XIX Устная математическая олимпиада для 6 – 7 классов
27.03.2022

7 класс

7.1. Крокодилы – бегемоты. В водоёмах некоторой страны водятся крокодилы и бегемоты. В 20% водоёмов с крокодилами есть и бегемоты, в 25% водоёмов с бегемотами есть и крокодилы. 20% водоёмов свободны от животных. Какой процент водоёмов страны составляют те, в которых есть и крокодилы, и бегемоты?

О. Крижановский (Харьковские олимпиады, переформулировано)

Ответ: 10%.

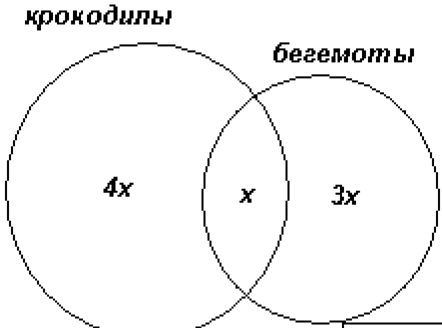


Рис. 7.1

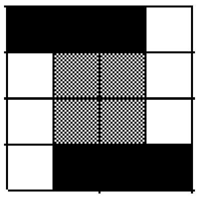
Решение. Пусть количество водоёмов, в которых есть и крокодилы, и бегемоты, равно x. Тогда из условия задачи следует, что количество водоёмов с крокодилами, но без бегемотов равно $5x - x = 4x$, а количество водоёмов с бегемотами, но без крокодилов равно $4x - x = 3x$ (см. рис. 7.1). Значит, количество водоёмов, в которых обитают животные, равно $x + 4x + 3x = 8x$. Так как 20% водоёмов свободны от животных, то общее количество водоёмов равно $8x + 2x = 10x$. Следовательно, водоёмы, в которых есть и крокодилы, и бегемоты, составляют $\frac{x}{10x} = 0{,}1$ от общего количества, то есть 10%.

7.2. Наименьший квадрат. Клетчатый квадрат разбит по клеткам на несколько прямоугольников. Не все прямоугольники равны друг другу, но все имеют равный периметр. Найдите наименьший возможный размер квадрата.

А. Блинков

Ответ: квадрат со стороной 4 клетки.

Рис. 7.2а



Решение. Квадрат 4×4 можно разбить на 4 прямоугольника 1×3 и квадрат 2×2 (периметр каждого равен 8, см. рис. 7.2а), либо на 2 прямоугольника 2×3 и один прямоугольник 1×4 (периметр каждого равен 10, см. рис. 7.2б).

Меньший квадрат разбить в соответствии с условием невозможно. Действительно, периметр прямоугольников разбиения должен быть чётным числом, которое не меньше чем 4. Но клетчатый прямоугольник периметра 4 – это квадрат со стороной 1, а клетчатый прямоугольник периметра 6 – это прямоугольник 1×2, поэтому требуемое разбиение квадратов со стороной 1 или 2 невозможно. Существует ровно два вида клетчатых прямоугольников периметра 8, и они указаны выше. Но квадрат со стороной 3 на них разбить нельзя, так как его площадь равна 9 клеток, а сумма площадей прямоугольника 1×3 и квадрата 2×2 равна 7 клеток. А из прямоугольников периметра 10 в квадрате со стороной 3 помещается только один прямоугольник 2×3.

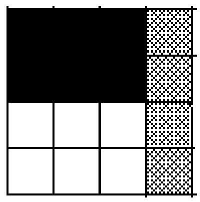


Рис. 7.2б

Оценку можно также провести полным перебором, рассмотрев все возможные разбиения квадратов со сторонами 1, 2 и 3 клетки.

7.3. Числа в таблице. Дана таблица размером 100×100 клеток. Петя выбирает строку и в каждую из её клеток ставит число 1. Затем Вася выбирает столбец и в каждую его свободную клетку ставит число –1. Затем Петя выбирает другую строку и в каждую её свободную клетку ставит 1. И так далее, пока в таблице есть свободные клетки. Чему равна сумма чисел в таблице, заполненной таким образом?

