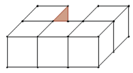
Турнир им. А.П.Савина, 2016 год

Математические бои, 3 тур

6 класс, Высшая лига



1. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы U. Можно ли из нескольких таких "ушек" собрать какой-нибудь куб? (*Е.Бакаев*)

2. Десять бабушек, работая поодиночке, за час посадили 100 репок. Если несколько бабушек объединятся в группу, то каждая из них посадит среднее арифметическое количеств репок, которые эти бабушки сажали до объединения в группу (если это число окажется нецелым, то оно округляется в меньшую сторону). Они решили разбиться на группы (из более чем одного человека) так, чтобы за час снова посадить 100 репок. Можно ли гарантировать, что им это удастся? (*Е.Бакаев*)

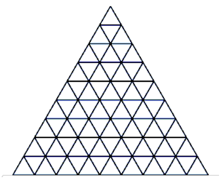
3. В стране дураков бывают только солнечные или дождливые дни. Банк "Кэт-энд-фокс" работает круглосуточно и предлагает два вида вкладов.

1) Вклад "солнечный": сумма по вкладу увеличивается на 20% каждый солнечный день и уменьшается на 20% каждый дождливый день.

2) Вклад "дождливый", который устроен ровно наоборот.

Буратино положил в ночь на 1 июля равные суммы денег по обоим вкладам. В ночь на 1 августа сумма по вкладу "солнечный" была на 50% больше суммы по вкладу "дождливый". Сколько в июле было солнечных дней? (*Д.Шноль*)

4. Сколько четырехзначных натуральных чисел можно представить в виде суммы как четырёх, так и пяти последовательных натуральных чисел?



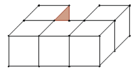
5. Равносторонний треугольник разбит на треугольнички как показано на рисунке, но каждая сторона разделена на 2016 равных частей. Играют Петя и Вася. Первым ходом Петя ставит фишку в вершину любого маленького треугольничка. Каждым следующим ходом надо сдвинуть фишку в соседнюю вершину маленького треугольничка. Кто поставит фишку в вершину, в которой она уже побывала, проигрывает. Кто может гарантировать себе победу, начинающий или его соперник? (*Р.Крутовский*)

6. Три футбольные команды сыграли по разу каждая с каждой. Узнав про каждую команду общее число забитых и общее число пропущенных ею в этих матчах мячей, Саша сказал: «Могу доказать, что ничьих не было». Могут ли его слова быть правдой? *(А.Шаповалов)*

7. Клетки доски 10x10 заполнены числами. Четырехклеточный уголок назовём упорядоченным, если в этом уголке каждое из двух чисел, имеющих двух соседей, больше одного из своих соседей и меньше другого. Какое наибольшее количество упорядоченных уголков (возможно, перекрывающихся) может оказаться на доске? (*Е.Бакаев*)

8. Какой Какой ребус имеет больше решений: О·Д·Е·С·С·А = М·А·М·А или Р·О·С·Т·О·В = П·А·П·А? Разные буквы соответствуют разным натуральным числам от 1 до 9, одинаковые – одинаковым. (*М.Козлов*)

6 класс, Первая лига

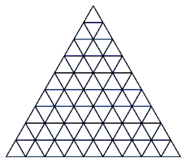


1. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы U. Можно ли из нескольких таких “ушек” собрать какой-нибудь куб? (*Е.Бакаев*)

2. Десять бабушек, работая поодиночке, за час посадили 100 репок. Если несколько бабушек объединятся в группу, то каждая из них посадит среднее арифметическое количеств репок, которые эти бабушки сажали до объединения в группу (если это число окажется нецелым, то оно округляется в меньшую сторону). Они решили разбиться на группы (из более чем одного человека) так, чтобы за час снова посадить 100 репок. Можно ли гарантировать, что им это удастся? (*Е.Бакаев*)

3. По дороге до пункта А ходит автобус со скоростью 60 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч. Вдоль дороги на расстоянии 26 км от пункта А и ближе расположены дома. Можно ли построить одну автобусную остановку таким образом, чтобы каждый житель, живущий у дороги, мог добраться от своего дома до пункта А, проведя в пути не больше 2 часов? (Временем ожидания автобуса и стоянки автобуса на остановке можно пренебречь.)

