Математические турниры имени А. П. Савина

Цель нашей жизни столь бесспорна,
что зря не мучайся, приятель:
мы сеем будущего зёрна,
а что взойдёт — решит Создатель.
И. Губерман

Заочный конкурс «Математика 6–8» появился по поддержанной А.П. Савиным (1932–1998) инициативе С.И. Токарева на страницах «Кванта» в 1990 году, заполнив нишу между увлекательным, но довольно простым «“Квантом” для младших школьников» и очень трудным «Задачником “Кванта”». Сначала конкурс был только заочным; с 1993 года появился очный летний тур, которым до 2001 года руководил С.И. Токарев.

Здесь собраны наиболее интересные задачи 1990–1999 годов и довольно многие задачи 2000–2005 годов. Задачи довольно трудны и требуют немалой изобретательности от решающего; однако для победы над ними, как правило, достаточно обладать математическим багажом восьмиклассника. (Впрочем, были и случаи успешного участия в турнире шестиклассников. С 2002 года в очном турнире участвуют девятиклассники.) Многие задачи требуют не только находчивости, но и настойчивости, умения довести идею до решения, безошибочно перебрать немалое число вариантов (заметьте: такие задачи редки не только на уроках, но и на олимпиадах!).

Отличительной особенностью турниров, прошедших под руководством С.И. Токарева и В.В. Произволова, была доброжелательная атмосфера, благодаря которой школьники — даже те, кто решил мало задач,— уезжали с тех турниров, вспоминая не баллы, а математические красоты, победы не над людьми, а над задачами. В турнирах участвовали команды многих городов России, Украины, Белоруссии. В последние годы широко представлены школы Москвы, а провинциальных команд стало значительно меньше.

Хотя коллектив авторов задач довольно многочисленен, основной вклад внесла энергичная группа энтузиастов: И.Ф. Акулич, С.Г. Волчёнков, Р.Г. Женодаров, А.В. Жуков (принявший в 1997 году после смерти Анатолия Павловича руководство «Квантом для младших школьников» и «Математикой 6–8»), Д.А. Калинин, В.В. Произволов (с 1997 по 2003 годы — председатель жюри), С.И. Токарев (организатор летних турниров вплоть до 2001 года) и А.В. Шаповалов.

Что такое математический бой?

Бой начинается с конкурса капитанов. Победитель принимает решение, желает или нет его команда вызвать соперника на первый раунд. Обычно предпочитают, чтобы первой вызывала команда, проигравшая бой капитанов, но бывает и наоборот.

Вызванная команда может поступить двояко. Первый способ — принять вызов. Тогда команда выставляет докладчика, который выходит к доске, а вызвавшая команда — оппонента. Докладчик рассказывает решение задачи. Жюри старается не вмешиваться, задавая лишь уточняющие вопросы, а оппонент, по договорённости с докладчиком, задаёт вопросы либо по ходу изложения, либо все вместе — после доклада. Когда вопросы заданы и ответы получены, оппонент говорит, считает ли он решение верным, а также какие неточности он заметил.

Если оппонент в основном согласился с докладчиком, то жюри далее само беседует с докладчиком. Если решение безошибочное, то команда докладчика получает 12 баллов;

при наличии недочётов и ошибок несколько баллов могут быть сняты: чаще всего снимают 1–2 балла за неудачный рассказ или 5–7 баллов — если выяснилось, что команда решила не всю задачу, а примерно половину. Если решение неверно (даже когда это не заметил оппонент), то жюри чаще всего не даёт докладчику ни одного балла, хотя может и расщедриться при наличии в докладе разумных идей.

Если же оппонент не соглашается с докладчиком, то жюри или прерывает оппонирование, когда критика не по существу, или же поддерживает. За обнаружение «дыры», которую докладчик не сумеет «заделать», оппонент сразу же получает 6 баллов. Более того, в этом случае жюри спрашивает оппонента, не может ли он сам «заделать» дыру или изложить другое решение задачи. (Заметьте: пока решение докладчика не было опровергнуто, оппонент не имел права рассказывать своё решение, даже если оно гораздо проще.) В случае согласия оппонента он меняется ролями с докладчиком. В результате бывший оппонент может заработать и оставшиеся 6 баллов (то есть в сумме 12), но может и меньше, если в его решении будут обнаружены недочёты. Впрочем, бывший докладчик, оппонируя, может на этом набирать очки.

Если же вызов не был принят, то происходит проверка корректности вызова. Идея в том, что вызванная команда отказывается рассказывать решение задачи, а вместо этого проверяет, решила ли её вызвавшая команда. В таком случае вызывающая команда выставляет докладчика, а вызываемая — оппонента. Далее бой идёт по уже известным нам правилам. Если вызов оказался корректным (то есть докладчик вызвавшей команды представил верное решение), то следующий вызов, согласно порядку очерёдности, делает вызванная команда. Если же вызов некорректен, то очередной вызов должна делать та же команда. Это — одно из важнейших правил матбоя, которое заставляет капитанов осторожно относиться к вызовам и карает тех, кто вызывает противника на задачи, которые сам не умеет решать.

Никакому игроку не позволено выходить к доске (безразлично, в качестве оппонента или докладчика) более двух раз.

Если докладчик или оппонент путается в рассуждениях или вообще пошёл не тем путём, то его команда (устами капитана) имеет право в любой момент взять 30-секундный перерыв, чтобы помочь своему товарищу. (Соперник в это время тоже может совещаться со своей командой.) Общее количество таких 30-секундных перерывов ни у какой команды не может превысить шести. Команда в любой момент может заменить своего выступающего, но это считается равносильным использованию двух перерывов. (Типичная ситуация: команда берёт перерыв, во время которого капитан понимает, что этого выступающего лучше заменить; в таком случае происходит замена ценой двух перерывов — только что взятого и ещё одного.)

Начиная с некоторого момента, у одной из команд может кончиться запас решённых задач. Тогда команда может отказаться от дальнейших вызовов. В этом случае соперники могут выставлять докладчиков на любые не рассмотренные ранее задачи, а команда, отказавшаяся от вызова, зарабатывает очки за счёт оппонирования.

Победителем по итогам боя считают команду, набравшую больше очков. При этом, как правило, заранее устанавливают некоторую разницу баллов (обычно 2 или 3), которую надо преодолеть для победы.

Таковы основные правила математических боёв. Этот вид состязаний — прекрасная школа для приобретения навыков не только решения задач, но и (что не менее важно!) внятного изложения своих мыслей, умения спорить, видеть свои и чужие ошибки. Во время матбоёв развиваются навыки коллективной работы. Особенно ответственна и поучительна роль капитана команды: он не только сам решает задачи, но и распределяет усилия своих товарищей, чтобы было решено как можно больше задач, а все решения были тщательно проверены.

Избранные задачи 1990–1999 годов

1. На каждом километре шоссе между сёлами Ёлкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Ёлкино, а на другой — до Палкино. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Каково расстояние от Ёлкино до Палкино?

А. Шаповалов

2. Существуют ли 1995 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению?

3. На шахматной доске расставлены фигуры так, что на каждой горизонтали, как и на любой вертикали, стоит а) не менее двух фигур; б) ровно две фигуры. В любом ли случае можно снять с доски несколько фигур, оставив на каждой горизонтали и на каждой вертикали по одной фигуре?

В. Произволов

4. Если $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$, то $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. Докажите это.

В. Произволов

5. Нетрудно проверить, что 2 делится на 2^1, $3\cdot 4$ делится на 2^2, $4\cdot 5\cdot 6$ — на 2^3, $5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$ — на 2^4, а $6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$ — на 2^5. Сформулируйте и докажите общее утверждение.

6. Вычеркните из произведения $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 100!$ один из ста факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа.

С. Токарев

7. Из бумажного прямоугольника вырезали два одинаковых круга. Проведите прямую, делящую полученную фигуру на две части равной площади.

В. Произволов

8. Вертикали и горизонтали шахматной доски занумерованы снизу вверх и слева направо числами от 1 до 8. На доске стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Для каждой ладьи вычислим произведение номеров вертикали и горизонтали, на которых она стоит. Сложим эти произведения. Докажите, что для расстановки ладей, центрально-симметричной данной, аналогичная сумма равна первоначальной.

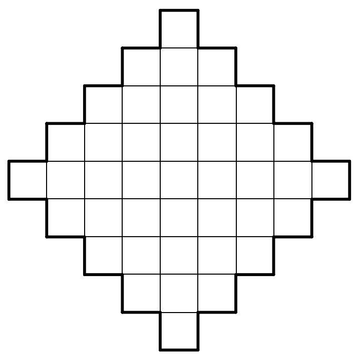
В. Произволов

9. Заполненную числами таблицу размером 3×3 называют магическим квадратом, если сумма чисел каждой горизонтали, каждой вертикали и каждой диагонали одна и та же. Докажите, что сумма квадратов чисел верхней строки магического квадрата равна сумме квадратов чисел его нижней строки.

А. Швецов

10. а) На листе клетчатой бумаги отмечены 100 узлов — вершины клеток, образующих квадрат 9×9. Два игрока по очереди соединяют вертикальным или горизонтальным отрезком два соседних отмеченных угла. Игрок, после хода которого образуется один или несколько квадратиков, закрашивает их в свой цвет. Выигрывает тот, кто закрасил больше квадратиков. Придумайте для второго игрока выигрышную стратегию.

С. Савчев



б) Внешняя граница доски, изображённой на рисунке, нарисована толстыми линиями, а внутренние отрезки —

тонкими. Двое ходят по очереди. Каждый ход — превращение одного тонкого единичного отрезка в толстый. Если вся граница некоторой клетки (или двух клеток) становится толстой, то на этой клетке (клетках) ставят крестик (крестики), если это произошло после хода первого игрока, и нолик (нолики) — после хода второго игрока. Может ли второй игрок действовать так, чтобы к концу игры ноликов оказалось больше, чем крестиков?

М. Ахмеджанова

11. Андрей раскладывает 200 спичек на 6 разных кучек. Затем Боря уравнивает количества спичек в некоторых двух кучках, беря несколько спичек из большей из них. Боря стремится взять как можно меньше спичек. Сколько спичек может Андрей заставить взять Борю?

Х. Хаимов

12. Лист бумаги можно разрезать на 6 или 12 частей. Каждый новый кусок можно разрезать на 6 или 12 частей или оставить целым и так далее. а) Можно ли таким образом разрезать лист на 40 частей? б) Докажите, что таким образом можно получить любое число частей, большее 40.

А. Савин

13. У лифта на первом этаже 18-этажного дома собрались 17 министров, которым нужно подняться вверх, причём на разные этажи. Лифтёр согласен сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше пусть они идут пешком. Лифт способен вместить всех министров. Все министры с одинаковым неудовольствием спускаются вниз на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком вверх на один этаж. Какой этаж нужно выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

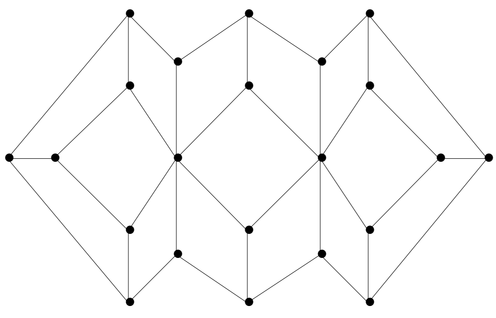
И. Акулич

14. Можно ли в таблице 13×13 отметить некоторые клетки так, чтобы а) любая; б) любая неотмеченная клетка таблицы граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой?

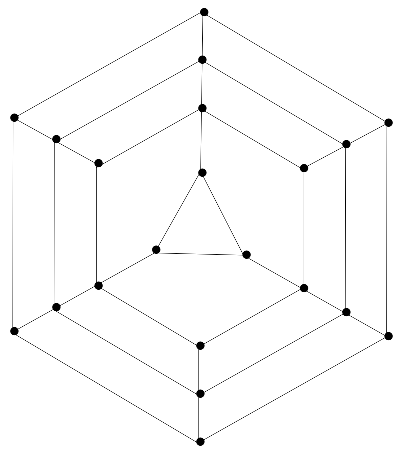
С. Токарев

15. Схема городов и дорог в некотором государстве изображена на рисунке. Можно ли обойти все города, побывав в каждом из них по одному разу?

С. Волчёнков



а)



б)

16. Каждая из расположенных по кругу 12 ламп может находиться в одном из двух состояний: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трёх ламп, расположенных подряд. Вначале горит только одна лампа. Можно ли добиться того, чтобы горели все 12 ламп?

17. Назовём дистанцией между двумя многоугольниками площадь их симметрической разности, то есть сумму их площадей, уменьшенную на удвоенную площадь их пересечения. Докажите, что для любых трёх многоугольников дистанция между первым и третьим из них не превышает суммы дистанции между первым и вторым и дистации между вторым и третьим.

А. Савин

18. В левой части равенства $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10=7$ расставьте скобки так, чтобы оно стало верным.

С. Токарев

19. Какие натуральные числа не представимы в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел?

20. Число 1995 можно представить в виде суммы последовательных натуральных чисел несколькими способами, например, $1995 = 997 + 998 = 664 + 665 + 666 = 330 + {} + 331 + 332 + 333 + 334 + 335$. Найдите представление, в котором наибольшее число слагаемых.

21. Рассмотрим число, записываемое в десятичной системе счисления n девятками. Найдите сумму цифр куба этого числа. (*Указание.* $9^3 = 729$, $99^3 = 970\,299$, $999^3 = 997\,002\,999$.)

П. Филевич

22. Существует бесконечно много натуральных чисел, не оканчивающихся нулём, сумма цифр каждого из которых равна сумме цифр его квадрата. Докажите это.

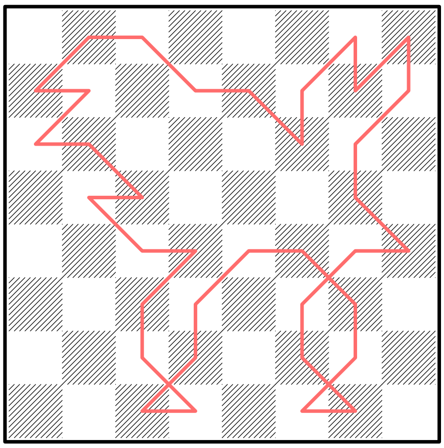
Л. Курляндчик

23. На доске записаны в ряд числа 1, 2, ..., 1995. Сначала стирают с доски все нечётные числа. Из оставшихся стирают все числа, оказавшиеся на чётных местах. Затем снова стирают числа, оказавшиеся на нечётных местах, и так далее, пока не останется одно число. Какое?

И. Акулич

24. На рисунке изображен маршрут короля, чередовавшего диагональные ходы с недиагональными.
а) Нарисуйте такой замкнутый маршрут, проходящий по всем клеткам доски по одному разу.
б) Существует ли такой маршрут для доски размером 9×9?

С. Токарев



25. Число а) $1991 \cdot 1993 \cdot 1995 \cdot 1997 + 16$;
б) $1994 \cdot 1995 \cdot 1996 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000 + 36$;
в) $1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$ является квадратом натурального числа. Докажите это.

В. Произволов

26. Число $1993 \cdot 1995^3 - 1994 \cdot 1992^3$ является кубом целого числа. Докажите это.

С. Токарев

27. а) Пусть $a_1 = 1799$, $a_2 = 1828$ и $a_{n+2} = (a_{n+1} + 1)/a_n$ для любого натурального числа n. Найдите a_{1997}.

К. Гаусс

б)* Пусть $b_1 = 1$, $b_2 = 22$, $b_3 = 333$ и $b_{n+3} = (1 + b_{n+2} + b_{n+1})/b_n$ для любого натурального числа n. Найдите b_{2001}.

Г. Тодд

28. Палиндромом назовём слово, которое не меняется, если его прочесть в противоположном направлении (например, КАЗАК, ШАЛАШ, БОБ). Пусть задано слово из 1995 букв, в котором есть только буквы А и Б. Докажите, что это слово можно разбить не более чем на 800 палиндромов.

И. Акулич

29. а) Двенадцать дипломатов совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что найдутся такие два дипломата, что между ними (считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз оказалось столько же собеседников, что и в первый раз. б) А если дипломатов 13, а не 12?

В. Произволов

30. Имеется неограниченный запас монет в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и в 1 рубль. Докажите, что если можно заплатить m копеек n монетами, то n рублей можно уплатить m монетами.

