Турнир им. А.П.Савина, 2016 год

Математические бои, 2 тур

6 класс, Высшая лига

1. Троих мальчиков спросили, сколько кому лет. Они ответили так:

Антон: Мне 11 лет. Боре тоже 11 лет.

Боря: Антону 10 лет. А Васе 11 лет.

Вася: Мне 12 лет. У нас троих одинаковый возраст.

Известно, что три высказывания верны, а три нет. Можно ли наверняка утверждать, что Вася старше Антона? (*Д. Шноль*)

2. Алеша, Боря, Вася, Гриша и Дима играли в настольный теннис парами так, что каждые двое сыграли с каждой другой парой один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Алеша в общей сложности проиграл 12 раз, а Боря – 6 раз. Сколько раз выиграл Вася?

3. Жители острова Чунга-Чанга живут в десяти хижинах. Праздник урожая на острове длится 10 дней. Каждый день жители очередной хижины отдыхают, а все остальные срывают с пальмы по одному кокосу и несут в эту хижину. Каждому её обитателю должно достаться ровно по девять кокосов. Лишние кокосы отдают губернатору острова, а если кокосов не хватило, губернатор выдаёт их из резервного фонда. В первые четыре дня губернатор получил 60, 50, 40 и 30 кокосов, в следующие пять выдавал 70, 60, 20, 10 и 100 кокосов. Что произойдёт на десятый день праздника? (*Д.Калинин, И. Раскина*)

4. В корзине лежали грибы, 52% из них белые. Когда отложили три червивых гриба, среди оставшихся оказалась ровно половина белых. Сколько грибов могло быть в корзине?

5. Гном и его сын хотят переправить боевую группу эльфов из своего дома в Тайное место в тылу орков. Переправляются подземными тропами в одиночку или по двое. Не запомнив дороги, без проводника её не пройти. Вначале дорогу до Тайного места знает только гном-отец. Но всех проводить он не сможет: мимо Каменного стража у дороги никто не может пройти более 4 раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу.Сын гнома запоминает дорогу, если его провели один раз, а эльфа для этого надо провести туда и обратно. Окончив переправу, оба гнома должны вернуться домой. Какое наибольшее число эльфов можно переправить? (*А. Шаповалов*)

6. На десяти карточках написаны цифры, каждая по одному разу. Из девяти карточек составили три числа, сумма которых равна 2016, а десятую выбросили. Какую цифру могли выбросить?

7. У Маши есть палочки длинами 1, 2, 3, ..., N. При каких N у Маши есть возможность сложить контур прямоугольника, используя их все?

8. Все грани куба разделены на одинаковые квадратики. Часть квадратиков чёрные, остальные белые. Два квадратика разных цветов с общей стороной (не обязательно находящиеся на одной грани) назовём разноцветной парой. Докажите, что количество разноцветных пар чётно. (*А. Грибалко*)

6 класс, Первая лига

1. Троих мальчиков спросили, сколько кому лет. Они ответили так:

Антон: Мне 11 лет. Боре тоже 11 лет.

Боря: Антону 10 лет. А Васе 11 лет.

Вася: Мне 12 лет. У нас троих одинаковый возраст.

Известно, что три высказывания верны, а три нет. Можно ли наверняка утверждать, что Вася старше Антона? (*Д. Шноль*)

2. Можно ли в каждую клетку прямоугольной таблицы 4x5 вписать по одной из букв А, Б, Й, М, О, Т так, чтобы каждая буква встречалась ровно в пяти рядах? (Ряд – это строка или столбец, всего их девять.) *(Е.Бакаев)*

3. Жители острова Чунга-Чанга живут в пяти хижинах. Праздник урожая на острове длится пять дней. Каждый день жители очередной хижины отдыхают, а все остальные срывают с пальмы по одному кокосу и несут в эту хижину. Каждому её обитателю должно достаться ровно по четыре кокоса. Лишние кокосы отдают губернатору острова, а если кокосов не хватило, губернатор выдаёт их из резервного фонда. В первые три дня губернатор получил 10, 25 и 15 кокосов, на четвёртый выдал 40 кокосов. Что произойдёт в последний, пятый день праздников? (*Д.Калинин, И. Раскина*)

4. В корзине лежало не более 70 грибов, 52% из них белые. Когда отложили три червивых гриба, среди оставшихся оказалась ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