4. По кругу стоит 1001 человек. Каждый принадлежит одному из трёх племён: рыцари, лжецы и конформисты. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет, а конформист может лгать, только если стоит рядом с лжецом (или может сказать правду). Каждый заявил: "Мои соседи из разных племен". Какое наименьшее количество лжецов может быть среди них? *(А.Шаповалов)*



5. Равносторонний треугольник разбит на треугольнички как показано на рисунке. Играют Петя и Вася. Первым ходом Петя ставит фишку в самую верхнюю точку. Каждым следующим ходом надо сдвинуть фишку в соседнюю вершину маленького треугольничка. Кто поставит фишку в вершину, в которой она уже побывала, проигрывает. Кто может гарантировать себе победу, начинающий или его соперник? (*Р.Крутовский*)

6. Три футбольные команды сыграли по разу каждая с каждой. Узнав про каждую команду общее число забитых и общее число пропущенных ею в этих матчах мячей, Саша сказал: «Могу доказать, что ничьих не было». Могут ли его слова быть правдой? *(А.Шаповалов)*

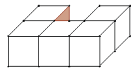
7. Саша пронумеровал клетки шахматной доски числами от 1 до 64 в каком-то порядке. Маша сделала то же самое со своей доской, но нумерация получилась другой. Может ли оказаться, что клетки Сашиной доски соединены ходом коня тогда и только тогда, когда клетки Машиной доски с теми же номерами соединены ходом короля? (*А.Солынин*)

8. Какой Какой ребус имеет больше решений: О·Д·Е·С·С·А = М·А·М·А или Р·О·С·Т·О·В = П·А·П·А? Разные буквы соответствуют разным натуральным числам от 1 до 9, одинаковые – одинаковым. (*М.Козлов*)

7 класс, Высшая лига, финал

1. Какой ребус имеет больше решений, $О \cdot Д \cdot Е \cdot С \cdot С \cdot А = М \cdot А \cdot М \cdot А$ или $Р \cdot О \cdot С \cdot Т \cdot О \cdot В = П \cdot А \cdot П \cdot А$? (Разные буквы соответствуют разным натуральным числам от 1 до 9, одинаковые – одинаковым.) (*М.Козлов*)

2. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы U. Можно ли из нескольких таких “ушек” собрать какой-нибудь куб? (*Е.Бакаев*)

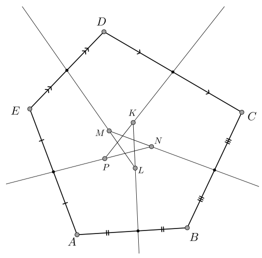


3. Саша отметил несколько точек на прямой и измерил все попарные расстояния между ними. Получились числа 1, 2, 3, 4, ..., N – все по одному разу. Чему могло равняться N? (*А.Грибалко*)

4. В перерыве между матчами Евро-2016 футбольные судьи играют в следующую игру. Каждый судья приходит на игру с одной жёлтой и одной красной карточкой; все карточки сваливаются в кучу. Потом каждый берёт себе две какие-то карточки, и все судьи становятся в круг. По свистку все одновременно передают (каждый своему соседу слева) одну карточку – если есть красная, то красную, а если нет – жёлтую. Потом снова звучит свисток, и снова все передают так же карточки и так далее. Докажите, что через несколько раундов игры у каждого судьи будут на руках разноцветные карточки.

5. Клетки доски 10x10 заполнены числами. Четырехклеточный уголок назовём упорядоченным, если в этом уголке каждое из двух чисел, имеющих двух соседей, больше одного из своих соседей и меньше другого. Какое наибольшее количество упорядоченных уголков (возможно, перекрывающихся) может оказаться на доске? (*Е.Бакаев*)

6. Незнайка нарисовал внутри выпуклого пятиугольника ABCDE пятиконечную звезду KLMNP так, что продолжения сторон звезды пересекают стороны пятиугольника в серединах его сторон. Для ещё большей гармонии Незнайке хотелось бы нарисовать аналогичную картинку так, чтобы продолжения сторон звезды пересекали стороны пятиугольника не просто в серединах, а ещё и под прямыми углами. Возможно ли это сделать?

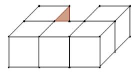


7. В прямоугольнике ABCD BC=2·AB,F – середина AD, E – точка на продолжении стороны AD за точку D. Известно, что $\angle FBE = \angle CEA$. Найдите $\angle CEA$.

8. Равносторонний треугольник со стороной N разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольнички со стороной 1. В вершине исходного треугольника стоит фишка. Петя и Вася играют в игру (начинает Петя). Каждым своим ходом разрешается сдвинуть фишку в соседний (находящийся на расстоянии 1) узел треугольной сетки, в котором фишка до этого не была. При каких N и кто может гарантировать себе победу? (*Р.Крутовский*)

7 класс, Высшая лига, финал 2

1. Какой ребус имеет больше решений, $О \cdot Д \cdot Е \cdot С \cdot С \cdot А = М \cdot А \cdot М \cdot А$ или $Р \cdot О \cdot С \cdot Т \cdot О \cdot В = П \cdot А \cdot П \cdot А$? (Разные буквы соответствуют разным натуральным числам от 1 до 9, одинаковые – одинаковым.) (*М.Козлов*)