Б. Френкин

Ответ: 100.

Решение. Заметим, что после хода Пети в каждом столбце добавляется одна занятая клетка, а после хода Васи в каждой строке добавляется одна занятая клетка. Поэтому Петя сумеет сделать 100 ходов, а Вася – 99. Первым ходом будет записано 100 единиц, вторым и третьим ходом – по 99 противоположных чисел, четвертым и пятым – по 98 противоположных чисел, и так далее. Таким образом, сумма чисел в таблице равна сумме чисел, записанных Петей первым ходом, то есть равна 100.

Заключительный вывод можно сделать, исходя из других соображений: всего будет сделано 199 ходов и каждым нечетным ходом Петя пишет на одно число больше, чем Вася своим следующим ходом. Значит, Петя напишет на 100 чисел больше и поэтому искомая сумма будет равна 100.

7.4. Одинаковые результаты. На доске записаны четыре последовательных натуральных числа в порядке возрастания. Требуется между каждыми двумя соседними числами поставить знак арифметического действия и вычислить значение полученного выражения. Всегда ли можно сделать это двумя различными способами, дающими одинаковые результаты?

А. Грибалко

Ответ: всегда.

Решение. Пусть записаны числа $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ ($n \geq 2$ – натуральное число). Тогда можно расставить знаки так:

1) $n - 1 + n(n + 1) + (n + 2) = n - 1 + n^2 + n + n + 2 = n^2 + 3n + 1$;

2) $n - 1 - n + (n + 1)(n + 2) = n - 1 - n + n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + 3n + 1$.

Отметим, что если в каждом из этих способов сложение заменить вычитанием, а вычитание заменить сложением, то также получатся одинаковые результаты, а именно, $-n^2 - n - 3$.

7.5. Угол треугольника. Серединный перпендикуляр к стороне остроугольного треугольника делит одну из его высот в отношении 2 : 1, считая от вершины. Найдите один из углов треугольника.

А. Пешнин

Ответ: 60°.

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB, который пересекает высоту BH в точке P, и $BP : PH = 2 : 1$ (см. рис. 7.5а).

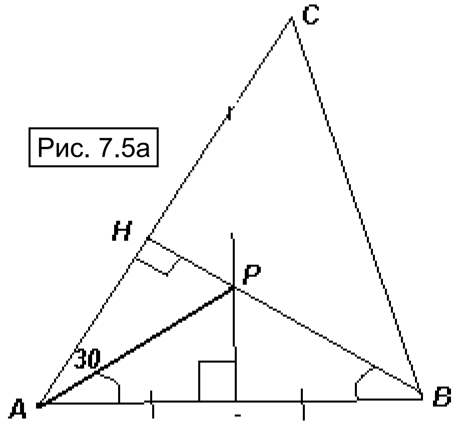


Рис. 7.5а

Проведём отрезок PA, тогда $PA = PB$, так как точка P лежит на серединном перпендикуляре к AB. Значит, $PH = 0{,}5PA$, поэтому в прямоугольном треугольнике APH угол PAH равен 30°. Тогда $\angle APH = 60°$ и этот угол является внешним для равнобедренного треугольника APB. Следовательно, $\angle PAB = \angle PBA = 30°$. Таким образом, $\angle CAB = \angle PAH + \angle PAB = 60°$.

