка нечётной длины, то всего будет $2 \times 2 = 4$ нечётные площади.

А. Шаповалов

4. Один из возможных примеров приведён на рисунке 3. Для удобства наклейки изображены на развёртке куба.

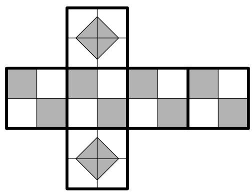


Рис. 3

Д. Шноль

5. Ответ: да, могут.

Пусть Аня ходит медленнее Бори, а Вася намного медленнее их обоих. Тогда в первый день Боря догонит Аню, дальше они пойдут со скоростью Ани, но медленный Вася их все равно не догонит. На следующий день Боря догонит Васю, поэтому дальше они пойдут с его скоростью, после чего их может догнать Аня, ходящая быстрее Васи.

Отметим, что если в первый день в школу пришли вместе Вася и Боря, то Вася ходит быстрее Бори, следовательно, на следующий день Вася пришёл бы в школу в одиночку (Боря его не сумел бы догнать, а Ане пришлось бы сначала догнать Борю, после чего она стала бы идти с его скоростью).

А. Шаповалов

6. Ответ: не следует.

Как Б, так и В противоречат А. Значит, они старше А, то есть А — самый младший. Когда старшие противоречат младшему, они не ошибаются, значит, действительно, А — самый высокий, и В выше Б. Таким образом, мы можем выяснить, что А самый высокий, В — средний по росту, а Б самый низкий. Но кто старше, Б или В, мы по данному разговору узнать не можем (они не противоречат друг другу). Так что могло быть и так, что самый низкий Б мог быть средним по возрасту.

Д. Шноль

7. Ответ: да, существует.

Заметим, что прямоугольник 2×1 — это «простейший» почти-квадрат. Прямоугольники 3×2 и 4×3 легко разбить на почти-квадрат на размер меньше и «рамку» из простейших (см. рис. 4). Эти примеры подсказывают следующую конструкцию: возьмём почти-квадрат 2009×2008, приставим к нему полоску из 1005 простейших почти-квадратов сверху и 1004 справа. Получится почти-квадрат, разбитый на 2010 почти-квадратов.

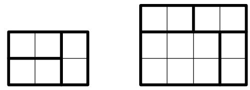


Рис. 4

Д. Шноль

8. Ответ: 4 дня.

Заметим, что увеличение числа на 20% равносильно его умножению на 1,2, а уменьшение числа на 20% — его умножению на 0,8 (для 30% — соответственно на 1,3 и 0,7). Поэтому результат не зависит от чередования хорошей и плохой погоды, а только от количества «хороших» и «плохих» дней.

Теперь заметим, что после одного хорошего и одного плохого дня оба слитка уменьшаются: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96 < 1$ и $1{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}91 < 1$. (*Это утверждение можно доказать для любого количества процентов.*)

Это значит, что после трёх хороших и трёх плохих дней оба слитка уменьшились. Следовательно, хороших дней — не меньше четырёх. Проверкой убеждаемся, что вариант с четырьмя хорошими днями подходит — золотой слиток уменьшается, а серебряный увеличивается. Действительно, $1{,}2^4 \cdot 0{,}8^3 > 1$, а $1{,}3^4 \cdot 0{,}7^3 < 1$. С другой стороны, после двух хороших и одного плохого дня золотой слиток увеличивается. Значит, он увеличивается также после четырёх хороших и двух плохих дней, и тем более после пяти хороших и двух плохих. Таким образом, если хороших дней пять и более, то золотой слиток растёт. Поэтому только при четырёх хороших днях один слиток растёт, а другой уменьшается.

А. Сгибнев

9. Ответ: 1 или 3.

Заметим, что все дураки дадут ответ: «один». Если бы умных в думе было три или больше, то они дали бы ответ: «два» или больше двух и премьер-министр всё бы понял. Значит, умных могло быть 0, 1 или 2.

Рассмотрим все эти случаи. Если умных не было, то все сказали: «один». Если был один умный уверенный, то он тоже сказал: «один», и ситуация не отличима от предыдущей. Если был умный скромный, то он сказал: «ни одного», и эта ситуация отличима. Если было два скромных умных, они сказали: «один», и ситуация не отличима от первой.

Если бы было два уверенных умных, они сказали бы: «два», и ситуация была бы отличима. Наконец, если бы были один уверенный и один скромный умный, то уверенный сказал бы: «два», и ситуация также была бы отличима.

Таким образом, возможны три неразличимых варианта: нет умных, один уверенный умный и два скромных умных. Во всех этих случаях во всех анкетах ответ: «один».