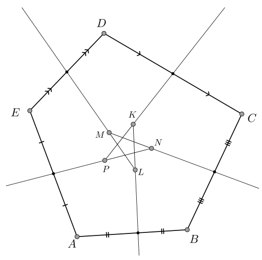
2. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы U. Можно ли из нескольких таких “ушек” собрать какой-нибудь куб? (*Е.Бакаев*)

3. Саша отметил несколько точек на прямой и измерил все попарные расстояния между ними. Получились числа 1, 2, 3, 4, ..., N – все по одному разу. Чему могло равняться N? (*А.Грибалко*)

4. В перерыве между матчами Евро-2016 футбольные судьи играют в следующую игру. Каждый судья приходит на игру с одной жёлтой и одной красной карточкой; все карточки сваливаются в кучу. Потом каждый берёт себе две какие-то карточки, и все судьи становятся в круг. По свистку все одновременно передают (каждый своему соседу слева) одну карточку – если есть красная, то красную, а если нет – жёлтую. Потом снова звучит свисток, и снова все передают так же карточки и так далее. Докажите, что через несколько раундов игры у каждого судьи будут на руках разноцветные карточки.

5. Клетки доски 10х10 заполнены числами. Четырехклеточный уголок назовём упорядоченным, если в этом уголке каждое из двух чисел, имеющих двух соседей, больше одного из своих соседей и меньше другого. Какое наибольшее количество упорядоченных уголков (возможно, перекрывающихся) может оказаться на доске? (*Е.Бакаев*)

6. Незнайка нарисовал внутри выпуклого пятиугольника ABCDE пятиконечную звезду KLMNP так, что продолжения сторон звезды пересекают стороны пятиугольника в серединах его сторон. Для ещё большей гармонии Незнайке хотелось бы нарисовать аналогичную картинку так, чтобы продолжения сторон звезды пересекали стороны пятиугольника не просто в серединах, а ещё и под прямыми углами. Возможно ли это сделать? (*Н.Стрелкова*)



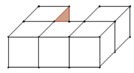
7. В прямоугольнике ABCD BC=2·AB, F – середина AD, E – точка на продолжении стороны AD за точку D. Известно, что $\angle FBE = 30^O$. Докажите, что EB – биссектриса $\angle CEA$.

8. Числа a, b, c целые и различные. Докажите, что $\left|(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\right| \ge 6$

7-8 класс

1. Какой ребус имеет больше решений, $О \cdot Д \cdot Е \cdot С \cdot С \cdot А = М \cdot А \cdot М \cdot А$ или $Р \cdot О \cdot С \cdot Т \cdot О \cdot В = П \cdot А \cdot П \cdot А$? (Разные буквы соответствуют разным натуральным числам от 1 до 9, одинаковые – одинаковым.) (*М.Козлов*)

2. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы U. Можно ли из нескольких таких "ушек" собрать какой-нибудь куб? (*Е.Бакаев*)

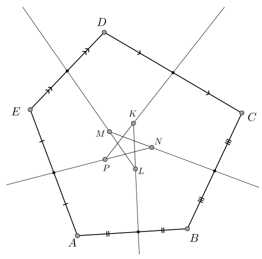


3. Саша отметил на прямой пять точек и измерил все попарные расстояния между ними. Могли ли эти расстояния равняться 1, 2, 3, 4, ..., 10? (*А.Грибалко*)

4. Числа a, b, c целые и различные. Докажите, что $\left|(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\right| \geq 6$

5. Три футбольные команды сыграли по разу каждая с каждой. Узнав про каждую команду общее число забитых и общее число пропущенных ею в этих матчах мячей, Саша сказал: «Могу доказать, что ничьих не было». Могут ли его слова быть правдой?

6. Незнайка нарисовал внутри выпуклого пятиугольника ABCDE пятиконечную звезду KLMNP так, что продолжения сторон звезды пересекают стороны пятиугольника в серединах его сторон. Для ещё большей гармонии Незнайке хотелось бы нарисовать аналогичную картинку так, чтобы продолжения сторон звезды пересекали стороны пятиугольника не просто в серединах, а ещё и под прямыми углами. Возможно ли это сделать?



7. В прямоугольнике ABCD BC=2·AB, F – середина AD, E – точка на продолжении стороны AD за точку D. Известно, что $\angle DEC = 30^O$. Найдите $\angle FBE$.