5. Гном и его сын хотят переправить боевую группу эльфов из своего дома в Тайное место в тылу орков. Переправляются подземными тропами в одиночку или по двое. Не запомнив дороги, без проводника её не пройти. Вначале дорогу до Тайного места знает только гном-отец. Но всех проводить он не сможет: мимо Каменного стража у дороги никто не может пройти более 4 раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу.Сын гнома запоминает дорогу, если его провели один раз, а эльфа для этого надо провести туда и обратно. Окончив переправу, оба гнома должны вернуться домой. Как им переправить 6 эльфов? (*А. Шаповалов*)

6. Требуется заменить звездочки цифрами так, чтобы равенство было верным и все семь цифр были различными: ** + ** = 17*. Определите, сколько решений имеет эта задача. *(Д. Шноль)*

7. У Маши есть палочки длинами 1, 2, 3, ..., N. При каких N у Маши есть возможность сложить контур прямоугольника, используя их все? *(Е. Бакаев)*

8. Некоторые клетки клетчатого квадрата чёрные, остальные белые. Известно, что все крайние клетки чёрные. Две клетки разных цветов с общей стороной назовём разноцветной парой. Докажите, что количество разноцветных пар чётно. (*А. Грибалко*)

7 класс, Высшая лига

1. Жители острова Чунга-Чанга живут в десяти хижинах и десять дней по очереди празднуют. Каждый день праздник у жителей одной из хижин, а все остальные срывают с пальмы по одному кокосу и несут в эту хижину. Каждому жителю этой хижины должно достаться ровно по девять кокосов. Лишние кокосы отдают губернатору острова, а если кокосов не хватило, губернатор выдаёт их из резервного фонда. В первые четыре дня губернатор получил 60, 50, 40 и 30 кокосов, в следующие пять выдавал 70, 60, 20, 10 и 100 кокосов. Что произойдёт в последний день праздников? (*Д.Калинин, И. Раскина*)

2. Семья гномов (отец и N сыновей) хочет переправить боевую группу эльфов из своего дома в Тайное место в тылу орков. Переправляются подземными тропами в одиночку или по двое. Не зная дороги, без проводника её не пройти. Вначале дорогу до Тайного места знает только гном-отец. Но всех проводить он не сможет: мимо Каменного стража у дороги каждый может пройти не более четырёх раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Гном запоминает дорогу, если его провели один раз, а эльфа для этого надо провести туда и обратно. Окончив переправу, все гномы должны вернуться домой. Какое наибольшее количество эльфов они сумеют переправить? (*А. Шаповалов*)

3. Каждая грань куба разделена на одинаковые квадратики. Часть квадратиков чёрные, остальные белые. Два разноцветных квадратика с общей стороной (не обязательно находящиеся на одной грани) назовём разноцветной парой. Докажите, что количество разноцветных пар чётно. (*А. Грибалко*)

4. Город расположен на 10 островах, между некоторыми парами островов построены мосты. Известно, что если выбрать любые 9 островов, то можно обойти их один за другим и в конце вернуться на начальный остров. Какое минимальное количество мостов может быть в таком городе?

5. У Маши есть палочки длинами 1, 2, 3, ..., N. При каких N у Маши есть возможность сложить контур прямоугольника, используя их все? *(Е. Бакаев)*

6. Найдите наибольшее возможное значение выражения

(Н• Е• Д• Е• Л• И• М• О• Е + Д• Е• Л• И• М) : (Н• Е• Д• Е• Л• Я• М• И).

(Разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые – одинаковые.) (*Н. Стрелкова*)

7. Дан квадрат ABCD. На отрезке CD взяли произвольную точку M (отличную от D), а на прямой AD – точку K. Оказалось, что угол BMK равен 45°. Докажите, что AK = CM. (*М. Волчкевич*)

8. В четырёхугольнике ABCD $\angle A = 60^o$, $\angle B = 150^o$, $\angle C = 90^o$. Докажите, что $CD = \frac{AB + AD}{2}$ *(Е.Бакаев)*

7-8 класс

1. Жители острова Чунга-Чанга живут в десяти хижинах и десять дней по очереди празднуют. Каждый день праздник у жителей одной из хижин, а все остальные срывают с пальмы по одному кокосу и несут в эту хижину. Каждому жителю этой хижины должно достаться ровно по девять кокосов. Лишние кокосы отдают губернатору острова, а если кокосов не хватило, губернатор выдаёт их из резервного фонда. В первые четыре дня губернатор получил 60, 50, 40 и 30 кокосов, в следующие пять выдавал 70, 60, 20, 10 и 100 кокосов. Что произойдёт в последний день праздников? (*Д.Калинин, И. Раскина*)