Возможны также рассуждения, использующие факты, выходящие за рамки программы 7 класса, например:

Сохраним обозначения, принятые выше. Пусть также серединный перпендикуляр к AB пересекает прямую AC в точке Q, тогда треугольник AQB равнобедренный, значит, QD – его медиана и высота (см. рис. 7.5б). Докажем, что высота BH этого треугольника также является медианой. Пусть это

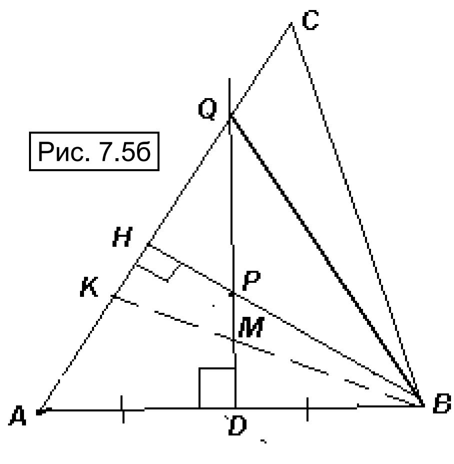


Рис. 7.5б

не так, тогда проведём медиану BK, которая пересечёт QD в некоторой точке M, отличной от P. Так как M – точка пересечения медиан треугольника AQB, то BM : MK = 2 : 1 = BP : PH. Тогда из подобия треугольников PBM и HBK (либо из теоремы, обратной теореме о пропорциональных отрезках для угла HBK) получим, что PM и HK параллельны, а это невозможно. Следовательно, BH – высота и медиана треугольника AQB. Учитывая, что AQ = BQ, получим, что этот треугольник равносторонний, значит, $\angle CAB = 60^\circ$.

7.6. Имеется два набора полосок, в каждом из которых есть по одной полоске с размерами 1×1, 1×2, …, $1\times n$. В первом наборе все полоски красные, а во втором – синие. Требуется, используя некоторые из этих полосок, сложить квадрат размером $n\times n$ так, что все красные полоски горизонтальные, а все синие – вертикальные. Сколькими способами это можно сделать?

А. Грибалко

Ответ: 2^{2n-1}.

Решение. Из полосок каждого набора можно сложить «лесенку» высоты n, а из двух таких «лесенок» – прямоугольник размером $n\times(n + 1)$. Следовательно, при сложении указанного квадрата не используется ровно n клеток. При этом невозможно использовать обе самые длинные полоски, так как они пересекутся. Получается, что неиспользованные клетки – это одна из полосок длины n.

Пусть мы не использовали синюю полоску длины n (этот выбор определяется двумя способами). Тогда красная полоска длины n должна покрывать или самую верхнюю строку квадрата, или самую нижнюю (иначе не сможет быть размещена синяя полоска длины $n - 1$). Это два варианта. Для синей полоски длины $n - 1$ также два варианта размещения (из-за красной полоски длины $n - 1$). Продолжая эти рассуждения, получим, что для каждой из используемых $2n - 1$ полосок, кроме последней, есть два варианта, а для последней – один. Следовательно, всего вариантов 2^{2n-1}.

7.7. Сумма в квадрате. В клетки таблицы размером 4×4 расставляют числа от 1 до 16. На какое наибольшее натуральное число может делиться сумма чисел в каждом квадрате размером 2×2?

Н. Наконечный

Ответ: 34.

Решение. Оценка. Сумма всех чисел в таблице равна 1 + 2 + … + 16 = 136. Так как квадрат размером 4×4 разбивается на четыре квадрата размером 2×2, то хотя бы в одном из них сумма чисел не превосходит 136 : 4 = 34.

Пример. См. рис. 7.7 а – в.

1	8	10	15
14	11	5	4
7	2	16	9
12	13	3	6

Рис. 7.7а

1	8	13	12
15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7

Рис. 7.7б

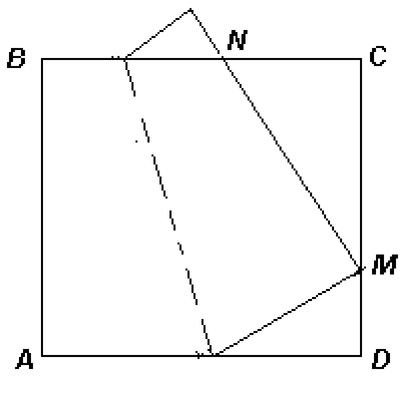
1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7

Рис. 7.7в

Эти примеры носят названия пандиагональных или дьявольских магических квадратов 4-го порядка. Другие примеры можно из них получить, используя повороты вокруг центра квадрата, отражения относительно его осей симметрии, либо меняя местами строки или столбцы таблицы, а также комбинируя эти преобразования.