Ф. Назаров

31. Калиф Гарун-аль-Рашид одарил троих придворных астрологов десятью кошельками. Сев подсчитывать доход, они обнаружили, что один из кошельков пуст, во втором лежит одна таньга, в третьем — две и так далее до десятого, в котором девять таньга. Гусейн Гуслия взял себе два кошелька. Абдурахман ибн Хоттаб и его брат Омар Юсуф поделили оставшиеся кошельки так, что более заслуженный и умудрённый годами Абдурахман получил бóльшую сумму денег. По дороге на Омара Юсуфа напали разбойники и отняли четыре кошелька, так что у него от подарка калифа осталось лишь 10 таньга. Какие кошельки достались Гусейну Гуслия?

И. Акулич

32. Гавиал, бегемот, пеликан и кашалот съели в общей сложности 37 рыб. Кашалот съел больше, чем пеликан, причём во столько же раз, во сколько раз пеликан съел больше гавиала. Сколько рыб съел гавиал, а сколько пеликан?

И. Акулич

33. В футбольном турнире участвовали а) 17; б) 16; в) 15 команд. Могло ли случиться, что каждые две команды сыграли один раз и у каждой команды число её побед оказалось равно числу её ничьих?

С. Токарев

34. Существует ли число, сумма цифр которого равна 11, которое оканчивается цифрами 11 и делится на 11?

И. Акулич

35. а) В таблице размером 6×6 расставлены числа так, что сумма чисел каждой из 22 диагоналей, состоящих из 6, 5, 4, 3, 2 или даже из 1 клетки, одна и та же. Докажите, что эта сумма равна 0.
б) Верно ли аналогичное утверждение для таблицы размером 5×5?

С. Токарев

36*. Компания из восьми человек семь раз садилась за круглый стол. Могло ли случиться, что любые двое при этом дважды сидели рядом?

С. Токарев

37. а) Отметьте центры 16 клеток шахматной доски, чтобы никакие три отмеченные точки не лежали на одной прямой.
б)* Расставьте на шахматной доске 4 ферзя, 4 слона и 4 короля, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую.

А. Грибалко

38. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 1995, в десятичной записи которого любые две цифры, стоящие через одну, одинаковы.

С. Токарев

39. В прямоугольном зале в 10 рядах по 10 кресел в каждом сидят 100 чиновников, получающих разные зарплаты. Чиновник считает себя высокооплачиваемым, если, опросив всех соседей (справа, слева, спереди, сзади и по диагоналям), он убеждается, что зарплату больше его получает не более чем один из соседей. Какое наибольшее число чиновников могут считать себя высокооплачиваемыми?

А. Шаповалов

40. Можно ли разрезать квадрат на тысячеугольник и 199 пятиугольников?

А. Шаповалов

41. Каждая из клеток квадрата 5×5 покрашена в красный, жёлтый, зелёный или синий цвет так, что в любом квадрате 2×2 встречаются все четыре цвета. Найдите наибольшее возможное число клеток синего цвета.

Р. Женодаров

42. Раскрасьте клетки квадрата 3×3 в наибольшее число цветов (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы для любых двух цветов нашлись две клетки этих цветов, имеющие общую сторону.

С. Токарев

43. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 4×4 (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы в каждом квадрате 2×2 нашлась пара клеток одного цвета?

А. Шаповалов

44. Разрежьте квадрат на треугольники так, чтобы каждый граничил (по отрезку) ровно с тремя другими.

А. Шаповалов

45. На шахматную доску положили 8 доминошек, каждая из которых покрывает две соседние клетки. Докажите, что на доске найдётся квадрат, состоящий из четырёх клеток, ни одна из которых не покрыта доминошкой.

Р. Женодаров

46. В клетках квадратной таблицы 7×7 расставлены числа 0, 1 и -1 так, что сумма чисел любого квадрата 3×3 равна 0. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех чисел таблицы.

О. Крыжановский

47. а) Придумайте натуральное число, которое при делении на любое натуральное число от 2 до 10 включительно даёт остаток, не меньший половины делителя.
б) Найдите наименьшее такое число.

И. Акулич

48. Поля шахматной доски занумерованы, как показано на рисунке. Расставьте на этой доске несколько а) ладей; б)* ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, а сумма номеров полей, на которых они стоят, была наибольшей.

И. Акулич

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

49. Поле для игры в «морской бой» имеет форму квадрата размером 8×8 клеток. На какое наименьшее число клеток надо поставить детекторы, чувствующие принадлежность клетки кораблю, чтобы по показаниям детекторов можно было однозначно определить положение корабля размером 1×4 клетки?

Р. Женодаров

50. В арифметическом ребусе $\text{ДУБ}+\text{ДУБ}+\ldots+\text{ДУБ}=\text{РОЩА}$ требуется разные буквы заменить разными цифрами, одинаковые — одинаковыми. Какое наибольшее число «дубов» может быть в «роще»?

Р. Женодаров

51. При каком наименьшем числе слагаемых возможно равенство $\text{СТУК}+\text{СТУК}+\ldots+\text{СТУК}=\text{АААААА}$? (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

И. Григорьева

52. Найдите сумму величин углов MAN, MBN, MCN, MDN и MEN, нарисованных на клетчатой бумаге так, как показано на рисунке.

В. Произволов

53. Маша называет два различных числа a и b. Вова заменяет две звёздочки в выражении $* \cdot * = *$ на число a, а оставшуюся — на b. Если получится верное равенство, то выиграла Маша, иначе — Вова. Как должна играть Маша, чтобы гарантировать себе победу?

А. Шаповалов

54. Какое наименьшее число коней можно расположить на шахматной доске, чтобы любая белая клетка находилась под боем?

Р. Женодаров

55. Каждому из 1996 учеников школы нравятся ровно k из остальных учеников. Для какого k обязательно найдутся два ученика этой школы, чувства которых взаимны: они или нравятся друг другу, или не нравятся?

56. Во дворце по кругу было установлено 10 скульптур. Император повелел между каждыми двумя соседними скульптурами установить шар, масса которого равна разности масс этих скульптур. Докажите, что сумма масс нескольких из этих шаров равна сумме масс остальных шаров.

В. Произволов

57. На каждой грани кубика написано число. Для любых двух смежных (то есть имеющих общее ребро) граней рассмотрим модуль разности их чисел. Докажите, что 12 полученных чисел можно разбить на две группы по 6 чисел с равными суммами.

В. Произволов

58. Сто гирек стоят в ряд, при этом массы любых соседних гирек различаются на 1 грамм. Докажите, что гирьки можно разложить на две чашки весов так, что весы будут в равновесии.

В. Произволов

59. Может ли конь сделать 8 ходов и вернуться последним ходом на исходное поле, побывав при этом на всех вертикалях и горизонталях шахматной доски?

А. Спивак

60. В клетчатом квадрате 6×6, вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

А. Шаповалов

61. На рисунке 7 показано, как произ-

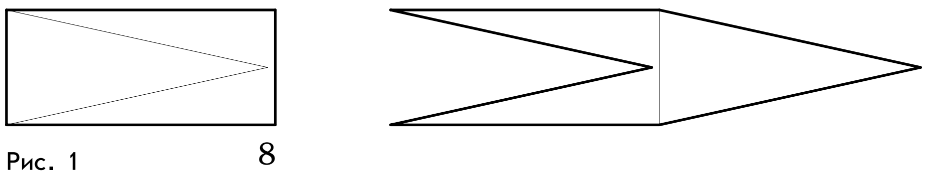


Рис. 1

вольный прямоугольник можно разрезать на две части и сложить из них невыпуклый равносторонний шестиугольник. Можно ли разрезать произвольный прямоугольник на три части и сложить из них выпуклый равносторонний шестиугольник?

А. Берштейн, С. Токарев

62. Из Костромы в Иваново выехали с небольшими интервала времени семь велосипедистов, один из которых был с флягой. Во время каждого обгона если у обгоняемого или обгоняющего есть фляга, то она переходит от одного из них к другому. Какое наименьшее число обгонов (как с передачей, так и без передачи) могло произойти, если фляга по дороге перебывала у всех велосипедистов?

А. Шаповалов

63. На каждой клетке шахматной доски сидело по два таракана. После сигнала каждый таракан переполз на соседнюю по горизонтали или вертикали клетку, причём любые два таракана, сидевшие на одной клетке, переползли на разные клетки. Какое наибольшее число клеток могло освободиться?

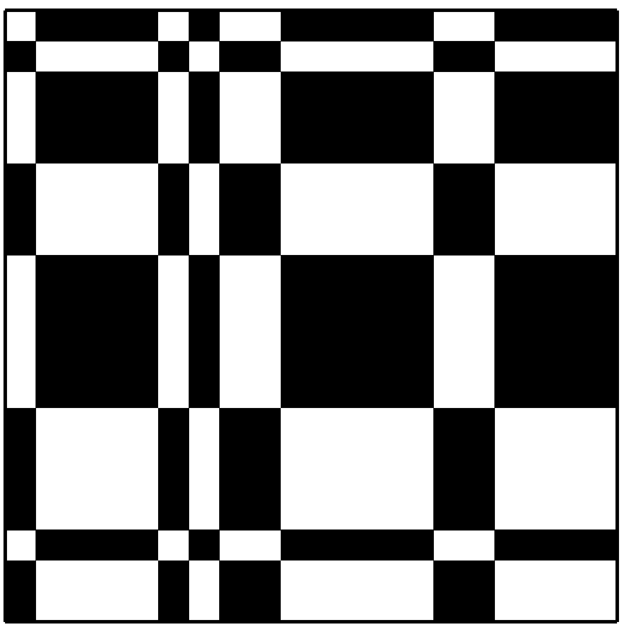
Р. Женодаров

64. 25 различных натуральных чисел расставлены в виде таблицы размером 5×5 так, что все суммы по строкам одинаковы. Могут ли совпадать и произведения чисел по столбцам?

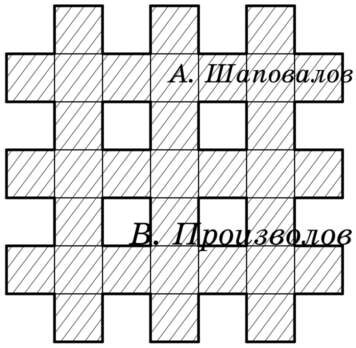
С. Токарев

65. а) Квадрат разрезан двумя перпендикулярными прямыми на четыре прямоугольника, которые раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Сумма площадей чёрных прямоугольников равна сумме площадей белых прямоугольников. Докажите, что хотя бы одна из проведённых прямых делит квадрат пополам.
б) Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке (рис. 8). Сумма площадей чёрных прямоугольников равна сумме площадей белых прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все чёрные прямоугольники составят один прямоугольник.

В. Произволов



66*. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать фигуру рисунка 9? (Резать можно только по границам клеток.)



А. Шаповалов

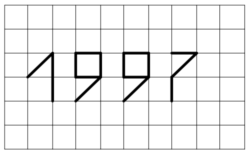
67. Любой выпуклый четырёхугольник можно разрезать на 4 четырёхугольника, каждый из которых — трапеция или параллелограмм. Докажите это.

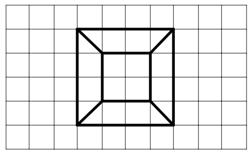
В. Произволов

68. На первой встрече марсиан и людей выяснилось, что ноги у марсиан такие же, как у большинства людей, а вот количества рук и пальцев на руках другие. Хотя марсиан было на 6 больше, чем людей, общее число пальцев (на руках и ногах) у марсиан оказалось на 1 меньше. Сколько всего участников было на встрече?

И. Акулич

69. Нарисуйте замкнутую несамопересекающуюся ломаную с минимально возможным количеством звеньев, пересекающую каждый из отрезков рисунка а) 10; б) 11; в) 12 и не проходящую через их концы.





С. Волчёнков

70. Три гонщика мчатся по круговому треку в одном направлении с разными постоянными скоростями. Для любых двух гонщиков на треке есть ровно k точек, в которых один обгоняет другого. Докажите, что число k нечётно.

С. Токарев

71. Может ли каждое из некоторых четырёх различных натуральных чисел делиться на разность любых двух из трёх остальных?

С. Токарев

72. Льюис Кэрролл как-то отправил своей племяннице следующий отчёт:

	Фунты	Шиллинги	Пенсы
За похищенную перчатку		2	0
За боль от потери		3	8,5
За доставленное беспокойство		4	4,5
За причинённые неприятности		14	7
За время, потраченное на поиски вора		1	6
ИТОГО	1	6	2

Зная, что в фунте больше шиллингов, чем в шиллинге пенсов, выясните, сколько в фунте шиллингов, а в шиллинге пенсов.

И. Акулич

73. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ... , 99, 100 разложить на 10 кучек разного веса так, чтобы чем больше была кучка, тем меньше было в ней гирь?

С. Токарев

74. Если натуральное число n не делится на 3, то существуют два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на n. Докажите это.

И. Акулич

75. В выходной день весь класс перебывал на катке. Каждый мальчик повидал там всех своих одноклассниц. Докажите, что в некоторый момент либо все мальчики, либо все девочки были на катке. (Точнее говоря, докажите, что если на прямой есть несколько красных и несколько синих

отрезков, причём каждый синий отрезок пересекается с каждым красным, то некоторая точка принадлежит либо всем красным, либо всем синим отрезкам.)

В. Дольников, С. Токарев

76. Любое ли чётное натуральное число можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, каждое из которых состоит из нечётных цифр?

А. Шаповалов

77. Король обошёл все поля шахматной доски, побывав на каждом по одному разу. Когда соединили центры полей, по которым он последовательно проходил, получилась ломаная без самопересечений. Найдите наибольшее возможное число диагональных ходов.

И. Акулич

78. а) Числа 1, 2, 3, ..., 10 расположили в строке в произвольном порядке и каждое сложили с номером места, на котором оно оказалось. Докажите, что хотя бы две из полученных сумм оканчиваются одной и той же цифрой.

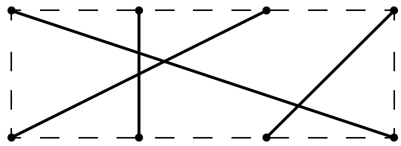


Рис. 2

б) Концы каждого из 51 отрезков расположены на двух противоположных сторонах прямоугольника и делят каждую на 50 равных частей (вершины прямоугольника — тоже концы отрезков). Докажите, что среди отрезков есть равные. (На рисунке 13 показаны 4 отрезка разной длины, концы которых делят противоположные стороны прямоугольника на три равные части, а на рисунке 14 — 9 отрезков.)

А. Шаповалов

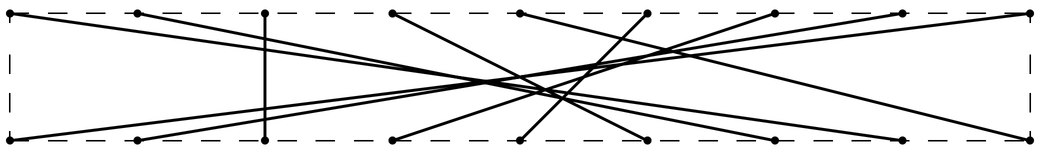


Рис. 3

в) Числа 0, 1, 2, ..., 50 расположили в строке в произвольном порядке и из каждого вычли номер места, на котором оно оказалось. Докажите, что хотя бы две из полученных разностей равны или противоположны по знаку.

79. Два игрока по очереди красят стороны 37-угольника так, чтобы никакие соседние стороны не оказались одноцветными. Игра заканчивается, когда окрашены все стороны. Проигрывает тот, кто последним ввел в игру новый цвет. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

А. Шаповалов

80. Имеется а) 10 бочек, содержащих 1 л, 2 л, ..., 10 л воды; б)* n бочек, содержащих 1 л, 2 л, ..., n л воды. Разрешено добавлять в бочку столько воды, сколько в ней есть, из другой бочки. Любая бочка может вместить всю воду. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одну бочку?

Р. Женодаров

81. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ при $n = 1, 2, \ldots$. Найдите a_{1998}.

С. Токарев

82. Внутри выпуклого пятиугольника $ABCDE$ взята точка M. Может ли оказаться, что каждая из прямых MA, MB, MC, MD, ME отсекает от пятиугольника $ABCDE$ треугольник?