2. Семья гномов (отец и сын) хочет переправить боевую группу эльфов из своего дома в Тайное место в тылу орков. Переправляются подземными тропами в одиночку или по двое. Не зная дороги, без проводника её не пройти. Вначале дорогу до Тайного места знает только гном-отец. Но всех проводить он не сможет: мимо Каменного стража у дороги каждый может пройти не более четырёх раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Гном запоминает дорогу, если его провели один раз, а эльфа для этого надо провести туда и обратно. Окончив переправу, гномы должны вернуться домой. Какое наибольшее количество эльфов они сумеют переправить? (*А. Шаповалов*)

3. Число 2016 делится на все цифры от 1 до 9, кроме одной. В каком году такое будет в следующий раз? (*А. Блинков*)

4. Город расположен на 10 островах, между некоторыми парами островов построены мосты. Известно, что если выбрать любые 9 островов, то можно обойти их один за другим и в конце вернуться на начальный остров. Какое минимальное количество мостов может быть в таком городе?

5. У Маши есть палочки длинами 1, 2, 3, ..., N. При каких N у Маши есть возможность сложить контур прямоугольника, используя их все? *(Е. Бакаев)*

6. Найдите наибольшее возможное значение выражения

(Н• Е• Д• Е• Л• И• М• О• Е + Д• Е• Л• И• М) : (Н• Е• Д• Е• Л• Я• М• И).

(Разные буквы обозначают разные цифры, одинаковые – одинаковые.) (*Н. Стрелкова*)

7. В корзине лежат грибы, 52% из них белые. Когда отложили три червивых гриба, среди оставшихся оказалась ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

8. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 90^O$, $\angle B = \angle C = 60^O$, $AB = 5$, $BC = 6$. Найдите CD. *(Е.Бакаев)*

8 класс

1. Город расположен на 10 островах, между некоторыми парами островов построены мосты. Известно, что если выбрать любые 9 островов, то можно обойти их один за другим и в конце вернуться на начальный остров. Какое минимальное количество мостов может быть в таком городе?

2. На окружности отмечены 2016 точек. Каким наименьшим количеством непересекающихся выпуклых многоугольников можно покрыть все отмеченные точки так, чтобы любые две соседние из них лежали в разных многоугольниках? *(Е.Бакаев)*

3. Можно ли на шахматной доске 99x99 расставить 99 не бьющих друг друга ферзей так, чтобы они находились в левом нижнем квадрате 51x51 и в правом верхнем квадрате 48x48? (*А. Грибалко*)

4. На основании равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, которая пересекает боковые стороны в точках M и K. Найдите угол при вершине треугольника, если длина MK равна полуразности боковой стороны и основания. (*М. Волчкевич*)

5. На стороне CD квадрата ABCD взяли произвольную точку M, а на продолжении его стороны AD точку K. Оказалось, что угол BMK равен 45°. Докажите, что AK = CM. (*М. Волчкевич*)

6. На треугольной сетке взяли треугольник со стороной n-1 и отметили все узлы сетки, находящиеся внутри и на границе этого треугольника, точками (точки образовали треугольник, на каждой стороне которого отмечено по n точек). Найти минимальное возможное количество звеньев в ломаной, проходящей через все эти точки. (*М. Артемьев*)

7. Семья гномов (отец и N сыновей) хочет переправить боевую группу эльфов из своего дома в Тайное место в тылу орков. Переправляются подземными тропами в одиночку или по двое. Не зная дороги, без проводника её не пройти. Вначале дорогу до Тайного места знает только гном-отец. Но всех проводить он не сможет: мимо Каменного стража у дороги каждый может пройти не более четырёх раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Гном запоминает дорогу, если его провели один раз, а эльфа для этого надо провести туда и обратно. Окончив переправу, все гномы должны вернуться домой. Какое наибольшее количество эльфов они сумеют переправить? (*А. Шаповалов*)

8. Числа a и b таковы, что одновременно выполнены равенства $a^4+3a^3b=3a^2+5$ и $a^3b+4ab+1=a^4+a^2$. Какие значения может принимать ab? (*П.Чулков*)