7.8. Квадрат. Бумажный квадрат $ABCD$ перегнули по прямой так, что вершина A совпала с внутренней точкой M стороны CD, а сторона AB (в новом положении) пересекла сторону BC в точке N (см. рисунок). Найдите угол MAN.

А. Блинков



Ответ: 45°.

Решение. Точку линии сгиба, лежащую на стороне AD, обозначим через K, тогда из условия следует, что $AK = MK$. Проведя отрезок AM, получим: $\angle MAK = \angle AMK$ (см. рис. 7.8). Опустим перпендикуляр AP на прямую MN. Так как $\angle KMN = \angle KAB = 90°$, то $AP \parallel KM$, поэтому $\angle PAM = \angle AMK$. Таким образом, $\angle PAM = \angle DAM$, откуда следует равенство прямоугольных треугольников PAM и DAM (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AP = AD = AB$. Тогда, проведя отрезок AN, получим равенство прямоугольных треугольников ABN и APN (по гипотенузе и катету), откуда следует, что $\angle PAN = \angle BAN$. Таким образом, $\angle MAN = 0{,}5\angle BAD = 45°$.

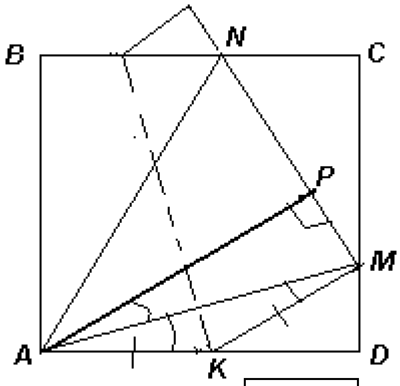


Рис. 7.8

Из доказанного также следует, что точка A является центром вневписанной окружности треугольника MCN, а полупериметр этого треугольника равен стороне квадрата.

7.9. Царь и придворный ювелир. У царя есть 12 различных украшений из чистого золота. Царь и ювелир знают, что украшения весят 28, 29, 30, ..., 39 граммов, но только ювелир помнит, какое украшение сколько весит. Царь не доверяет ювелиру и считает, что тот всё напутал. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь ювелир сможет доказать царю, что выбранное им украшение действительно весит 39 граммов?

М. Евдокимов

Ответ: за два взвешивания.

Решение. Если на одну чашу весов положить четыре украшения, весящие 36, 37, 38 и 39 граммов, а на другую – пять украшений: 28, 29, 30, 31 и 32 грамма, то весы будут в равновесии. Так как это единственный способ уравновесить группы из четырёх и из пяти украшений, то ювелир убедит царя в распределении украшений на три группы: 28 – 32, 33 – 35 и 36 – 39. Далее можно действовать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Второе взвешивание: 39 + 31 + 32 и 33 + 34 + 35, что опять даст равенство. Так как на одной чаше весов – вторая группа целиком, то царь знает суммарный вес украшений на этой чаше (102 г). При этом уравновесить вторую группу двумя украшениями из первой группы и одним украшением из третьей группы можно только одним способом (во всех остальных случаях чаша, на которой лежит группа 33 – 35, перевесит). Тем самым ювелир сможет доказать, что выбранное им украшение из третьей группы действительно весит 39 г.

<u>Второй способ</u>. Вторым взвешиванием ювелир кладет на левую чашу 36 + 37, а на правую – 35 + 39. Правая чаша перевесит, но на левой чаше наименьший возможный суммарный вес для такого набора (два украшения из третьей группы), а на правой – наибольший возможный для своего набора (по одному украшению из второй и третьей групп). Значит, правая чаша могла перевесить только для указанных весов. Заметим, что при таком взвешивании ювелир также убедит царя, что украшения весом 35 г и 38 г действительно столько весят.