С. Рукшин

83*. Ящики расставлены в бесконечный в обе стороны ряд. В начальный момент в одном из ящиков лежит шар, а остальные ящики пусты. Имеется неограниченный запас шаров. Разрешено вынуть один шар из любого ящика, если он имеется, а взамен положить по одному шару в каждый из двух соседних с ним ящиков. После того, как неоднократно проделали эту операцию с шарами, в нескольких подряд расположенных ящиках оказалось по одному шару, а остальные были пусты. В скольких ящиках лежат шары?

И. Акулич

84. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске 8×8, чтобы каждая ладья находилась под боем не более чем трёх остальных?

В. Шорин

85. Рассмотрим все промежутки времени в июне, состоящие из целого числа дней. Найдите наибольшее возможное число промежутков, в течение каждого из которых случилось нечётное число дождливых дней.

С. Токарев

86. На шахматной доске стояло 16 королей, каждый из которых бил хотя бы одного из остальных. После того, как несколько королей убрали, никакие два из оставшихся не бьют друг друга. Какое наибольшее число королей могло остаться на доске?

С. Токарев

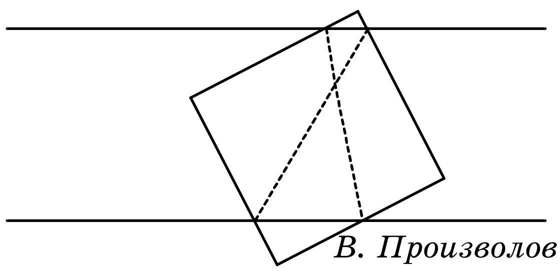
87. По окружности, разбитой на несколько дуг, прыгает блоха. Перед каждым своим прыжком она вычисляет длину дуги, на которой находится, а затем прыгает так, чтобы сместиться по часовой стрелке на дугу вычисленной длины. В частности, если блоха попала на границу двух дуг, то она дальше прыгает по часовой стрелке по граничным точкам, и тем самым посещает все дуги. Докажите, что в любом случае блоха побывает на всех дугах.

А. Шаповалов

88. В одном из углов шахматной доски лежит плоский картонный квадрат 2×2, а в противоположном углу — квадрат 1×1. Двое играющих по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Боря — большой квадрат, а Миша — маленький. Боря выигрывает, если Мишин квадрат окажется накрыт Бориным квадратом. Начинает Боря. Может ли он победить Мишу?

А. Шаповалов

89. На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, а его граница пересекает границу полосы в четырёх точках (рис. 15). Докажите, что прямые, проходящие «накрест» через эти точки, пересекаются под углом величиной 45°.



В. Произволов

Исправленный рисунок

90. а) На рисунке 16 показан один из способов прочитать слово МАРШРУТ. Сколько всего таких способов? (Из любой клетки можно перейти лишь к соседней по стороне или вершине.)
б) Уберите одну букву, чтобы количество способов стало равно 145.

В. Радунский

91. Дорожная шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Каждая из 28 костей домино покрывает ровно две соседние клетки доски.

Уложите комплект домино на доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски.

И. Акулич

92*. Правильный треугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Найдите количество правильных треугольников с вершинами в узлах полученной сетки. (Учтите, что стороны некоторых из них при $n > 2$ не параллельны сторонам треугольника со стороной n.)

Н. Авилов

93. Разместите грузики массами 1, 2, ..., 8 граммов в вершинах куба так, чтобы центр их тяжести совпал с центром куба. (Другими словами, занумеруйте вершины куба числами от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел любой грани равнялась сумме чисел противоположной грани.)

И. Акулич

94*. а) Каждое из 16 княжеств уже воевало с двенадцатью из этих княжеств. Можно ли разбить эти княжества на 8 пар ещё не воевавших княжеств?
б) Найдите наименьшее количество вершин графа, степени всех вершин которого равны 3 и вершины которого нельзя разбить на пары соединённых между собой.

С. Токарев

95. На пятидесятой клетке полосы длиной 100 клеток стоит фишка. Играют двое. Каждый может своим ходом передвинуть фишку на одну или две клетки в ту или иную сторону. Запрещено ставить фишку на те клетки, где она уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнёр?

А. Савин

96*. На шахматной доске расставьте а) 16 чёрных и 16 белых фигур; б) 15 чёрных и 15 белых фигур так, чтобы на каждой вертикали, на каждой горизонтали и на каждой из двух главных диагоналей количество чёрных фигур равнялось количеству белых.

С. Токарев

97. Целые числа a, b, c таковы, что $a(a+b) = b(b+c) = c(c+a)$. Докажите равенства $a = b = c$.

С. Токарев

98. На пульте находятся 100 светящихся кнопок, расположенных в виде квадрата 10×10. Табло устроено так, что при нажатии на любую кнопку она и все кнопки одного с ней ряда и все кнопки одного с ней столбца меняют своё состояние: светившиеся гаснут, а не светившиеся загораются. Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы все кнопки оказались погашенными, если первоначально все светились?

С. Токарев

99*. На клетчатой доске $1 \times 100\,000$ (вначале пустой) два игрока ходят по очереди. Первый может за ход выставить два крестика в любые два свободных поля доски. Второй может стереть любое количество крестиков, идущих подряд, если между ними нет пустых клеток. Если после хода первого образовались 13 или более крестиков подряд, он выиграл. Может ли первый обеспечить себе победу?

А. Шаповалов

100. Обозначим через $P(n)$ произведение всех цифр натурального числа n. Вычислите $P(1000) + P(1001) + \ldots + P(2000)$.

С. Токарев

101. Для любого натурального числа n существует n таких различных натуральных чисел, что произведение любых двух из них кратно разности этих двух чисел. Докажите это.

Л. Курляндчик

102. В шахматном матче между васюкинцами и калмыками с каждой стороны участвовало по 1996 шахматистов. Организатор матча решил, что система, при которой первый играет с первым, второй со вторым и так далее, скучна, и задумал разбить игроков на пары так, чтобы сумма номеров игроков в каждой паре была квадратом целого числа. Возможно ли такое разбиение?

П. Филевич

103. Может ли наименьшее общее кратное первых 50 из некоторых 100 последовательных натуральных чисел равняться наименьшему общему кратному остальных 50 из этих 100 чисел?

С. Токарев

104. В однокруговом футбольном турнире за победу начисляли 3 очка, за ничью 1, а за поражение — 0. Турнир закончился, и очки всех команд были посчитаны. Матч назовём интересным, если он завершился победой команды, у которой в итоговой таблице очков меньше, чем у соперника. Могло ли интересных игр в турнире быть больше половины?

С. Токарев

105*. Из 32 костей доминошек — прямоугольников размером 1×2 — сложен квадрат. Докажите, что можно покрасить по 8 костей красной, синей, жёлтой и зелёной красками так, чтобы любые две доминошки, имеющие общий отрезок границы (именно отрезок, а не точку!), были окрашены разными красками.

С. Токарев

106. Замкнутая ломаная такова, что любые два её звена имеют ровно одну общую точку. Докажите, что число её звеньев нечётно.

В. Произволов

107. На некоторых клетках шахматной доски стоят фишки. Фишке разрешено перепрыгивать через соседнюю с ней (по горизонтали, вертикали или диагонали) на непосредственно следующее поле, если оно было свободно. Какое наибольшее число фишек можно расставить так, чтобы каждая из них могла сделать хотя бы один ход?

А. Грибалко

108*. 49 кнопок расположены в виде квадрата 7×7. Каждая из них светится или не светится. При нажатии на любую из кнопок меняется состояние этой кнопки и всех соседних с ней по горизонтали, вертикали и диагоналям. Докажите, что можно погасить все кнопки, независимо от того, какие кнопки светились первоначально.

С. Токарев

109. Сделайте надрезы на листе бумаги размером 3×4, чтобы лист не распался и им можно было оклеить куб $1 \times 1 \times 1$ в два слоя.

В. Произволов

110*. Какое наибольшее число дней в году можно выбрать так, чтобы любые два из них, но не все вместе, приходились на один день недели, или на один месяц, или на одно число месяца?

С. Токарев

111. В некотором году три месяца подряд содержали по 4 воскресенья. Докажите, что один из этих месяцев — февраль.

С. Токарев

112. В таблицу размером 4×4 записали 16 чисел. Таблица рисунка 17 получена из исходной таблицы заменой каждого элемента на среднее арифметическое шести чисел, расположенных в одной строке или в одном столбце с ним. Восстановите исходную таблицу.

С. Волчёнков

0	0	0	7
0	0	9	0
0	9	0	0
1	0	0	0

113. На доске написали 16 трёхзначных чисел, дающих разные остатки при делении на 16. Какое наименьшее количество разных цифр могло быть при этом использовано?

С. Конягин

114. Разрежьте ромб на четыре четырёхугольника, в каждый из которых можно вписать окружность и около каждого из которых можно описать окружность.

В. Произволов

115. Окружность пересекает все стороны треугольника. Докажите, что её радиус больше радиуса окружности, вписанной в треугольник.

116. Через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам противолежащих углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

С. Токарев

117. Через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника, как показано на рисунке 18. Докажите равенство площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

В. Произволов

118. Торт имеет форму выпуклого пятиугольника со свечами в вершинах. Обязательно ли на торте найдётся точка, начиная от которой прямыми разрезами торт можно разделить на пять частей одинаковой площади, в каждой из которых есть свеча?

С. Волчёнков

119. Придумайте а) выпуклый четырёхугольник, любую вершину которого можно перенести в другую точку так, чтобы новый четырёхугольник был конгруэнтен исходному; б) выпуклый семиугольник, каждая диагональ которого перпендикулярна некоторой другой его диагонали.

С. Токарев

120. Существует ли такой треугольник ABC, что точка P, удовлетворяющая равенствам $PA + BC = PB + CA = PC + AB$, в его плоскости не единственна?

С. Маркелов, А. Савин

121*. Нарисуйте два выпуклых четырёхугольника, любая сторона любого из которых лежит на серединном перпендикуляре к некоторой стороне другого.

С. Токарев

122. Внутри квадрата $ABCD$ найдите все точки X, для которых $AX + CX = BX + DX$.

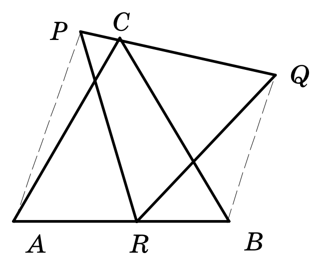
С. Токарев

123*. Одновременно каждый из 50 гангстеров выстрелил в ближайшего к нему гангстера (в одного из ближайших, если их несколько) и убил его. Найдите наименьшее возможное число убитых. (Гангстеры — различные точки плоскости.)

Н. Васильев

124. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ, а вершина R — на стороне AB (рис. 19). Докажите, что прямые AP и BQ параллельны.

В. Произволов



125*. В стране, где 25 городов, три авиакомпании хотят, чтобы для любой пары городов все беспосадочные авиарейсы между этими городами осуществлялись только одной из авиакомпаний, однако любая авиакомпания могла бы доставлять пассажиров из любого города в любой другой с посадкой не более чем в одном промежуточном городе. Докажите, что это осуществимо.

С. Токарев

126*. Внутри квадрата со стороной 10 расположен невидимый квадратик со стороной 1, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. Про любой многоугольник можно узнать, какая доля его площади лежит внутри невидимого квадратика. Можно ли при помощи двух таких многоугольников определить местоположение невидимого квадратика?

С. Токарев

127. В таблице 9×9 расставлены числа $1, 2, \ldots, 81$. Разрешено спросить, каково множество чисел в указанном Вами квадрате, стороны которого проходят по линиям клетки. За какое наименьшее число вопросов всегда можно восстановить расстановку?

С. Токарев

128. В каждом из 1995 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставят фишку. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по часовой стрелке на число полей, написанное там, где она была, а затем увеличивают на 1 число там, куда она пришла. Докажите, что через некоторое время фишка побывает на всех полях.

А. Шаповалов

129*. По поверхности стола прокатите кубик таким образом, чтобы он перевернулся по одному разу через каждое своё ребро и в итоге оказался бы на исходном месте.

С. Токарев

130*. Возьмем натуральное число a_1 и умножим его на сумму его цифр. Полученное число a_2 умножим на сумму цифр числа a_2. Полученное число a_3 умножим на сумму его цифр, и так далее. Укажите все такие числа a_1, для которых сумма цифр некоторого очередного числа a_n (а значит, и всех последующих) равна 1.

И. Акулич

Летний турнир 1999 года (Рыбинск)

131. Расшифруйте «животноводческий» ребус $\text{Б} + \text{БЕЕЕ} = \text{МУУУ}$.

И. Акулич

132. В конференции участвовали 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника, и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

А. Шаповалов

133. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике — 50, по информатике — 48. Ровно в двух олимпиадах участвовали вдвое меньше учеников, чем в одной, а в трёх — втрое меньше, чем в одной. Сколько учеников участвовали хотя бы в одной олимпиаде?

А. Шаповалов

134. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принёс с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причём на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую

часть капусты, но все кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

И. Акулич

135. а) Является ли разность $11\,111\,112\,222\,222 - 3\,333\,333$ квадратом натурального числа?

б) Проверьте равенства $16 = 4^2$, $1\,156 = 34^2$, $111\,556 = 334^2$ и докажите, что $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6 = \underbrace{33\ldots3}_{n-1}4^2$ для любого натурального n.

в) Для любого натурального n докажите равенство

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2.$$

136.* Три мухи в полдень сели на секундную, минутную и часовую стрелки часов и поехали на них. Когда какая-то стрелка обгоняла другую, сидящие на этих стрелках мухи менялись местами (а если бы секундная стрелка обогнала часовую и минутную стрелки одновременно, то местами поменялись бы мухи с секундной и часовой). Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи?

С. Волчёнков

Замечание. Можно доказать, что одновременный обгон секундной стрелкой двух остальных стрелок происходит только в полдень и полночь, так что можно было это не упоминать; но жюри решило, что не надо отвлекать школьников от поиска основной идеи решения задачи.

137. Ветка кустарника (рис. 20) имеет один лист сверху и, кроме того, n пар листьев (листья одной пары растут из одной точки стебля). Двое по очереди срывают листья. За один ход можно сорвать либо один любой лист, либо любую пару листьев, растущих из одной точки. Выигрывает тот, кто сорвет последний лист. При каких n побеждает начинающий, а при каких — его противник, если оба играют наилучшим образом?

И. Акулич

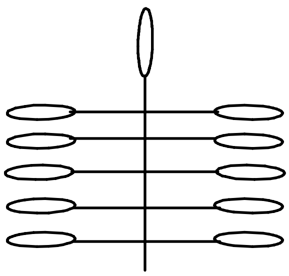


Рис. 4

138.* В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом «накрыть» любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца?

А. Шаповалов, В. Шорин

139.* Числами от 1 до 100 сверху вниз пронумеровали 100 карточек в стопке. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или несколько карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение номеров карточек станет кратно $1\,000\,000$. Кто из игроков может гарантировать себе выигрыш?

А. Шаповалов

140. Существует ли треугольник, длины всех сторон и всех высот которого целые?

А. Шаповалов

141. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AN = AC$ и $BM = BC$ (рис. 21). Затем на катетах BC и AC отметили соответственно точки P и Q так, что $BP = BN$ и $AQ = AM$. Докажите, что точки C, Q, M, N и P лежат на одной окружности.

В. Произволов

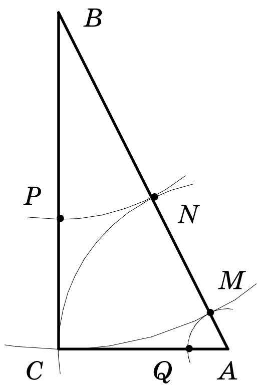


Рис. 5

142. На каждой стороне треугольника отметили по точке и соединили эти точки отрезками, тем самым разбив треугольник на четыре меньших треугольника. Все четыре оказались подобны друг другу. Обязательно ли эти четыре треугольника конгруэнтны?

А. Шаповалов

143. Сумма длин медиан треугольника равна сумме длин его биссектрис. Докажите, что треугольник равносторонний.

А. Спивак

144. Назовём точку, расположенную внутри треугольника, плохой, если из отрезков, соединяющих её с вершинами треугольника, нельзя составить треугольник. Какие треугольники не имеют плохих точек?