Посмотрим, какие ответы даст опоздавший думец в каждой из этих ситуаций в зависимости от его ума и скромности:

	0 уверенных умных 0 скромных умных	1 уверенный умный 0 скромных умных	0 уверенных умных 2 скромных умных
Дурак	1	1	1
Уверенный	1	2	3
Скромный	0	1	2

Видно, что ответы «1» и «2» встречаются в нескольких клетках, т. е. такие ответы не помогли бы различить ситуации. Зато ответы «0» и «3» встречаются в таблице по одному разу и позволяют сделать однозначный вывод. Значит, опоздавший дал один из этих ответов. В первом случае в думе один умный, во втором — три.

Д. Шноль, А. Сгибнев

7 класс

1. Ответ: $4 + 2 = 8 - 2 = 3 \times 2 = 8 - 2 = 7 - 1 = 6$.

Поскольку различным буквам соответствуют различные цифры, то ни $В$, ни $О$ не равны 1. Следовательно, $А$ — однозначное составное число, которое можно разложить на два различных множителя, поэтому $А \neq 4$ и $А \neq 9$. Следовательно, $А = 6$ или $А = 8$. Если $А = 8$, то тогда $Л$ — не меньше десяти, что невозможно. Следовательно, $А$ равно 6. Осталось рассмотреть два случая:

1) $В = 2$, $О = 3$; 2) $В = 3$, $О = 2$.

В первом случае получим, что $Г$ также равно 3, что невозможно. Во втором случае получаем единственный возможный ответ: $В = 3$, $О = 2$, $Л = 8$, $Г = 4$, $М = 7$, $К = 1$.

Фольклор

2. См. решение задачи 1 в варианте 6 классе.

3. См. решение задачи 5 в варианте 6 классе.

4. Ответ: в 22.30.

Так как утром в печку влезает 5 кг угля, а вечером — уже 7 кг, то за время бодрствования истопника сгорает 7 кг угля (5 кг тех, которые были положены утром, и ещё 2 кг, уже лежавшие в печке). Вечером в печку кладут 7 кг, следовательно, за время сна сгорает 5 кг из них (чтобы утром можно было положить ровно 5 кг угля).

Таким образом, моменты засыпания и пробуждения истопника делят сутки на две части, длины которых относятся как 7 к 5. Пусть $7x$ часов истопник бодрствует, а $5x$ часов — спит. Тогда $12x = 24$, откуда $x = 2$. Таким образом, истопник бодрствует 14 часов, следовательно, он ложится спать в 22 часа 30 минут.

Фольклор

5. Приложим треугольник к бумаге и обведём его. Обозначим нарисованный треугольник ABC ($AB \neq BC$). Затем перевернём треугольник, приложим его так, как показано на рисунке (серым цветом обозначено положение перевёрнутого треугольника) и обведём. Новые точки обозначим через A_1 и C_1. Пусть M — точка пересечения отрезков A_1C_1 и AC. Докажем, что BM — биссектриса угла ABC.

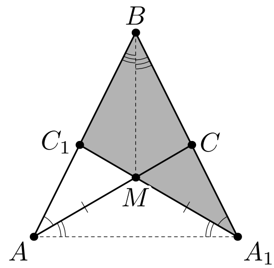


Рис. 5

Из равенства треугольников ABC и A_1BC_1 получим, что $AB = A_1B$ и $\angle BAC = \angle BA_1C_1$. Тогда $\triangle ABA_1$ — равнобедренный, следовательно, $\angle BAA_1 = \angle BA_1A$, кроме того, $\angle MAA_1 = \angle BAA_1 - \angle BAC = \angle BA_1A - \angle BA_1C_1 = \angle MA_1A$. Таким образом, треугольник AMA_1 также равнобедренный, следовательно, $AM = A_1M$. Тогда $\triangle ABM = \triangle A_1BM$ по двум сторонам и углу между ними (кроме того, они равны также и по трем сторонам). Значит, $\angle ABM = \angle A_1BM$, следовательно, BM — биссектриса угла ABC.

Попутно доказано, что BM — ось симметрии фигуры, показанной на рисунке.

Отметим, что от участников олимпиады не требовалось доказывать, что отрезок BM можно нарисовать с помощью данного шаблона (то есть, что хотя бы одна из сторон треугольника ABC больше биссектрисы BM).

А. Блинков, Ю. Блинков

6. Ответ: нет, не может.

Предположим, что Мюнхгаузен оказался прав. Без переигровок каждый участник должен был сыграть по 7 партий — ровно по одному разу с каждым из остальных участников турнира, а переигрывал каждый с каждым не более, чем по одному разу. Рассмотрим микротурнир, состоящий из партий, сыгранных во время переигровок. В нем каждый с каждым сыграли не более, чем по разу, причем двое сыграли по четыре партии (назовем их «лидерами»), один — три, трое — по одной и двое — не играли совсем. При этом «лидеры» между собой сыграли не более одной партии, следовательно, с остальными участниками микротурнира они сыграли не менее шести партий, но остальные участники играли всего шесть партий. То есть, все эти партии они играли с «лидерами», но тогда никто из них не мог сыграть 3 партии.