Одним взвешиванием обойтись нельзя, так как украшение, весящее 39 г, тяжелее любого одного украшения, но легче суммы любых двух, что не даёт возможность его опознать при таких взвешиваниях. Если вместе с этим украшением на ту же чашу весов положить другие, то при любом результате взвешивания украшения на этой чаше весов неразличимы. Если же отложить украшение 39 г и взвесить остальные украшения, то никакой результат взвешивания, не позволит его отличить. Действительно, если мы вместе с этим украшением отложим еще какое-нибудь, то не сможем различить их. А если отложить только его, то из 11 остальных украшений хотя бы 6 попадут на одну чашу весов и гарантированно перевесят, поэтому такое взвешивание не даст никакой информации.

6 класс

6.1. Крокодилы – бегемоты. В водоемах некоторой страны водятся крокодилы и бегемоты. В 20% водоемов с крокодилами есть и бегемоты, в 25% водоемов с бегемотами есть и крокодилы. 20% водоемов свободны от животных. Какой процент водоемов страны составляют те, в которых есть и крокодилы, и бегемоты?

О. Крижановский (Харьковские олимпиады, переформулировано)

См. решение задачи 7.1.

6.2. Наименьший квадрат. Клетчатый квадрат разбит по клеткам на несколько прямоугольников. Не все прямоугольники равны друг другу, но все имеют равный периметр. Найдите наименьший возможный размер квадрата.

А. Блинков

См. решение задачи 7.2.

6.3. Числа в таблице. Дана таблица размером 100×100 клеток. Петя выбирает строку и в каждую из её клеток ставит число 1. Затем Вася выбирает столбец и в каждую его свободную клетку ставит число –1. Затем Петя выбирает другую строку и в каждую её свободную клетку ставит 1. И так далее, пока в таблице есть свободные клетки. Чему равна сумма чисел в таблице, заполненной таким образом?

Б. Френкин

См. решение задачи 7.3.

6.4. Получить 2022. На доске записаны числа 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Поставьте между некоторыми из них знаки «+» и «–» так, чтобы значение получившегося выражения было равно 2022, используя наименьшее количество минусов.

А. Блинков, А. Хачатурян

Ответ: 1234 + 5 – 6 + 789 = 2022.

Решение. Совсем без минусов обойтись нельзя. Это можно объяснить по-разному.

Первый способ. Воспользуемся тем, что число и сумма его цифр в десятичной записи дают одинаковые остатки при делении на 9. Поэтому при любой расстановке плюсов каждое слагаемое будет иметь тот же остаток от деления на 9, что и сумма его цифр. Значит, любая сумма, которая может получиться в итоге, имеет тот же остаток при делении на 9, что и сумма 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, то есть она будет делиться на 9. Так как 2022 не делится на 9, то получим противоречие.

Второй способ. Если расставлять только плюсы, то невозможно использовать только слагаемые, содержащие не более трёх цифр в десятичной записи, так как во всех таких случаях сумма будет меньше чем 2022 (наибольшая возможная сумма: 123 + 456 + 789 = 1368 < 2022).

Единственным четырёхзначным слагаемым может быть только 1234. Если остальные слагаемые содержат не более двух цифр, то сумма также существенно меньше чем 2022. А если среди остальных слагаемых есть трёхзначное число, то легко проверить, что сумма 2022 также не достигается: 1234 + 567 + 8 + 9 < 1234 + 567 + 89 < 1234 + 5 + 678 + 9 = 1926 < 2022, а 1234 + 56 + 789 > 1234 + 5 + 6 + 789 = 2034 > 2022.

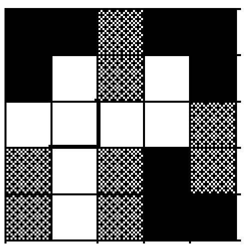
6.5. Разрезание. Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать на трёхклеточные уголки и вертикальные доминошки так, чтобы фигурок каждого вида было поровну?