И. Акулич

145. Отметим на плоскости несколько точек. Соединим каждые две из них отрезком и назовём середины этих отрезков точками второго поколения. Таким же образом, соединив всевозможными отрезками точки второго поколения, получим точки третьего поколения, потом — четвёртого и так далее. Докажите, что если ни во втором, ни в третьем поколениях никакую точку мы не отмечали дважды, то и ни в каком следующем поколении никакую точку не придётся отмечать дважды.

И. Акулич

146. Изобретатель создал чертёжный прибор, который отмечает середину любого заданного отрезка. Можно ли с помощью этого прибора и линейки разделить данный отрезок на три равные части?

И. Акулич

147. На поверхность куба наклейте без наложения прямоугольник так, чтобы он закрыл половину каждой грани.

Д. Калинин

148. Куб размером $2\times2\times2$ оклейте в один слой а) четырьмя одинаковыми развёртками куба $1\times1\times1$; б) двумя одинаковыми развёртками куба с ребром длины $\sqrt{2}$.

С. Токарев

149. При каком наименьшем n на клетчатой доске 10×10 можно так расположить n прямоугольников размерами 1×1, 1×2, ..., $1 \times n$, что на доске не окажется места для прямоугольника размером $1 \times (n+1)$? (Стороны прямоугольников идут по сторонам клеток.)

Д. Калинин

150. Пусть s — сумма цифр десятичной записи натурального числа $n > 1$. Докажите неравенство $2^s < n^3$.

С. Волчёнков

151. Три плоскости, параллельные граням куба, разрезали каждую грань на четыре прямоугольника, как показано на рисунке 22. Докажите, что сумма площадей закрашенных прямоугольников равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников.

В. Произволов

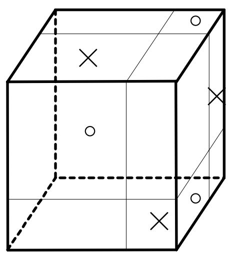


Рис. 6

152. Нарисуйте замкнутую ломаную, пересекающую каждое свое звено ровно один раз, причём под прямым углом.

А. Шаповалов

153. а) Некоторые клетки доски размером $n \times n$ заминированы. Для каждой клетки (как заминированной, так и не заминированной) известно, сколько клеток, соседних с ней по стороне, заминировано. При каких n этой информации в любом случае достаточно для вычисления количества заминированных клеток?

б) Отметьте на доске размером 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне в точности с одной отмеченной клеткой.

Д. Калинин

154*. Любую клетку шахматной доски разрешено либо распилить по одной из двух ее диагоналей, либо распилить по обеим диагоналям, либо не распиливать вообще. Придумайте способ сделать как можно большее число распилов, чтобы доска все ещё не распалась на отдельные части.

И. Акулич

155. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляем ферзей по следующим правилам: каждым ходом на доску ставим одного ферзя, и если он какого-то ферзя побил, то одного из побитых ферзей снимаем с доски. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске, соблюдая эти условия?

И. Акулич

156. На контурной карте несколько государств имеют форму конгруэнтных прямоугольников. При каком наименьшем количестве государств для правильной раскраски может не хватить трёх красок?

С. Волчёнков

157. В стране фараонов одинаковыми монетами любого достоинства можно набрать сумму ровно в один динар, причём для этого всегда нужно менее 100 монет. Барон Мюнхгаузен привёз оттуда 7 монет разных достоинств и утверждает, что они как раз составляют сумму в один динар. Могут ли слова барона быть правдой?

А. Шаповалов

158. Мультфильм показывали целое число минут. Когда посмотрели в программе время начала и конца показа (часы и минуты — по 24-часовой шкале), то оказалось, что в записи использованы 8 различных цифр. Какое наименьшее время мог идти мультфильм?

А. Шаповалов

159. Число назовём удачным, если его цифры идут в невозрастающем порядке и каждая цифра равна количеству цифр, меньших её и входящих в запись этого числа. (Например, числа 4 333 222 210 и 7 765 433 210 удачное.) Сколько всего удачных десятизначных чисел?

С. Токарев

160. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $\text{НОД}(x;y)+\text{НОК}[x;y]+x+y=1999$?

Р. Женодаров

161. Решите в натуральных числах уравнение $(x!+1999)=y!(z!+999)$.

И. Акулич

162. Можно ли некоторые пять вершин правильного 110-угольника покрасить в красный цвет, а некоторые другие 11 вершин — в синий цвет так, чтобы красные точки были вершины правильного пятиугольника, а синие — вершинами правильного 11-угольника?

163. Сложили все натуральные числа, меньшие 1 000 000, сумма цифр каждого из которых кратна 17. Докажите, что сумма делится на 17.

А. Шаповалов

164. Из 1998 дробей $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{1998}$ составили всевозможные произведения по три. Затем эти произведения просуммировали, привели к общему знаменателю и полученную дробь преобразовали к несократимому виду. Докажите, что числитель полученной дроби кратен 1999.

И. Акулич

165. Продавец ювелирного магазина решил убедиться, что 10 бриллиантов, расположенных на витрине в ряд и весящих 90, 91, ... , 99 каратов, действительно расположены в порядке возрастания весов. Каким наименьшим числом взвешиваний на электронных весах, выдерживающих не более 200 каратов, он может это сделать?

А. Шаповалов

166. Докажите, что в натуральном ряду, начиная с некоторого места, все числа обладают следующим свойством: между цифрами их десятичной записи можно расставить скобки и знаки четырёх арифметических действий так, чтобы результат равнялся 0. (Переставлять цифры нельзя. Между любыми двумя цифрами должен быть знак действия или скобка: образовывать из подряд стоящих цифр многозначные числа нельзя.)

А. Шаповалов

167. Пуаро хочет найти на магнитофонной записи часового концерта определённый момент (точку на ленте). Магнитофон может перематывать ленту в обе стороны со вдесятеро большей скоростью. Пуаро заранее не знает, где нужное место. Прослушав полминуты подряд, он либо обнаруживает нужный момент, либо определяет, раньше этот момент или позже. Вначале лента стоит на начале концерта. Придумайте стратегию действий, которая гарантирует Пуаро отыскание нужной точки менее, чем за 600 секунд.

А. Шаповалов

168. На большой стене висит круглая мишень диаметром 10 см, закрытая листом бумаги размером 2×2 метра. Ковбой хочет поразить мишень, имея двенадцать пуль. После каждого выстрела, начиная со второго, ему сообщают, точнее или нет был этот выстрел по отношению к предыдущему. Докажите, что ковбой может наверняка попасть в мишень.

С. Волчёнков

169. а) Перед турниром шестнадцати командам присвоили рейтинги от 1 до 16. Затем среди этих команд был проведен чемпионат по олимпийской системе с выбыванием (после первого тура осталось восемь команд, после второго — четыре, потом две и, наконец, одна). Каждую встречу выигрывала команда с лучшим рейтингом. Назовем встречу неинтересной, если разница рейтингов команд была больше 4. Какое наименьшее число неинтересных встреч могло быть в турнире?

б) В турнире по олимпийской системе (то есть по системе, в которой участники в каждом туре разбиваются на пары, а проигравшие выбывают) играли 512 человек. Каждому присвоен квалификационный номер — от 1 до 512. Партию называем скучной, если разность номеров участников больше 30. Может ли в турнире не быть скучных партий?

в) В турнире по олимпийской системе играли 256 человек. Каждому присвоен квалификационный номер — от 1 до 256. Партию называем интересной, если разность номеров участников не превосходит 21. Все партии турнира были интересные. Докажите, что участник с номером 1 одержал не более двух побед.

С. Иванов, Р. Семизаров, А. Шаповалов

170. У каждого из нескольких сплетников есть три знакомых сплетника, причём с одним из них он обменивается всеми новостями каждое утро, с другим — каждый полдень, с третьим — каждый вечер. Два сплетника поссорились и прекратили обмен новостями. Докажите, что новости от каждого из них все равно будут доходить до другого.

В. Дольников

171. На плоскости построили 1999 лучей с общей вершиной, никакие два из которых не образуют развернутого угла. Могут ли эти лучи образовывать острых углов столько же, сколько и тупых?

Д. Калинин

172. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки M и N так, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Докажите равенство $MN^2 = 2AM \cdot BN$.

173. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ прямые, проходящие через вершины B и D перпендикулярно соответственно диагоналям AC и CE, пересекаются в точке F. Докажите, что $AF = FE$ тогда и только тогда, когда $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

Д. Калинин

174. Какие 500 последовательных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 1999 цифр?

Д. Калинин

175. Было 8 гирь массами 1 г, 2 г, ... , 8 г без надписей. Одну из гирь потеряли. Известно, что чем больший вес имела гиря, тем больше был ее размер. Научитесь за два взвешивания на чашечных весах выяснять, какая именно гиря потеряна.

А. Шаповалов

176.* Последовательность начинается с чисел 9, 9, 9, 9. Каждый следующий член последовательности равен остатку от деления на 11 произведения четырёх последних членов. Встретится ли в этой последовательности такая четвёрка идущих подряд чисел: 1, 9, 9, 9?

С. Волчёнков

177. В последовательности чисел первое число равно 1, второе — 2, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением наибольшего простого делителя (например, третье число равно $2 + 2 = 4$, четвёртое — $4 + 2 = 6$, пятое — $6 + 3 = 9$, и так далее). Найдите число, стоящее в последовательности на 3999-м месте.

А. Шаповалов

1999/2000 учебный год

178. По кругу написаны n натуральных чисел. Каждые два соседних числа отличаются на 1. Назовём число (не)значительным, если оба соседа меньше (больше) его; обозначим сумму всех (не)значительных чисел буквой M (соответственно, m). Докажите равенство $n = 2(M - m)$.

В. Произволов

179*. В начальный момент в одной из клеток на бесконечном листе клетчатой бумаги жил микроб первого поколения. Через секунду появляются микробы второго поколения в двух клетках, соседних с ним а) по стороне; б) по вершине или стороне. Еще через секунду в двух соседних клетках с каждым из микробов второго поколения появляются по два микроба третьего поколения. Еще через секунду в двух соседних клетках с каждым из микробов третьего поколения появляются по два микроба четвертого поколения и так далее. Не допускается, чтобы в некоторой клетке оказалось более одного микроба. Какое наибольшее число поколений могло оказаться на листе?

И. Акулич

180. Два игрока по очереди красят по одной клетке прямоугольника размером 4×1999. Разрешено использовать любые краски, но нельзя покрасить в один и тот же цвет две клетки, имеющие общую сторону. Проигравшим считают того, кто последним ввёл в игру новый цвет. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

А. и М. Шаповаловы

181. Двое играют на доске размером $m\times n$. Игроки по очереди проводят отрезки по стороне или диагонали одной клетки. Дважды проводить один и тот же отрезок нельзя; ни в одной клетке нельзя проводить обе ее диагонали. Тот, кто не сможет сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

В. Замков

182. Строки и столбцы таблицы размером 9×9 занумеровали числами от 2 до 10. В каждую клетку таблицы вписали произведение номера строки на номер столбца. Затем несколько строк и столбцов вычеркнули. Может ли сумма а) оставшихся; б) зачеркнутых чисел оказаться простым числом?

И. Акулич

183. Найдите все целые числа k, представимые в виде $k=\frac{x-\frac{1}{x}}{y-\frac{1}{y}}$, где x, y — целые числа.

В. Сендеров

184. Найдите все такие натуральные числа x, что десятичная запись числа x^2+1 состоит только из а) двоек; б) семёрок.

В. Сендеров

185. Можно ли из бумаги вырезать 6 таких конгруэнтных параллелограммов площади 1, не являющихся прямоугольниками, что ими можно оклеить поверхность куба с ребром длины 1?

В. Произволов

186. Участникам олимпиады предложили 24 задачи различных авторов. Сотрудник «Кванта» отобрал лучшие из них для печати и поделил причитающийся гонорар в 400 рублей между их авторами, округлив до целого числа рублей и тем самым сэкономив некоторую сумму. Узнав, какую именно, бухгалтер смогла сказать, сколько задач признаны достойными публикации. Сколько же?

И. Акулич

187. Если $a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3=a^3b^4+b^3c^4+c^3a^4$, то $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Докажите это.

В. Произволов

188. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ задана точка P. Постройте вписанный параллелограмм с вершиной в точке P, стороны которого отсекают от параллелограмма $ABCD$ треугольники равной площади.

В. Произволов

189. Каждая из восьми нарисованных фигурок состоит из единичного квадрата и двух его половинок — прямоугольных треугольников (рис. 23). Можно ли из них сложить квадрат размером 4×4, если фигурки разрешено поворачивать?

Н. Авилов

190. Внутри треугольника ABC с длинами сторон $AB=c$, $BC=a$ и $CA=b$ лежит точка P. Докажите, что если $a\leqslant b\leqslant c$, то хотя бы от одной из вершин треугольника точка P удалена не более чем на $b/\sqrt{2}$.

В. Сендеров

191. Числа a, b и $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ рациональны, а число $\sqrt[3]{a}$ иррационально. Докажите равенство $a=-b$.

В. Сендеров

192. Найдите все такие натуральные числа, каждое из которых в 100 раз больше количества своих делителей.

А. Жуков

193. Гадалка вычисляет остаток от деления на 6 сообщённого ей числа и делает предсказание в соответствии с древней таблицей. Предскажет ли она когда-нибудь «к чёрту пошлёт», если ей давать числа вида 1, 12, 123, 1234, ... , 1234567891011121314, ... ?

А. Жуков

Остаток	Предсказание
0	любит
1	не любит
2	плюнет
3	поцелует
4	к сердцу прижмёт
5	к чёрту пошлёт

194*. Тренер хоккейной команды из 18 кандидатов должен найти наиболее перспективную пару нападающих. Для этого он выпускает на поле составы по 5 игроков в каждом. Какое наименьшее число «пятёрок» надо испытать, чтобы каждая пара кандидатов побывала в игре (в составе некоторой «пятёрки»)?

В. и Н. Поповы

195. Точки M и N — середины сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если $\angle BAD+\angle CAD=\angle CDA+\angle BDA=90^\circ$, то $MN\perp AD$.

В. Произволов

196. Число $3\cdot5^n+8n^2+44n-67$ делится на 128 для любого нечётного натурального числа n. Докажите это.

Т. Маликов

Летний турнир 2000 года (Сызрань)

197. Если число n натуральное, то $n!$ представимо в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся не более чем вдвое. Докажите это.

С. Конягин

198. Петя отправился пешком из Сосновки в Клещёвку. В 12 : 00, когда Петя был в a км от Сосновки, его нагнал велосипедист и подвёз, высадив в a км от Клещёвки. После этого Петя продолжил путь пешком и пришёл в Клещёвку в 14 : 00. Сколько времени потребуется Пете на обратный путь пешком, если на велосипеде его везли с вдвое большей скоростью, чем он ходит пешком?

А. Шаповалов

199. На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Запрещено возвращать короля на поле, где он только что был. Выигрывает тот игрок, после хода которого король окажется на поле, где он когда-то уже побывал. Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника?

И. Акулич

200. На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Тот, после хода которого король окажется на поле, где он уже побывал, проигрывает. Кто выиграет в такой игре, если оба играют наилучшим образом?

И. Акулич

201. а) Даруя народу конституцию, царь организовал несколько партий среди n своих подданных. Любого подданного можно зачислить в несколько партий или не зачислять ни в одну из них. По конституции царь может выбрать несколько партий и отправить в тюрьму всех подданных, участвующих во всех этих партиях. Какое наименьшее число партий необходимо организовать, чтобы заведомо можно было отправить в тюрьму всех врагов народа и только их? (Список врагов народа произволен. Врагами народа может быть весь народ. Царь — не враг народа.)

б) В состоящем из n элементов множестве M выбрано несколько подмножеств. Любое невыбранное подмножество множества M представимо в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано?

А. Скопенков

202. Заведенный механический будильник звенит, когда часовая стрелка совпадает со стрелкой звонка будильника. Тётя Полли завела будильник на некоторое время с целым числом минут. Проснувшись, Том Сойер обнаружил, что часовая стрелка направлена по биссектрисе угла между минутной и стрелкой звонка. Через три минуты, когда стрелка звонка оказалась биссектрисой угла между часовой и минутной стрелками, Том встал, так и не дождавшись звонка. На какое время тётя завела будильник?