Отметим, что подобные правила переигровки ничьих практиковались в турнирах в XIX веке.

Р. Женодаров

7. Ответ: да, сможет.

Разделим 11 позиций, на которых будут стоять записанные Печкиным буквы, на три части: первые пять, последние пять и центральная. Матроскину нужно добиться того, чтобы на центрально-симметричных позициях стояли одинаковые буквы (а какая буква стоит в центре — значения не имеет). Поэтому он действует так: пока Печкин ставит первые 6 букв, Матроскин ничего не меняет. Далее, после очередного хода Печкина, Матроскин смотрит, одинаковы ли только что поставленная буква и ей симметричная.

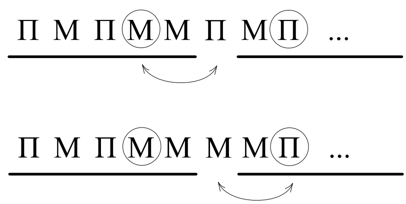


Рис. 6

Если эти буквы одинаковы, то Матроскин ничего не меняет, а если они различны, то он меняет местами одну из них и центральную так, чтобы симметричные буквы стали одинаковыми. Например, см. рис. 6. Действуя таким образом, Матроскин добьётся того, чтобы на симметричных относительно центральной буквы позициях стояли одинаковые буквы, то есть итоговое слово будет читаться одинаково слева направо и справа налево. Следовательно, он получит посылку.

А. Шаповалов

8. Докажем, что найдётся прямоугольник, длина и ширина которого — числа одинаковой чётности (тогда его периметр будет делиться на четыре). Предположим, что это не так, то есть у каждого из прямоугольников длина и ширина выражаются числами разной чётности. Тогда площадь каждого прямоугольника — чётное число, следовательно, и площадь квадрата также должна быть чётным числом, а на самом деле площадь квадрата равна 2009^2. Противоречие.

А. Шаповалов

9. Рассмотрим какую-нибудь остановку A. Определим наибольшее количество маршрутов, проходящих через неё. Кроме A, в городе еще

8 остановок. На каждом маршруте, проходящем через A, есть ещё две остановки. Так как никакие два из этих маршрутов не могут иметь общих остановок, отличных от A, то всего через A может проходить не более, чем $8 : 2 = 4$ маршрута. Занумеруем все остановки и обозначим через a_1 количество маршрутов, проходящих через первую остановку, через a_2 количество маршрутов, проходящих через вторую остановку, $\ldots$, через a_9 количество маршрутов, проходящих через девятую остановку. Так как на каждом маршруте ровно 3 остановки, то $a_1 + \ldots + a_9 = 3n$, где n — общее количество маршрутов. По доказанному выше, каждое слагаемое не больше четырёх. Следовательно, $3n \leqslant 4 \cdot 9 = 36$, то есть, $n \leqslant 12$.

На рисунке 7 изображена схема, удовлетворяющая условию задачи и содержащая 12 маршрутов.

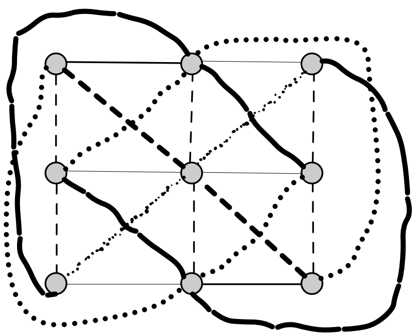


Рис. 7

Комментарий для знатоков.

Известно, что каждая точка плоскости задаётся своими координатами (x, y)*, а прямые на ней задаются уравнениями вида* $ax + by + c = 0$*. Заменим теперь все действительные числа на остатки по модулю* p*: будем называть* $\mathbb{F}_p$-***плоскостью*** *множество пар* (x, y) *остатков по модулю* p*, а прямыми на ней будем называть множества решений сравнения* $ax + by + c \equiv 0 \pmod p$*. Для такой «конечной плоскости» выполнены многие аксиомы обычной геометрии — в частности, условие б) задачи (первый постулат Евклида).*

Нетрудно подсчитать, что на $\mathbb{F}_p$-***плоскости*** *имеется* p^2 *точек и* $p(p+1)$ *прямая, каждая из которых состоит из* p *точек. При* $p = 3$ *такая плоскость и дает пример, приведённый в конце решения.*

Фольклор