А. Пешнин

Ответ: можно.

Решение. См. рис. 6.5а (по 5 фигурок каждого вида) и рис. 6.5б (по 20 фигурок).

Рис. 6.5а



Существуют и другие примеры, при этом сторона квадрата должна быть кратна пяти. Действительно, если всего будет k доминошек и k уголков, то ими будет занято 2k + 3k = 5k клеток. Поэтому площадь квадрата должна делиться на 5, значит, и длина его стороны должна делиться на 5.

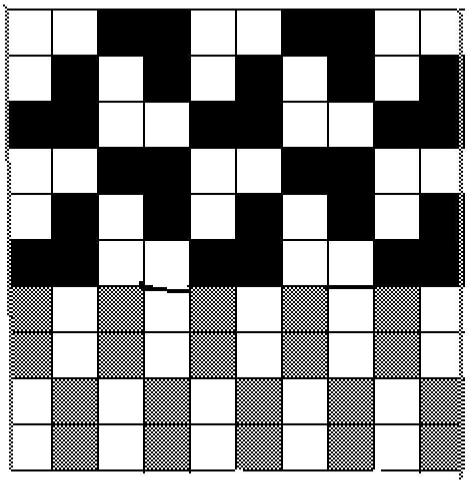


Рис. 6.5б

6.6. Дорожка. Дорожка в саду выложена в два ряда несколькими прямоугольными плитками. Ширина всех плиток одинаковая, а длина может различаться. Требуется раскрасить эти плитки так, чтобы плитки одного цвета не имели общих отрезков границы. Какого наименьшего числа цветов для этого хватит?

Олимпиады г. Свердловска

Ответ: три цвета.
Решение. Заметим, что три цвета потребуются на три плитки в начале (на две плитки, которыми ряды начинаются, и на ту плитку, которая примыкает к более короткой из них). Докажем, что в три цвета можно покрасить, независимо от способа укладки плиток. Будем каждым ходом выбирать более короткий раскрашенный на текущий момент ряд и определять цвет для следующей в нём плитки таким образом, чтобы он не мешал предыдущей раскраске. Поскольку у такой плитки не более двух окрашенных соседей, то это всегда можно сделать.

6.7.Поворот дробей. Для натуральных чисел *a*, *b*, *c* и *d*, среди которых нет одинаковых, выполняется равенство $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{b}{d}-\frac{a}{c}$. Докажите, что произведение чисел *a*, *b*, *c* и *d* является квадратом целого числа.

В. Клепцын

Решение. Приведя обе части равенства к общему знаменателю, получим: $\frac{ad-bc}{bd} = \frac{bc-ad}{cd}$. Так как числители дробей противоположны, то равенство возможно только в случае, когда $ad = bc$. Значит, $abcd = (ad)^2 = (bc)^2$, что и требовалось.

6.8. Имеется два набора полосок, в каждом из которых есть по одной полоске с размерами 1×1, 1×2, …, 1×10. В первом наборе все полоски красные, а во втором – синие. Требуется, используя некоторые из этих полосок, сложить квадрат размером 10×10 так, что все красные полоски горизонтальные, а все синие – вертикальные. Сколькими способами это можно сделать?

А. Грибалко

Ответ: 2^{19}.
См. решение задачи 7.6.

6.9. Царь и придворный ювелир. У царя есть 12 различных украшений из чистого золота. Царь и ювелир знают, что украшения весят 28, 29, 30, ..., 39 граммов, но только ювелир помнит, какое украшение сколько весит. Царь не доверяет ювелиру и считает, что тот всё напутал. Сможет ли ювелир за два взвешивания на чашечных весах без гирь доказать царю, что выбранное им украшение действительно весит 39 граммов?

М. Евдокимов

Ответ: сможет.

См. решение задачи 7.9 (без оценки минимальности количества взвешиваний).