А. Шаповалов

203. Электронные часы показывают время (часы и минуты) от 00 : 00 до 23 : 59. Найдите все такие показания часов, когда число минут, прошедших с полуночи, ровно в 100 раз больше суммы цифр на часах.

А. Шаповалов

204*. а) В клетках таблицы размером 5×5 расставлены числа. Для каждой клетки нашли сумму её числа и чисел всех клеток, имеющих с ней общую сторону или вершину. Числа в каких клетках можно определить, зная эти суммы, а в каких — нельзя?

б) В клетках квадрата 8×8 расставлены числа. Для каждой клетки нашли сумму её числа и чисел всех соседних клеток (соседними считаем клетки, имеющие общую сторону или вершину). Числа в каких клетках можно определить, зная эти суммы, а в каких — нельзя?

С. Волчёнков

205. В книге встретилось несколько дат, каждая из которых записана шестью цифрами (например, 29.06.00 — дата проведения олимпиады). Могло ли случиться, что каждая цифра от 0 до 9 встретилась одинаковое число раз?

А. Шаповалов

206. Решите ребус СТО · СТО = СЕКРЕТ.

И. Григорьева

207. Положительные числа a, b, c таковы, что наибольшее из них равно наибольшему из чисел a^2/b, b^2/c, c^2/a. Докажите равенства $a = b = c$.

В. Сендеров

208. Бивис и Батт-Хед за ночь посмотрели три программы видеоклипов. Первая программа содержала в полтора раза меньше клипов, чем вторая, а всего в трёх программах было 200 клипов. Из всего просмотренного Бивису понравилась лишь пятая часть клипов первой программы и половина клипов второй программы. Батт-Хеду понравилось столько же клипов, сколько и Бивису, в том числе все клипы третьей программы. Сколько клипов им не понравилось?

И. Акулич

209. Две точки поверхности куба, отличные от его вершин, соединены ломаной наименьшей длины, звенья которой лежат на поверхности куба. Докажите, что ломаная не проходит ни через одну из вершин куба.

С. Тасмуратов

210. Окрасили бесконечный лист клетчатой бумаги, кроме квадрата 7×7. Вася в этом квадрате покрасил клетку, у которой ровно одна соседняя (по стороне) клетка окрашена, затем еще одну клетку, у которой теперь ровно одна соседняя клетка окрашена, и так далее. Какое наибольшее количество клеток таким образом может покрасить Вася?

Д. Калинин

211. Есть 101 банка консервов массами 1001 г, 1002 г, ... , 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхоз помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедить в этом ревизора за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов: одни точные, другие — грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые — только если разница больше 1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

А. Шаповалов

212. В ряд слева направо были выставлены гирьки массами 1 г, 2 г, ... , 13 г. Из них осталось только семь подряд стоящих, а остальные шесть гирек потеряны. За два взвешивания на чашечных весах определите массы оставшихся гирек.

С. Токарев

213. Внутри остроугольного треугольника ABC, величина угла A которого равна 40°, взята такая точка M, что $\angle CMB = 110^\circ$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BM и CM пересекают стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка M лежат на отрезке PQ.

Д. Калинин

214. Через середину биссектрисы угла B треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная ей. Может ли эта прямая пересекать отрезок AC?

В. Замков

215. Коля и Петя играют в морской бой по измененным правилам. У каждого из них имеется квадратное клетчатое поле размером 10×10. Петя расставляет на своем поле корабли размером 1×3, а Коля на своем — корабли размером 1×4. Корабли не должны соприкасаться даже вершинами. Победителем считают того, кто расставил больше кораблей. Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу?

В. Каскевич

216. Отрезки AC и BC равны и перпендикулярны. Найдите множество таких точек M, для которых $\angle AMC = \angle CMB$.

А. Егоров, А. Спивак

217. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, касается его основания в точке D, а боковых сторон — в точках E и F. Прямая, проведённая через точку E параллельно прямой DF, повторно пересекает вписанную окружность в точке P. Докажите, что точка P принадлежит средней линии треугольника.

Д. Калинин

218. Существуют ли два различных натуральных числа a и b, что $a^{20}+b^{20}$ делится на каждое из чисел $a+b$, a^2+b^2, a^3+b^3, ..., $a^{19}+b^{19}$?

Е. Черепанов

219. Из бесконечной последовательности 2, 6, 12, ..., $n(n+1)$, ... можно выбрать 2000 различных чисел (не обязательно идущих подряд), сумма которых является полным квадратом. Докажите это.

В. Замков

220. В ряд записаны 2000 различных натуральных чисел. Известно, что для любого натурального $k \leqslant 2000$ сумма любых k чисел, записанных подряд, делится на k. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех 2000 чисел.

И. Акулич

221. Секретный объект представляет собой квадрат размером 8×8, разбитый коридорами на квадратики 1×1. В каждой вершине такого квадратика есть переключатель. Щелчок переключателя меняет освещенность сразу всех коридоров длины 1, выходящих из этой вершины. (В освещенных коридорах свет выключается, а в неосвещенных — включается. Секретные ширмо-клапаны в вершинах не пропускают свет в другие коридоры.) Первоначально сторож находится в левом нижнем углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать переключателями сколько угодно раз. Может ли сторож перебраться в верхний а) правый; б) левый угол, погасив при этом свет во всех коридорах и вернув тем самым объект в первоначально секретное состояние?

А. Шаповалов

222. На плоскости отмечено несколько точек. Назовём тройку параллельных прямых красивой, если расстояния между соседними прямыми одинаковы, все отмеченные точки лежат на этих прямых и на каждой прямой найдется отмеченная точка. Какое наибольшее число точек может быть отмечено так, чтобы для них нашлись три красивые тройки прямых?

А. Шаповалов

223. Оклейте куб прямоугольниками так, чтобы каждый из них граничил (по отрезку) ровно с пятью другими.

А. Шаповалов

224. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая била чётное число других? (Одна ладья бьет другую, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей. Например, расстановка ладей рисунка 24 удовлетворяет условию задачи.)

Д. Карпов, А. Шаповалов

225. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

В. Дольников

226*. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две кучки одинакового веса и одинаковой стоимости.

А. Шаповалов

227. Любые ли шесть последовательных целых чисел можно так расставить вместо вопросительных знаков, что система уравнений

$$\begin{cases} ?x + ?y = ?, \\ ?x + ?y = ? \end{cases}$$

будет иметь решение в целых числах?

А. Шаповалов

228. Найдите три таких последовательных целых числа $a < b < c$, чтобы количества корней у уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ и $cx^2 + ax + b = 0$ были разными.

А. Шаповалов

229. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взяли точку M такую, что $BM : MC = 2 : 1$ (рис. 25). Луч DM пересекает прямую AB в точке E. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O. Луч OM пересекает прямую CD в точке F. Докажите, что прямые EF и BD параллельны.

Д. Калинин

230. Стоимость игры на игровом автомате в казино составляет 2000 долларов. При уплате игроком этой суммы автомат включается и выбрасывает 10 фишек, среди которых могут быть красные, белые и синие. Любую красную фишку можно обменять в кассе на 1 доллар, белую — на 300 долларов, а синюю фишку можно опустить в щель автомата, и тот выбросит 10 фишек. Игра продолжается, пока у игрока не кончатся синие фишки. В конце игры игрок остался при своих — ничего не выиграл и ничего не проиграл. Сколько раз сработал автомат?

И. Акулич

231. В каждой вершине кубика написано число. Про каждое из этих чисел, за исключением одного, известно, что оно на единицу больше среднего арифметического всех своих соседей (то есть чисел, соединенных с ним ребром). На сколько оставшееся число отличается от среднего арифметического своих соседей?

О. Петрачков

232. а) Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог определить, какую долю всех жителей составляют правдивые. Определите, чему равна эта доля.

б) На собрании аборигенов — лжецов и рыцарей — путешественник пытается определить самого старшего. Ему известно, что среди присутствующих лжецов и рыцарей поровну, а возрасты всех различны. Разрешено выбрать любую группу из нескольких (более одного) аборигенов и спросить любого из присутствующих, кто в этой группе самый старший. Докажите, что ни при каком количестве аборигенов путешественник не сможет гарантированно определить самого старшего, сколько бы вопросов он ни задал. (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут.)

Б. Френкин, А. Шаповалов

233. Любой дурак считает себя умным, а всех остальных — дураками. Среди умных могут быть такие, кто считает себя дураком. Но любой умный точно знает про всех, кроме себя, кто умный, а кто дурак. Опросы жителей Дурляндии позволили точно определить, кто там умный, а кто дурак. Сколько умных может быть в этой стране?

А. Жуков

234. Два натуральных числа таковы, что их сумма, их разность, а также частное от деления одного из них на другое являются факториалами. Найдите все такие пары.

И. Акулич

235. Дан правильный треугольник. Ломаную строим по следующему правилу: из точки на стороне восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с какой-либо из сторон, из полученной точки пересечения снова восстанавливаем перпендикуляр, и так далее (рис. 26). Найдите все точки на сторонах треугольника, стартовав из которых, ломаная рано или поздно попадёт в вершину треугольника.

А. Шаповалов

236. Решите в положительных числах уравнение $(x+y+z)^2 = x^3+y^3+z^3+12$.

А. Эвнин

237. Есть набор гирек массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 50 г и чашечные весы. Двое играющих по очереди перекладывают на весы по одной гирьке из набора, каждый на свою чашу. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

А. Шаповалов

238. а) Расположите числа 1, 2, 3, ..., 99, 100 в строку в таком порядке, чтобы для любых нескольких (но не всех) из этих чисел сумма занятых ими мест не совпадала с суммой самих этих чисел.

б*) При спешной посадке в аэробус пассажиры занимали первые попавшиеся места. В итоге все места оказались заняты, а для любой группы, в которой не более ста пассажиров, среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест более чем на единицу отличается от среднего арифметического номеров мест, указанных в их билетах. Каково наименьшее возможное число мест в этом аэробусе?

С. Токарев

239. а) В остром угле AOB между стенками геометрического бильярда расположены два шара P и Q. Если шар P ударить так, что он, отскочив последовательно от стенок AO и BO, столкнётся с шаром Q, то пройденное им расстояние будет таким же, как если его ударить так, что он, отскочив последовательно от стенок BO и AO, столкнётся с шаром Q. Докажите, что точки P и Q расположены на одном луче, проходящем через точку O.

б) Внутри острого угла XOY взяты точки M и N так, что $\angle XON = \angle YOM$. На луче OX отмечена точка Q так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на луче OY — точка P так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

В. Произволов

240. Имеются четыре палочки. Известно, что из них можно сложить четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что из них можно сложить четырёхугольник с двумя прямыми углами.

Л. Смирнова

241. Величина наименьшего угол A остроугольного треугольника ABC равна 45°; BD — высота. Окружность с центром O, вписанная в треугольник BCD, касается высоты в точке E. Докажите, что прямая OC параллельна прямой EF, где F — середина AB.

Д. Калинин

242. В Цветочном Городе живут 2000 коротышек. Каждый коротышка каждый день дарит подарок каждому своему другу. Во избежание разорения дареное разрешается дарить дальше, но только не тому, кто тебе этот подарок подарил. Знайка подсчитал, что никакой из подарков, который подарили любому коротышке в пятницу, не может вернуться к этому коротышке раньше чем в следующую пятницу. Докажите, что у какого-то коротышки не более 12 друзей.

Е. Черепанов

243*. У каждого из игроков есть стопка карт. Игроки берут по верхней карте из стопок и сравнивают. Если достоинства одинаковы, карты выходят из игры. Если у кого-то карта старше, то он забирает обе карты и кладет их вниз стопки: сначала карту противника, потом свою. Если у кого-то одного кончились карты, он проиграл, в остальных случаях (карты кончились одновременно или игра продолжается бесконечно) — ничья. Игроки разделили полную колоду 36 карт пополам: одному все красные, второму — все чёрные. Второй подглядел, в каком порядке первый сложил свою стопку. Докажите, что тогда он сможет так сложить свою стопку, чтобы наверняка выиграть.

А. Шаповалов, М. Шаповалов

244. Дано несколько различных натуральных чисел. Среди любых трёх из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

Е. Черепанов

2000/01 учебный год

245. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы каждая из них угрожала в точности а) одной; б) двум остальным?

И. Акулич

246. Существует ли такое натуральное число n, что арифметическая прогрессия $n+1$, $2n+1$, $3n+1$, $4n+1$, $\ldots$ не содержит ни одного куба натурального числа?

В. Сендеров, А. Спивак

247. Может ли при каком-то натуральном n число n^2+n+1 а) быть квадратом натурального числа; б) делиться на 9?

В. Произволов, В. Сендеров

248. а) Решите в натуральных числах систему уравнений $ab = x+y$ и $xy = a+b$.
б) Труляля и Траляля задумали по два натуральных числа. Сумма чисел, задуманных Траляля, равна произведению чисел, задуманных Труляля. Произведение чисел, задуманных Траляля, равна сумме чисел, задуманных Труляля. Какие числа могли они задумать?

А. Жуков

249. Начав с угла, король обошел все клетки доски размером 5×5 и вернулся на исходное поле, ни разу не сделав двух ходов подряд в одном направлении. Центры соседних полей его маршрута соединили отрезками. Докажите, что полученная ломаная самопересекается.

А. Шаповалов

250. На доске выписаны числа от -10 до 10. Разрешено стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа $(3a-4b)/5$ и $(4a+3b)/5$. Можно ли, произведя эту операцию несколько раз, добиться того, чтобы все числа стали равны друг другу?

И. Акулич

251. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенству $\frac{a+b}{c+d} < 2$. Докажите неравенство $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} < 8$.

В. Сендеров

252. Если произведение любых трёх из данных четырёх натуральных чисел является квадратом натурального числа, то и каждое из данных четырёх чисел является квадратом. Докажите это.

253. Могут ли биссектрисы двух внешних углов треугольника пересекаться на его описанной окружности?

В. Сендеров

254. Внутри выпуклого четырёхугольника нашлась такая точка O, что основания перпендикуляров разбивают стороны четырехугольника на части, удовлетворяющие неравенствам $DP \leqslant PA$, $AQ \leqslant QB$, $BR \leqslant RC$ и $CS \leqslant SD$ (рис. 27). Докажите, что точка O — центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$.

В. Произволов

255. Два жадных медвежонка нашли килограммовую головку сыра и попросили лису поделить ее поровну. Лиса сначала разломила сыр на две неравные части, а затем откусила половину от одной из этих частей (не обязательно большей). Поскольку части все еще остались неравными, лиса снова откусила от одной из частей половину, и так далее. Лишь после десятого откусывания части сравнялись, но на долю медвежат досталось меньше 20 граммов сыра.

Обиженные медвежата потом жаловались, что части можно было бы уравнять, откусывая по половине от некоторой части не более трех раз (а вовсе не десять!). Правы ли они?

И. Акулич

256. В строку записано несколько чисел. Разрешено выбрать два рядом стоящих числа, левое из которых больше правого, переставить их и умножить оба на 2. Докажите, что рано или поздно перестановки прекратятся.

А. Шаповалов

257. Два пересекающихся выпуклых четырёхугольника $ABCD$ и $KLMN$ образуют фигуру, состоящую из восьмиугольника и восьми треугольников (рис. 28). Докажите, что если высоты этих треугольников, опущенные из вершин A, B, C, D, K, L, M и N, равны, то и площади, и периметры четырёхугольников $ABCD$ и $KLMN$ равны.

В. Произволов

258. Клетчатый квадрат со стороной 1111 наименьшим числом прямолинейных разрезов разделите на единичные квадратики, если перед каждым очередным разрезом имеющиеся части можно как угодно перекладывать, не перегибая, и за один приём разрезать сразу несколько частей.

И. Акулич

259. а) Посты ГАИ размещены на перекрёстках города, причём для любого перекрёстка на нём или хотя бы на одном из соседних перекрёстков есть пост ГАИ. Всего в городе 155 перекрёстков, в каждом из которых сходится не более шести улиц. Докажите, что в городе не менее 23 постов.

б) Нефтяная компания установила бензоколонки на некоторых перекрёстках города, который имеет 162 отрезка улиц, соединяющих перекрёстки,— не более одной на двух соседних перекрёстках. Ни в каком перекрёстке не сходится более четырёх улиц. Докажите, что бензоколонок не менее 40.

О. Мельников

260. а) Для любого n-значного натурального числа a существуют такое $m \geqslant n$ и такое m-значное натуральное число b, что сумма цифр десятичной записи произведения ab равна $9m$. Докажите это.

б) Существуют 10 таких последовательных натуральных чисел, что каждое из них делится на сумму своих цифр, причём сумма цифр первого из них равна 2000, сумма цифр второго равна 2001, третьего — 2002, четвёртого — 2003, ... , десятого — 2009. Докажите это.

В. Замков

261. Криволинейный треугольник OAB представляет собой четверть круга (рис. 29). Из точки A исходит луч, который, отразившись от радиуса OB в точке K, от середины L дуги AB и от радиуса OA в точке M, приходит в точку B. Докажите равенства $\angle AKL = \angle AKL = \angle KLM = \angle LMB = 45^\circ$.

В. Произволов

Летний турнир 2001 года (Клещёвка Ивановской области)

262. Нарисуйте шестиугольник, который можно разрезать на два треугольника, но нельзя — на два четырёхугольника.

С. Волчёнков

263. В каждой клетке доски размером 16×30 сидит по жуку. Могут ли жуки перелететь на доску размером 15×32, в каждую клетку по жуку, чтобы жуки, бывшие соседями на исходной доске, оказались соседями и на новой доске? (Соседи — жуки, сидящие в клетках с общей стороной.)

И. Жук

264. В следующих многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры — одинаковыми буквами, а разные — разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

В. Каскевич

265. Можно ли первые а) 8; б) 2001 натуральных чисел расставить по кругу так, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей?

С. Токарев

266. Натуральное число разрешено увеличить на любое целое число процентов от 1 до 100, если при этом получаем натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя при помощи таких операций получить из числа 1.

А. Шаповалов

267. Оси абсцисс и ординат и графики $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ расположены так, как показано на рисунке 30. Укажите ось абсцисс и положительное направление на ней.

С. Токарев

268. Двое играют в шахматы, а ещё шестеро желающих сыграть образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди; тот, чья очередь подошла, играет с победителем и так далее. (В случае ничьей победителя определяют по жребию.) Могут ли к некоторому моменту каждые двое сыграть между собой ровно один раз?

С. Токарев

269. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих условию $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 = \frac{x^3+y^3}{2}$.

С. Токарев

270. В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены числа 1, 2, 3, ..., 9 так, что сумма каждых четырех чисел, заполняющих квадрат 2×2, равна одному и тому же числу s. (Например, $s = 20$ на рисунке 31.) Найдите все возможные значения s.

1	8	3
6	5	4
7	2	9

В. Замков

271. Придумайте такие различные стозначные числа A и B, являющиеся точными кубами, что цифры десятичной записи числа A, записанные в обратном порядке, образуют число B.

В. Замков

272. Может ли каждая из сторон выпуклого четырехугольника быть пересечена биссектрисой некоторого его угла в точке, отличной от вершины?

И. Григорьева

273. Рассмотрим всевозможные трёхчлены вида $ax^2 + bx + c$ с натуральными коэффициентами a, b и c, не превосходящими 100. Каких трёхчленов больше: имеющих хотя бы один действительный корень или не имеющих ни одного?

С. Токарев

274. Найдите все натуральные n, которые равны сумме некоторых трех различных натуральных делителей числа $n - 1$.

С. Токарев

275. В некоторой куче монет настоящих больше, чем фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково. Любая фальшивая монета отличается по весу от настоящей. Можно использовать чашечные весы, владелец которых после каждого взвешивания забирает себе в качестве арендной платы любую (выбранную им) монету из двух только что взвешенных. Докажите, что можно выделить хотя бы одну настоящую монету и оставить её себе.

С. Токарев

276. Из бумаги склеили правильный тетраэдр. Разрежьте его на 12 одинаковых бумажных равносторонних треугольников.

В. Произволов

277. У крестообразно пересекающихся четырехугольников соответствующие стороны параллельны и отстоят друг от друга на расстояние 1 (рис. 32). Докажите, что периметры четырёхугольников равны.

В. Произволов

278. Какое наибольшее количество диагоналей клеток шахматной доски можно провести так, чтобы никакие две из них не имели ни одной общей точки?

И. Акулич

279. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = CD = EF$, $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$. Докажите равенства $BC = DE = FA$.

В. Произволов

280. AM — биссектриса треугольника ABC. Найдите величину угла ABC, если $AB = BC$ и $BM = AC$.

281. Решите систему уравнений $x(1+\sqrt{y}) = y(1+\sqrt{z}) = z(1+\sqrt{x}) = 2$.

С. Дворянинов

282. Клетчатый прямоугольник 2×3 можно сложить из 17 спичек, как показано на рисунке 33. Какие размеры может иметь клетчатый прямоугольник, аналогично составленный из 1000 спичек?

А. Шаповалов

283. В кубе с ребром 2000 разместите 7 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 2001.

С. Волчёнков

284. Целые числа x, y, z таковы, что числа $xy+1$, $yz+1$ и $zx+1$ являются квадратами. Докажите, что произведение xyz кратно 8.

В. Сендеров

285. Биссектрисы AA', BB', CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что из отрезков IA', IB', IC' можно составить остроугольный треугольник.

С. Токарев

286*. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляем пешки по следующим правилам: выбираем любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставим пешку. Затем выбираем аналогичные четыре пустые клетки, на них снова ставим пешку, и так далее. Какое наибольшее число пешек можно поставить на доску, соблюдая эти правила?

И. Акулич

287*. Натуральное число называют палиндромом, если оно не меняется, если его цифры записать в обратном порядке. Докажите, что для любого нечётного и не кратного числу 5 числа $p > 150$ существует палиндром, делящийся на p и содержащий не более $0{,}23p$ цифр.

И. Акулич

288. В однокруговом хоккейном турнире все команды набрали разное число очков. (В хоккее за победу дают 2 очка, за ничью 1, а за поражение — 0 очков.) Команда, занявшая последнее место, выиграла не менее 25% своих матчей, а команда, занявшая второе место, выиграла не более 40% своих матчей. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этом турнире?

И. Воронович

289. Какое наибольшее количество королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы ровно половина из них не угрожала ни одному из остальных?

И. Акулич

290. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка F, а на отрезке AF — точка E. Если треугольник CEF равносторонний, а D — середина гипотенузы, то $\angle DCF = 2 \cdot \angle ACE$. Докажите это.

Д. Калинин

291*. На территории завода четыре асфальтовые дорожки длиной 10 м каждая образуют квадрат. В двух соседних вершинах квадрата стоят двое рабочих, держа на плечах десятиметровую трубу. Им необходимо, передвигаясь по дорожкам и не выпуская при этом трубы, поменяться местами. Из соображений безопасности запрещено двигаться со скоростью более 1 м/с. За какое наименьшее время рабочие могут справиться с заданием? (Внутри квадрата нет никаких сооружений, создающих помехи при переноске трубы).

И. Акулич

292. Окружность пересекает стороны равностороннего треугольника, как показано на рисунке 34. Докажите равенство $AC_1 + BA_1 + CB_1 = AB_2 + CA_2 + BC_2$.

В. Произволов

293*. Разрежьте квадрат на шесть частей так, чтобы ими можно было полностью и без перекрытий оклеить поверхность некоторого куба.

С. Токарев

294*. Натуральное число назовём удобным, если его можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, суммы цифр которых одинаковы. Докажите, что существуют 1 000 000 последовательных натуральных удобных чисел.

С. Токарев

295*. Рассмотрим множество всех квадратных таблиц размером $n \times n$, где $n > 1$, заполненных натуральными числами 1, 2, ..., n^2. Пусть A — множество тех таких таблиц, которые можно получить перестановками столбцов и перестановками строк из таблицы, в которой в первой строке стоят по порядку числа 1, 2, ..., n, во второй — $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ и так далее; B — множество таблиц, из любой из которых можно получить таблицу, во всех клетках которой все числа равны, при помощи (возможно многократного) применения операций прибавления единицы ко всем числам некоторой (произвольно выбранной) строки или (тоже всякий раз заново произвольно выбираемого) столбца. Докажите, что $A = B$ тогда и только тогда, когда n — простое.

Д. Калинин

296*. В середине одной из стен квадратной комнаты размером 3×3 имеется проход шириной 1. Можно ли в эту комнату внести какой-нибудь стол площади более 4?

С. Г. Волчёнков

297. Существуют ли такие различные натуральные числа x, y, z, для которых $\text{НОК}[x, y, z] = \text{НОК}[x+1, y+1, z+1] = \text{НОК}[x+2, y+2, z+2]$?

С. Токарев

2001/02 учебный год

298. Каждое из данных десяти чисел умножили на число a и прибавили к каждому из произвдений число b. Полученное множество совпало с исходным. Верно ли, что а) $|a| = 1$; б) $b = 0$?

В. Сендеров

299. Можно ли расставить на шахматной доске несколько фишек так, чтобы количества фишек на соседних вертикалях отличались в 2 раза, а на соседних — в 3 раза?

И. Акулич

300. Положительные числа a, b и c таковы, что

$$a^3+b^3+c^3=(a+b-c)^3+(a-b+c)^3+(b+c-a)^3.$$

Докажите равенства $a=b=c$.

В. Произволов

301. В грибе, представляющем из себя квадрат 16×16, завелись 13 червяков. Каждый червяк представляет из себя цепочку из пяти квадратиков, в которой каждые два последовательных квадратика имеют общую сторону.

а) Докажите, что одним разрезом, параллельным стороне квадрата, можно разрезать по крайней мере трёх червяков.

б) Останется ли верным утверждение пункта а), если один из червяков выползет из гриба?

И. Жук

302. Можно ли расположить десять карточек с цифрами 0, 1, 2, ..., 9 по кругу так, чтобы все числа, образованные стоящими рядом двумя цифрами (числа читаем по часовой стрелке), имели общий делитель, больший единицы?

В. Замков

303. Величина угла A ромба $ABCD$ равна 60°. Прямая, проходящая через точку C, пересекает AB и AD в точках M и N. Докажите, что величина угла между прямыми MD и NB равна 60°.

А. Заславский

304. В каждую клетку прямоугольной таблицы, количество строк которой больше количества ее столбцов, записали букву A или букву $У$. При этом букву A записали 33 раза, а $У$ — 7 раз, причём вблизи каждой буквой A разместилась ровно одна буква $У$. (Две клетки считаем близкими, если они имеют общую сторону или вершину.) Все строки, в которых записано хотя бы по одной букве $У$, вычеркнули. Сколько букв A осталось в таблице?

И. Акулич

305. Карлсон раздобыл брусок сыра — прямоугольный параллелепипед размерами $2000\times2001\times2002$ — и предложил Малышу полакомиться сыром и заодно сыграть в следующую игру. Сначала Малыш делит брусок прямолинейным разрезом на два меньших бруска с целочисленными сторонами и один из них съедает. Затем Карлсон делит оставшийся брусок прямолинейным разрезом на два меньших бруска с целочисленными сторонами и один из них съедает. И так далее, по очереди. Выигрывает тот, кто первым съест сырный кубик $1\times1\times1$. Кто выиграет при правильной игре?

А. Малеев

306. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ таков, что $\angle A=\angle B$, $\angle C=\angle D$, $\angle E=\angle F$ и $BC=DE=FA$. Докажите, что шестиугольник вписанный.

В. Произволов

307. Равенство $a^5+b^5=(a+b)^5$ равносильно равенству $ab^2+ba^2=0$. Докажите это.

В. Сендеров

308. Придумайте такие пятизначные числа a и b, что если к десятичной записи числа a приписать десятичную запись числа b, то получим десятизначное число, делящееся на ab.

Д. Карпов, В. Сендеров

309. При каких натуральных n из первых n натуральных чисел можно выбрать два числа, произведение которых вдвое больше суммы всех остальных чисел?

И. Акулич

310. Точки I и O — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, а M — середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Докажите, что $\angle ABC = 60^\circ$ тогда и только тогда, когда $MI = MO$.

В. Сендеров

311. Каждый из 1000 островитян всегда лжет или всегда говорит правду. Прибывший на остров следователь может раз в день выбрать любую множество островитян и спросить каждого из выбранных, сколько среди выбранных островитян лжецов. (Каждый островитянин про каждого из остальных и про себя знает, лжец или нет.) За какое наименьшее число дней следователь заведомо может выяснить, кто из островитян лжец, а кто правдивый, если не все островитяне лжецы?

Е. Барабанов

312. Зал размером 90×90 разделен на квадратные комнаты размером 10×10 метров. В каждой из стен между соседними комнатами имеется дверь, а в наружной стене дверей нет. Какое наибольшее число дверей можно открыть, чтобы в каждой комнате оказались открытыми не более а) одной двери; б) двух дверей; в) трёх дверей?

И. Акулич

Летний турнир 2002 года (Кострома)

313. Заполните клетки таблицы размером 10×10 крестиками и ноликами так, чтобы нигде ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали не стояли три одинаковых значка подряд.

В. Гуровиц

314. В записи $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6$ на местах, отмеченных звёздочками, стоят знаки: плюсы или минусы. Любые два знака, разделённые цифрой, можно заменить на противоположные. Докажите, что можно сделать значение выражения кратным числу 7.

Е. Барабанов, И. Воронович

315. Расположите на плоскости 8 точек так, чтобы на серединном перпендикуляре к любому отрезку с концами в этих точках лежали ровно две из этих точек.

В. Гуровиц

316. Точку отразили относительно некоторых четырёх прямых. Её образы попали на некоторую окружность с центром O. Затем точку O отразили относительно тех же прямых. Докажите, что образы точки O принадлежат некоторой окружности.

В. Произволов

317. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Отрезки AI, BI и CI пересекают окружность в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

В. Произволов

318. Внутри прямоугольника выбрана произвольная точка и соединена отрезками с вершинами. Докажите, что среди полученных четырёх отрезков обязательно найдутся три, из которых можно составить треугольник.

319. Сложите из бумажного прямоугольника размером 2×5 двуслойную коробку размером $1 \times 1 \times 1$ без крышки. (Бумагу можно гнуть и надрезать, но нельзя резать на отдельные куски.)

С. Волчёнков

320. Найдите все такие тройки простых чисел, что произведение любых двух из них при делении на третье даёт остаток 1.

Б. Френкин

321. Первые n натуральных чисел, где $n > 10$, можно разбить на два множества таким образом, чтобы произведение чисел первого из них равнялось сумме чисел второго. Докажите это.

А. Шаповалов

322. На нижней горизонтали доски размером 2×25 выстроились фишки с номерами от 1 до 25 по порядку. За один ход можно переставить одну фишку на пустую соседнюю по горизонтали или вертикали клетку. За какое наименьшее число ходов можно расставить все фишки на нижней горизонтали в обратном порядке?

А. Шаповалов

323. Любую степень двойки можно умножить на такое натуральное число, что произведение окажется палиндромом — числом, десятичная запись которого слева направо читается так же, как и справа налево. Докажите это.

А. Шаповалов

324.* Любое ли натуральное число представимо в виде разности двух палиндромов?

А. Шаповалов

325. Для любого натурального $n > 1$ существуют $2n$ таких попарно различных натуральных чисел, что произведение факториалов первых n из них равно произведению факториалов n других. Докажите это.

А. Егоров, В. Сендероов

326. В ряд выписаны числа от 1 до 50 в некотором порядке. Разрешено менять местами два числа, если разность их позиций равна наибольшему общему делителю этих чисел. Любое ли расположение чисел можно получить такими операциями?

А. Чеботарёв

327. Натуральные числа от 1 до 22 записаны в виде последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{22}$ таким образом, что $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{21} - a_{22}| + |a_{22} - a_1| = 242$. Чему равна сумма $|a_1 - a_{12}| + |a_2 - a_{13}| + \ldots + |a_{10} - a_{21}| + |a_{11} - a_{22}|$?

В. Произволов

328.* По окружности расставлены в некотором порядке натуральные числа от 1 до n. Для каждой пары соседних чисел вычислим их произведение. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих произведений?

И. Акулич

329. На доску размером 11×11 клеток положили несколько квадратов размером 2×2 так, что каждый квадрат закрывает ровно 4 клетки и никакие два квадрата не пересекаются более чем по одной клетке. Какое наибольшее число квадратов могло быть?

Д. Калинин

330. Если сторона BC треугольника ABC вдвое длиннее стороны AB и $\angle ABC = 120^\circ$, то медиана BM перпендикулярна стороне AB этого треугольника. Докажите это.

331. По четырём одинаковым окружностям единичного радиуса с центрами в вершинах квадрата со стороной длины 2 вечно бегут спортсмены, не переходя с окружности на окружность. Из любых трёх спортсменов хотя бы двое периодически встречаются. Каково наибольшее возможное число спортсменов? (Спортсмены встречаются, если они бегут по одной окружности в противоположных направлениях или если

они бегут по касающимся окружностям и одновременно оказываются в точке касания.)

А. Чеботарёв

332. Действительные числа a и b таковы, что $a+b^5 > ab^5+1$. Докажите неравенство $b+a^7 > a^7b+1$.

Е. Барабанов, И. Воронович

333. Решите систему уравнений $x=\frac{\sqrt{yz}}{y+z}$, $y=\frac{\sqrt{zx}}{z+x}$ и $z=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$.

А. Жуков

334. Таня задумала натуральное число, не превосходящее 100. Саша его угадывает. Если он угадал, то Таня так и говорит: «Угадал!» Если же названное Сашей число не совпадает с тем, которое в этот момент имеется у Тани, то она молча делит имеющееся в этот момент у неё число на Сашино, если делится нацело, а если не делится, то молча умножает имеющееся у неё число на Сашино и прибавляет единицу. Помогите Саше угадать задуманное Таней число.

А. Шаповалов

335*. Какое наибольшее число полей шахматной доски можно отметить так, чтобы центры никаких четырёх отмеченных клеток не оказались вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски?

А. Шаповалов

336. В полном однокруговом турнире участвуют n команд. Они договорились, что каждая команда в своей k-й игре забивает k голов. Каково наименьшее возможное число ничьих в таком турнире?

А. Чеботарёв

2002/03 учебный год

337. На описанной окружности квадрата $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $\angle PAQ = 45^\circ$ (рис. 35). Отрезки AP и BC пересекаются в точке M, а AQ и CD — в точке N. Докажите параллельность отрезков PQ и MN.

В. Произволов

338. Найдите $\tau(a+2b)$, если a и b — такие натуральные числа, что $\tau(a)=b$ и $\tau(b)=a/2$, а $\tau(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n.

И. Акулич

339. Из квадрата размером 5×5 вырезали 5 кругов диаметра 1. Докажите, что из оставшейся фигуры можно вырезать два прямоугольника размером 1×2.

А. Малеев

340*. В тёмном чулане 7 гномов хранят колпаки. Колпаков любого цвета столько же, сколько колпаков любого другого цвета. Проснувшись как-то утром, один из гномов попросил Белоснежку принести 10 колпаков одного цвета. Она пошла в чулан и отсчитала в темноте столько колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулись остальные гномы, и второй попросил 9 колпаков одного цвета, третий — 8, и так далее вплоть до седьмого гнома, который попросил 4 колпака одного цвета. Чтобы выполнить просьбы всех гномов, Белоснежке пришлось ещё раз сходить за колпаками. Какое наибольшее число цветов могли иметь колпаки, хранящиеся в чулане?

А. Малеев

341. Девять сторон равностороннего десятиугольника касаются окружности. Докажите, что и десятая сторона касается этой окружности.

В. Произволов

342. Числа от 1 до mn, где $2 \leqslant n \leqslant m$, расставили в виде таблицы из m строк и n столбцов. Докажите существование двух клеток, имеющих общую сторону или вершину, числа которых отличаются не менее чем на $n+1$.

И. Акулич

343. Существует ли такое натуральное число n, что $n > 1$ и число n^2 представимо в виде суммы n квадратов последовательных целых чисел?

В. Сендеров, А. Спивак

344. Робинзон поручил Пятнице запастись бананами, кокосами, ананасами и дурианами. Пятница решил каждый принесённый банан отмечать палочкой, кокос — палочкой и кружочком, ананас — двумя кружочками. Может ли Пятница отмечать дуриан какой-нибудь последовательностью из палочек и кружочков, чтобы по его записи (Пятница пишет слева направо без пробелов) Робинзон всегда мог установить, сколько каких плодов запасено?

А. Малеев

345. Сколько существует трёхзначных чисел, представимых в виде $\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{a}$, где a, b, c — цифры, причём $a \neq 0$?

А. Спивак

346. Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом или трапецией тогда и только тогда, когда произведение площадей треугольников ABD и BCD равно произведению площадей треугольников ABC и ACD. Докажите это.

347. а) Среди чисел вида $5^n - 5^m$, где m и n — натуральные числа, $n > m$, бесконечно много квадратов. Докажите это.

б) Среди чисел вида $7^n + 7^m$, где m и n — натуральные числа, нет ни одного квадрата, но есть бесконечно много кубов. Докажите это.

А. Зайчик

348. Имеется 10 столбиков, в первом из которых 61 монета, во втором — 62, ..., в десятом — 70 монет. За один ход можно забирать монеты из одного или нескольких столбиков (даже со всех сразу), но ни для какого столбика количество снятых с него монет не превышает $\sqrt{n}$, где n — количество монет, к данному моменту находящихся в столбике. Победитель — тот, кто взял последнюю монету. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, то есть может победить, как бы ни играл его противник?

И. Акулич

349. Сумма первых n натуральных чисел равна произведению двух последовательных натуральных чисел тогда и только тогда, когда число $n^2+(n+1)^2$ является квадратом целого числа. Докажите это.

В. Произволов

350. Андрей, Борис, Василий, Геннадий и Дмитрий играли в настольный теннис парами так, что каждые двое сыграли с каждой другой парой один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Андрей в общей сложности проиграл 12 раз, а Борис — 6 раз. Сколько раз выиграл Геннадий?

В. Каскевич

351. Один из серединных перпендикуляров треугольника делит его на две части, площадь одной из которых вдвое больше площади другой. Другой серединный перпендикуляр делит треугольник на две части, площадь одной из которых втрое больше площади другой. Во сколько раз различаются площади частей, на которые треугольник разрезан третьим его серединным перпендикуляром?

И. Акулич

352. Для любого натурального числа n число $n^{n+1}+(n+1)^{n+2}+(n+2)^{n+3}$ составное. Докажите это.

А. Зайчик

Летний турнир 2003 года (Судиславль)

353. Дон Кихот одержал победу над 10 ветряными мельницами. Некоторым он отрубил по два крыла, некоторым три, а остальным — все четыре. Первые три мельницы в сумме потеряли в полтора раза меньше крыльев, чем остальные семь. Мельниц, ставших однокрылыми, больше, чем мельниц, ставших двукрылыми. Сколько мельниц лишились всех четырёх крыльев?

И. Акулич

354. В круговом турнире участвуют 10 команд. Для победы в турнире надо набрать строго больше очков, чем любая из остальных команд. Через какое минимальное количество туров может выявиться победитель?

М. Мазин

355. Полукруг касается катета BC прямоугольного треугольника ABC в точке M (рис. 36). Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

В. Произволов

356*. Для любого натурального n существует клетчатая фигура, которую можно разрезать на двухклеточные доминошки ровно n способами. Докажите это.

А. Шаповалов

357. На шахматной доске стоят ладьи так, что каждая из них бьёт больше белых ладей, чем чёрных. Может ли чёрных ладей быть больше, чем белых?

И. Акулич

358*. Тринадцать шахматистов в течение трёх дней должны сыграть друг с другом по одной партии. Составьте турнирное расписание так, чтобы в каждый из дней для любых двух шахматистов, не играющих в этот день между собой, существовал шахматист, играющий в этот день с обоими.

С. Токарев

359. Нарисуйте на плоскости несколько точек, более половины из них покрасьте и соедините некоторые из них непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило не менее 3 отрезков, но никакие две окрашенные точки не были соединены отрезком.

А. Спивак

360. Восьмого марта каждая из n учительниц пришла в школу с букетом из одного цветка. Все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все или часть имеющихся у неё к моменту дарения цветов. Нельзя дарить букет, если в точности такой кто-то кому-то уже дарил. Какое наибольшее число букетов могло быть подарено?

А. Чеботарёв

361. В одну строку выписаны 40 знаков: 20 минусов и 20 плюсов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее число ходов можно гарантированно добиться того, чтобы некоторые 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками?

И. Акулич

362. Король, которому запрещено ходить по диагонали, сделал несколько ходов (посетив, возможно, некоторые поля неоднократно). Он побывал на всех белых полях. Каково наименьшее число чёрных полей, на которых он побывал?

И. Акулич

363. Какое наибольшее количество натуральных чисел, ни одно из которых не представимо в виде ab^2, где числа a и b взаимно просты, причём $b > 1$, может идти подряд?

А. Шаповалов

364. Через вершины B и G конгруэнтных прямоугольников $ABCD$ и $DEFG$, расположенных, как показано на рисунке 37, провели прямую, которая пересекла прямую AD в точке M. Докажите перпендикулярность прямых MN и BE.

Д. Калинин

365. Могут ли три разных числа вида $2^n + 1$, где n а) целое; б) натуральное, быть последовательными членами геометрической прогрессии?

В. Сендеров

366. В ряд лежат 100 штабелей бетонных плит: в крайнем справа — 1 плита, во втором — 2, ... , в 100-м штабеле — 100 плит. Солдату приказано перераспределить плиты по штабелям, двигая их направо. Сил поднять плиту у него нет, поэтому он может передвинуть плиту в соседний справа штабель, только если там плит меньше. Как будут распределены плиты по штабелям после того, как солдат сделает всё, что может?

Д. Калинин, А. Чернятьев

367. Придумайте такие целые попарно взаимно простые числа x, y, z и t, не равные нулю, что $(x + y + z)(x + y + t)(x + z + t)(y + z + t) = xyzt$.

В. Сендеров

368. В куче лежат n камней. Двое по очереди берут из неё камни. За один ход можно взять один или два камня. Чтобы выиграть, игроку надо взять последний камень и, кроме того, набрать в сумме не меньше камней, чем соперник. При каких n один из игроков может обеспечить себе победу при любой игре соперника?

Е. Барабанов, И. Воронович

369. Добрая фея просматривает оценки Вовочки слева направо и, как только находит подряд идущие тройку и двойку (или двойку и тройку), тут же превращает их в пятёрку. Докажите, что если бы фея просматривала оценки справа налево, то пятёрок Вовочка получил бы столько же.

А. Чеботарёв

370. Можно ли представить число 110 в виде суммы натуральных слагаемых (не обязательно различных), сумма обратных величин которых равна 1?

А. Шаповалов

371. Шагреневая кожа исполняет желания, но после каждого желания её площадь уменьшается: на 1 квадратный дециметр в «обычном» случае, вдвое — если желание заветное. Десять желаний уменьшили площадь кожи втрое, следующие несколько — ещё всемеро, а ещё через несколько желаний кожа вообще пропала. Какова первоначальная площадь кожи?

И. Акулич

372. Во всех клетках шахматной доски, кроме восьми клеток диагонали a1–h8, расставлено по одной шашке. Петя и Коля играют, делая ходы по очереди. Петя каждым своим ходом снимает с доски не более 14 шашек, а Коля выбирает любую клетку диагонали a1–h8 и ставит шашки во все пустые клетки, находящиеся с ней на одной вертикали или горизонтали (на диагональ шашку он не ставит). Может

ли Петя добиться того, чтобы после его очередного хода на доске осталось не более трёх шашек?

И. Акулич

373. На складе лежат 27 деталей, каждая промаркирована первым или вторым сортом. Детали одного сорта весят одинаково; каждая деталь второго сорта легче детали первого сорта. Известно, что ровно одна из деталей промаркирована неправильно. Докажите, что её можно наверняка выявить за три взвешивания на чашечных весах без гирь.

А. Шаповалов

374. В куче лежат 2003 ореха. Можно разбивать любую кучку на две части, но чтобы разбить на две неравные части, приходится платить рубль. Какую наименьшей суммы достаточно, чтобы получить 2003 кучки по одному ореху в каждой?

А. Шаповалов

375. С помощью циркуля и линейки разделите произвольный треугольник на три треугольника, в каждом из которых можно выбрать по медиане так, что длины выбранных медиан равны.

А. Шаповалов

376. В начале игры есть 100 одинаковых а) квадратов; б) прямоугольников размером 1×2. Каждым ходом игрок выбирает из имеющегося набора некоторые два прямоугольника, которые можно склеить по стороне в один прямоугольник, и склеивает их. Двое ходят по очереди. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

А. Шаповалов

377*. На некоторых клетках шахматной доски сидели лягушки. Поссорившись с соседями, в некоторый момент все они одновременно перепрыгнули на соседние клетки (соседними считаем клетки, имеющие общую сторону или общую вершину). При этом на каждой клетке вновь оказалось не более одной лягушки, но все бывшие соседи перестали быть соседями. Какое наибольшее количество лягушек могло сидеть на доске?

378. Если к цифре 5 приписать слева двойку, получится квадрат: $25 = 5^2$. Если приписать ещё одну двойку, снова получится квадрат: $225 = 15^2$. Будут ли ещё появляться квадраты, если слева продолжать приписывать двойки?

379. На съезд собрались 100 делегатов, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Первое же заседание по одному покинули 60 делегатов. Выходя из зала, каждый заявлял журналистам: «Среди оставшихся там лживых больше, чем правдивых.» Сколько всего лжецов среди делегатов съезда?

2003/04 учебный год

380. Прямая, проведённая через середину диагонали AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ параллельно прямой BD, пересекает в точке M прямую, проведённую через середину отрезка BD параллельные AC (рис. 38). Докажите равенства $S_{ABM} = S_{CMD}$ и $S_{BMC} = S_{AMD}$.

М. Волчкевич

381*. В мастерской изготавливают квадратные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трёх стержней длиной 1, сваренных под прямыми углами в виде буквы П. При изготовлении решётки запрещено накладывать стержни друг на друга; можно лишь сваривать их между собой в точках касания. Для каких n мастерская может изготовить квадратную решётку размером $n \times n$? (На рисунке 39 показано, что при $n = 2$ — можно.)

И. Воронович, Е. Барабанов, И. Акулич

382. Фирма, состоящая из шефа и нескольких рабочих, изготавливает сувениры. В течение дня каждый из рабочих изготавливает по одинаковому целому количеству сувениров, а шеф — тоже целое число сувениров, но на 13 больше, чем в среднем каждый из сотрудников фирмы (включая и его самого). Сколько рабочих трудится в этой фирме?

И. Акулич

383. Чему может равняться $\{x+y+z\}$, если $\{x+y\}=\{y+z\}=\{z+x\}=1/3$?

Д. Калинин

384. Все натуральные числа выписаны в порядке возрастания без разделителей:

$$1234567891011121314\ldots$$

Докажите, что существует число, образованное первыми несколькими цифрами этой последовательности и делящееся на 2003.

И. Акулич

385. Для любого натурального числа m докажите существование таких различных натуральных чисел k и n, что k делится на n, $k+1$ делится на $n+1$, ..., $k+m$ делится на $n+m$.

В. Замков

386. Прямоугольник расчерчен в виде таблицы из m строк и n столбцов. Строки могут различаться по высоте, а столбцы – по ширине. Какое наименьшее число клеток мы можем указать, чтобы после того, как нам сообщат их площади, можно было вычислить площади всех остальных клеток таблицы?

И. Акулич

387. Можно ли из 1 единицы, 2 двоек, 3 троек, ..., 9 девяток составить число так, чтобы между каждыми двумя ближайшими девятками стояла 1 цифра, между каждыми двумя ближайшими восьмёрками — 2 цифры, между каждыми двумя ближайшими семёрками — 3 цифры, ..., между каждыми двумя ближайшими тройками — 7 цифр, а между двумя двойками — 8 цифр?

А. Жуков

388. На плоскости даны три точки A, B и C. Разрешено выбрать любые две из них и повернуть отрезок, их соединяющий, относительно его середины. После того как такую операцию проделали несколько раз, точка A совпала с исходным положением точки B, а точка B не совпала с исходным положением точки C. Докажите, что точка C не совпала с исходным положением точки A.

Е. Барабанов, И. Воронович

389. Всякий квадратный трёхчлен можно представить в виде разности двух квадратных трёхчленов, ни один из которых не имеет корней. Докажите это.

Е. Барабанов, И. Воронович

390. Существует ли такое 99-значное число a, что 198-значное число $\overline{aa}$, десятичная запись которого состоит из двух десятичных записей числа a, делится на a^2?

В. Сендеров

391*. Таблица размером 5×5 заполнена числами. В каждом из 30 прямоугольников, состоящих из трёх клеток каждый, подсчитали сумму чисел. Все суммы разные. Какое наименьшее количество ненулевых чисел может быть в этой таблице?

А. Малеев

Летний турнир 2004 года (Судиславль)

392. а) Можно ли расставить по кругу все натуральные числа от 1 до 25 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел равнялась квадрату какого-нибудь натурального числа?

б) Существует ли такое натуральное $n > 1$, что первые n натуральных чисел можно выписать в некотором порядке так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом?

И. Акулич, В. Сендеров

393. Две окружности касаются друг друга в точке C и прямой l — в точках A и B. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D. Докажите, что угол ABD — прямой.

А. Заславский

394. Сумма положительных чисел x, y, z и t равна 1. Докажите неравенство $(1-x)(1-y)(1-z)(1-t) \leqslant \frac{5}{16} + xyzt$.

В. Сендеров

395*. На кольцевой шнур нанизана связка колец разного размера с номерами от 1 до n. Если номера колец отличаются на 2 или больше, их можно поменять местами, продев одно в другое. Кольца с соседними номерами так поменять нельзя. Докажите, что кольца можно расположить в любом порядке.

А. Шаповалов

396. Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: чётных с нечётной суммой цифр или нечётных с чётной суммой цифр?

А. Зайчик

397*. Какое наименьшее число клеток доски размером 8×8 надо покрасить, чтобы можно было окрасить их все при помощи (возможно неоднократной) следующей операции: если более половины клеток горизонтали или вертикали уже покрашено, то разрешено покрасить и все ещё не покрашенные клетки этой горизонтали или вертикали?

Д. Калинин

398. а) Для любых целых чисел a и b уравнение $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ имеет решение в целых числах x и y. Докажите это.

б) Существует ли такое число, представимое в виде $a^2 + ab + b^2$, где a, b — целые неотрицательные числа, но не представимое в виде $c^2 - cd + d^2$, где c, d — тоже целые неотрицательные числа?

399. Прямоугольный стол размером 1×2 покройте в два слоя пятью одинаковыми квадратными салфетками площади 4/5. (Салфетки разрешено перегибать).

В. Произволов

400. Число называют палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (например, 1991). Может ли получиться палиндром при сложении чисел ВОДА и СОДА?

А. Зайчик

401. Новая шахматная фигура «пулемётчик» — это ладья, бьющая только в одну из четырёх сторон. Какое наибольшее число пулеметчиков можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

В. Трушков

402. На стороне BC квадрата $ABCD$ взята точка M, а на стороне CD — точка N. Докажите, что если $\angle MAN = 45^\circ$, то центр описанной окружности треугольника AMN лежит на диагонали AC.

В. Произволов

403. На столе лежит стопка из n тетрадей, где $n > 2$. Разрешено разделить стопку на 3 части: верхнюю, среднюю и нижнюю (каждая часть должна содержать хотя бы одну тетрадь), а затем поменять местами верхнюю и нижнюю стопки, не переворачивая их. При каких n с помощью нескольких таких операций можно расположить тетради в любом заранее указанном порядке?

И. Акулич

404. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы каждая из них угрожала нечётному количеству остальных?

И. Акулич

405*. Каждая грань куба разбита на 9 одинаковых квадратов (наподобие кубика Рубика). Назовём соседями квадраты, имеющие общую сторону или вершину. В каждом квадрате записали неотрицательное число. Для любого квадрата сумма чисел, стоящих в этом квадрате и во всех его соседях, одна и та же. Петя записал, сколько раз встретилось каждое из чисел. Насколько маленьким могло оказаться самое большое из записанных им чисел?

И. Акулич

406*. Точки I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$. Следует ли из равенств $AI = A'I'$, $BI = B'I'$ и $CI = C'I'$ конгруэнтность треугольников ABC и $A'B'C'$?

В. Сендеров

407. В клетках таблицы 5×5 расставлены все числа от 1 до 25. Для каждой пары чисел, стоящих в одной строке или одном столбце, подсчитана их сумма. Пусть a — наименьший, а b — наибольший из полученных результатов. Найдите наименьшее возможное значение разности $b - a$.

С. Волчёнков

408. В области есть 102 дороги. Каждая дорога ведет из некоторого одного города в некоторый другой. Можно проехать из любого города в любой другой. Губернатор решил отремонтировать все дороги, организовав для этого n бригад. Он хочет, чтобы каждая бригада отремонтировала одно и тоже количество дорог, причём любая бригада должна передвигаться по всем своим дорогам, не пользуясь чужими дорогами. При каких n это возможно для любой схемы дорог?

С. Волчёнков

409. В стране 2004 города, причём каждый из них соединен с каждым ровно одной дорогой, но ГИБДД все дороги перекрыло. Начальник Гриша хочет открыть как можно большее количество дорог, а начальник Ваня стремится ему помешать. Какое наибольшее количество дорог может оказаться открытым после очередного приказа Гриши, если он каждым приказом может открыть пять любых дорог, а Ваня на каждый такой приказ закрывает все дороги, выходящие из некоторого одного города?

А. Чеботарёв

410. Какое наибольшее количество чисел, каждое из которых делится на любую свою ненулевую цифру, может идти подряд?

В. Замков

411. На шахматной доске расставлены жёлтые, красные и синие ладьи — поровну каждого цвета. Ладьи разного цвета не угрожают друг другу. Найдите наибольшее возможное количество ладей при такой расстановке.

И. Акулич

2004/05 учебный год

412. Для каких простых p число $2^p + 1$ делится на 9?

В. Сендеров

413. Решите в целых числах систему уравнений $ux - vy = 2$ и $vx + uy = 2$.

А. Жуков

414. В стол воткнули три вертикальных стержня. На первый стопкой надели n красных колец, на второй — n синих, а третий оставили пустым. За один ход разрешено снять верхнее кольцо с любого стержня и надеть его на любой другой стержень поверх имеющихся на нем колец. Каждый стержень может вместить все кольца. Надо переложить кольца так, чтобы они снова лежали на первых двух стержнях, но чтобы цвета чередовались, причем на первом стержне чередование должно начинаться с синего кольца (считая снизу), а на втором — с красного.

а) За какое наименьшее число ходов этот можно сделать?

б) Для каких n можно было бы осуществить такое перекладывание, если бы каждый стержень вмещал не более n колец?

И. Гагуа, И. Акулич

415. Решите систему уравнений $x + \sqrt{z} = 2$, $y + \sqrt{x} = 5$ и $z + \sqrt{y} = 1$.

С. Дворянинов

416. При каких k существует круговой волейбольный турнир в один круг с участием k команд, для коорого верно следующее утверждение: если некоторая команда A победила команду B, то существует такая команда C, которая проиграла команде B, но победила команду A? (В волейболе ничьих не бывает.)

И. Акулич

417. Существует такое 2004-значное натуральное число n, что сумма цифр числа n равна сумме цифр числа kn для любого натурального $k \leqslant n$. Докажите это.

Г. Гальперин

418. На плоскости дан квадрат площади 1. Разрешено выбрать любые две его вершины и перенести одну из них на любое расстояние, а другую — на то же расстояние в противоположном направлении. После нескольких таких операций получили квадрат, конгруэнтный исходному. Докажите, что площадь пересечения исходного и полученного квадратов не меньше 0,8.

И. Акулич

419. Если a, b, c и d — натуральные числа, причём $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$, то $a+b = c+d$. Докажите это.

В. Сендеров, А. Спивак

420. Существуют ли такие положительные числа x, y и z, что $x + y + z = 1$ и $(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$?

В. Сендеров

421. Существует бесконечно много таких натуральных n, что если к десятичной записи числа 2^n приписать слева десятичную запись числа 2^{n+1}, то получим число, делящееся на 7. Докажите это.

А. Зайчик

422. Длины катетов одного прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза — c. Длины катетов другого прямоугольного треугольника равны x и y, а гипотенуза — z. Длины катетов третьего прямоугольного треугольника равны $a+x$ и $b+y$, а гипотенуза — $c+z$. Докажите, что эти треугольники подобны.

В. Сендеров

423. Имеется шахматная доска и несколько одинаковых кубиков (грань кубика по размерам совпадает с клеткой доски). У каждого кубика две противоположные грани белые, а все остальные — чёрные. Кубики поставили на некоторые клетки доски и прокатили по ней, перекатывая через ребро, так, что на каждой клетке хотя бы раз побывал какой-либо кубик, причём цвет клетки всегда совпадал с цветом соприкасающейся с ней грани. Можно ли это сделать, пользуясь а) одним; б) двумя кубиками?

И. Акулич

424. Часть квадратного поля размером 180×180 засеяли рожью. Оказалось, что на любом участке размером 40×100, стороны которого параллельны сторонам поля, засеяно не менее 91% площади. Какое наименьшее число процентов площади поля могли засеять рожью?

А. Малеев

425. Найдите все такие натуральные числа x и ненулевые цифры y, что $x^2 = \overline{yy\ldots yy}$.

В. Сендеров

426. Замкнутая десятизвенная ломаная $ABCDEFGHIJ$ такова, что совпадают середины пар звеньев AB и FG, BC и GH, CD и HI, DE и IJ. Докажите, что середины ребер звеньев EF и IA тоже совпадают.

И. Акулич

427. Если a и b — такие натуральные числа, что НОК$[a;b] = (a - b)$НОД$(a;b)$, то НОК$[a;b] =$ $=$ НОД$[a,b]^2$. Докажите это.

А. Жуков

428*. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить, чтобы не нашлось ни одного тупоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток?

И. Акулич

429*. Плоскость разделена вертикальными и горизонтальными прямыми на одинаковые квадраты. В каждом из них записано натуральное число, причем каждое число n записано ровно в n клетках (то есть на доске одна единица, две двойки, три тройки, ...). Для каждой пары клеток, имеющих общую сторону, подсчитали модуль разности чисел этих клеток. Какое наименьшее значение может принимать наибольшая из этих разностей?

И. Акулич

Летний турнир 2005 года (Судиславль)

430. а) Может ли произведение сумм цифр двух разных двухзначных чисел равняться сумме произведений цифр этих же двухзначных чисел?

б) Существуют ли десять различных натуральных чисел, произведение сумм цифр которых равно сумме произведений цифр этих же чисел?

Акулич

431. Берендей и Снегурочка по очереди стирают буквы в названии «Берендеевы поляны». За один ход стирают либо только одну букву, либо одну букву и все такие же буквы. Выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Начинает Снегурочка. Кто выигрывает при правильной игре?

Акулич

432. На шахматной доске изначально расставлено n ладей. Разрешается поставить на пустую клетку дополнительную ладью, если она угрожает не менее, чем а) двум; б) трём имеющимся на доске ладьям. При каком наименьшем n можно заполнить

ладьями всю доску? (Ладья угрожает фигуре, если находится с ней на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других фигур).

И. Акулич

433. Найдите все такие натуральные числа x, что а) $x^2 = \overline{\underbrace{y\ldots y}_{n}\underbrace{z\ldots z}_{n}}$, где каждая из ненулевых цифр y и z повторена n раз, причём $n > 1$; б) $x^2 = \overline{yyzztt}$, где y, z, t — цифры, причём $y \neq 0$.

В. Сендеров

434. Продавец расположил набор из ста гирек массами 1, 2, 3, ..., 100 граммов в произвольном порядке: m_1, m_2, m_3, ..., m_{100}. Докажите, что гирьки массами $|m_1 - 1|$, $|m_2 - 2|$, $|m_3 - 3|$, ..., $|m_{100} - 100|$ граммов можно расположить на двух чашах весов так, что весы окажутся в равновесии.

В. Произволов

435.* Любой треугольник можно разрезать на а) два; б) три; в) четыре треугольника так, что в каждом из них можно отметить по равной стороне, причём никакие две отмеченные стороны не лежат на одной прямой. Докажите это.

В. Сендеров, Б. Френкин, А. Шаповалов

436. В магазине продают гирлянды из $n > 2$ лампочек, соединённых по кругу. Лампочки разрешено зажигать по одной в произвольном порядке. Если при включении какой-либо лампочки одна или обе её соседки уже горят, то хотя бы одну из них нужно погасить. Какое наибольшее количество лампочек можно зажечь таким способом?

А. Малеев

437. Из шахматной доски вырезали фигуру, в которой белых клеток не меньше, чем чёрных. Из любой клетки этой фигуры можно попасть в любую другую, переходя каждым ходом из клетки в соседнюю с ней по стороне. Любую ли такую фигуру можно разрезать на доминошки — прямоугольники, каждый из которых состоит из двух соседних клетки?

А. Гусаков

438. Грани кубика такого же размера, как клетки шахматной доски. Одна из граней окрашена. Кубик поставили на одну из клеток окрашенной гранью вниз и прокатили, перекатывая через ребро, по всей доске, постояв на каждой клетке по одному разу. В итоге кубик вернулся на исходную клетку, окрашенной гранью вниз. Найдите наибольшее возможное количество клеток, на которых кубик стоял окрашенной гранью вниз.

В. Гуровиц

439.* В первом ряду шахматной доски стоят восемь одинаковых чёрных ладей, а в последнем ряду — восемь одинаковых белых ладей. За какое минимальное число ходов белые ладьи могут обменяться местами с чёрными? (Ходы чёрных и белых ладей не обязательно чередуются).

С. Токарев

440. На двух чашках весов лежат гирьки. Весы показывают равновесие. Все эти гирьки разложили иначе по чашкам; весы вновь показали равновесие. В третий раз на левой чашке поместили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. На правой чашке тоже оставили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. Будет ли на весах вновь равновесие?

В. Произволов

441. Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Витей и Гришей. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Аней и Гришей. Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Борей и Аней. С кем раньше познакомился Гриша: с Аней, Борей или Витей?

В. Гуровиц

442. В $a+b$-этажном доме лифт при нажатии кнопки поднимается на a этажей вверх или опускается на b этажей вниз. (Когда сверху меньше a этажей, лифт вверх не идёт, аналогично — вниз.) Лифт стартовал с первого этажа. Сколько раз надо нажать на кнопку, чтобы лифт вернулся на первый этаж?

А. Спивак

443. В некотором государстве 80 городов, из которых один — столица. Некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города выходит либо одна, либо три дороги. Из любого города можно попасть по дорогам в столицу ровно одним способом. Город захолустный, если из него выходит ровно одна дорога. Для каждого захолустного города подсчитали количество дорог в пути, соединяющем этот город со столицей. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех подсчитанных чисел.

А. Скопенков

444*. Любой треугольник, хотя бы одна сторона которого больше 1, можно разрезать на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1. Докажите это.

А. Шаповалов

445*. Алхимик хранит эликсир в четырёх одинаковых сосудах. Можно сливать два сосуда в один (сосуд может вместить весь эликсир), или поставить два сосуда на чашечные весы, и лить из третьего в тот, где эликсира меньше, пока весы не уравновесятся (или эликсир в третьем сосуде не кончится). Алхимик помнит, что так можно получить сосуд ровно с одной унцией эликсира, но не помнит, как. В каждом сосуде целое число унций эликсира. Один из сосудов пуст. Докажите, что можно, попереливав, восстановить исходные количества в каждом сосуде и при этом узнать, где сколько эликсира.

А. Шаповалов

446. Для любого натурального n, где $n \geqslant 10$, первые n натуральных чисел можно разбить на две группы так, что произведение чисел в одной из групп отличалось от произведения чисел в другой группе не более чем на 3% (проценты берутся от меньшего числа). Докажите это.

И. Акулич

447. Каждая клетка доски 8×8 окрашена в какой-то цвет, при этом в любой строке и любом столбце есть клетки только двух цветов. Какое наибольшее количество различных цветов может быть использовано?

Д. Калинин

448. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка Q. Докажите, что если $\angle ABQ = \angle QDA$, то $\angle BQA + \angle CQD = 180^\circ$.

В. Произволов

449. На плоскости даны 1000 синих и 1000 красных точек. Расстояние между любыми точками разного цвета не превосходит 1. Доказать, что либо все красные, либо все синие точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{2}$.

А. Акопян, В. Дольников

450. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, произведение любых ста членов которой делится на их сумму?

И. Акулич, В. Сендеров