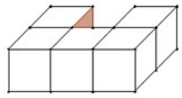
8. Равносторонний треугольник со стороной N разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольнички со стороной 1. В вершине исходного треугольника стоит фишка. Петя и Вася играют в игру (начинает Петя). Каждым своим ходом разрешается сдвинуть фишку в соседний (находящийся на расстоянии 1) узел треугольной сетки, в котором фишка до этого не была. При каких N и кто может гарантировать себе победу? (*Р.Крутовский*)

8 класс, финал 1

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BB'. Точка N — пересечение описанной окружности треугольника ABB' и внешней биссектрисы угла A, M — пересечение описанной окружности BB'C и внешней биссектрисы угла C. NM пересекает отрезок BB' в точке K. Докажите, что описанные окружности треугольников ANK и CMK пересекаются на BB'. (*Л.Попов*)

2. В перерыве между матчами Евро-2016 футбольные судьи играют в следующую игру. Каждый судья приходит на игру с одной жёлтой и одной красной карточкой; все карточки сваливаются в кучу. Потом каждый берёт себе две какие-то карточки, и все судьи становятся в круг. По свистку все одновременно передают (каждый своему соседу слева) одну карточку – если есть красная, то красную, а если нет – жёлтую. Потом снова звучит свисток, и все передают карточки и так далее. Через какое минимальное число свистков у каждого судьи заведомо будут на руках разноцветные карточки.

3. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы U. Можно ли из нескольких таких “ушек” собрать какой-нибудь куб? (*Е.Бакаев*)



4. Какое наибольшее количество точек можно отметить на прямой так, чтобы все попарные расстояния между ними образовывали арифметическую прогрессию? (*А.Грибалко*)

5. Прямоугольник *ABCD* разбит сеткой на клеточки со стороной 1. На стороне *BC* отметили узел *K*, а на стороне *CD* отметили узел *L* так, что $\angle ALK$=45° и $\angle AKL < 90°$. На отрезке *KL* отметили все точки пересечения с линиями сетки. Докажите, что хотя бы одна из них удалена от точки *A* на рациональное расстояние. (*Е.Бакаев*)

6. Равносторонний треугольник со стороной N разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольнички со стороной 1. В вершине исходного треугольника стоит фишка. Петя и Вася играют в игру (начинает Петя). Каждым своим ходом разрешается сдвинуть фишку в соседний (находящийся на расстоянии 1) узел треугольной сетки, в котором фишка до этого не была. При каких N и кто может гарантировать себе победу? (*Р.Крутовский*)

7. Решите уравнение в целых числах $x(x+1)(x^2+x+2)=2y^2$.

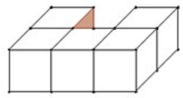
8. Удачностью заполнения доски 10 × 10 числами назовем количество способов вырезать из нее (по границам клеток) удачный четырехклеточный уголок. Четырехклеточный уголок называется удачным, если числа в нем расположены монотонно, т.е. если в этом уголке число, имеющее двух соседей, больше одного из них и меньше другого. Какова наибольшая возможная удачность заполнения доски 10 × 10 числами? (*Е.Бакаев*)

8 класс, финал 2

1. В перерыве между матчами Евро-2016 футбольные судьи играют в следующую игру. Каждый судья приходит на игру с одной жёлтой и одной красной карточкой; все карточки сваливаются в кучу. Потом каждый берёт себе две какие-то карточки, и все судьи становятся в круг. По свистку все одновременно передают (каждый своему соседу слева) одну карточку – если есть красная, то красную, а если нет – жёлтую. Потом снова звучит свисток, и все передают карточки и так далее. Докажите, что через несколько раундов игры у каждого судьи будут на руках разноцветные карточки.

2. Докажите, что $\left|(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\right| \geq 6$, если x, y, z - различные целые числа.

3. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы U. Можно ли из нескольких таких “ушек” собрать какой-нибудь куб? (*Е.Бакаев*)



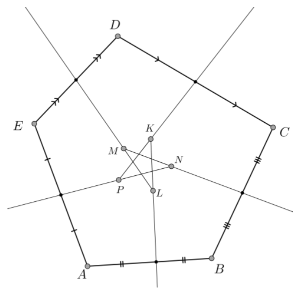
4. Пусть H – основание высоты из вершины A в правильном треугольнике ABC. O — центр треугольника, а R — середина меньшей дуги BC окружности ABC. Окружность, проходящая через A и B и касающаяся AH, пересекает BC в точке P. Докажите, что прямая OB делит отрезок PR пополам. (*П.Рябов*)

5. Равносторонний треугольник со стороной N разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольнички со стороной 1. В вершине исходного треугольника стоит фишка. Петя и Вася играют в игру (начинает Петя). Каждым своим ходом разрешается сдвинуть фишку в соседний (находящийся на расстоянии 1) узел треугольной сетки, в котором фишка до этого не была. При каких N и кто может гарантировать себе победу? (*Р.Крутовский*)

6. Решите уравнение в целых числах $x(x+1)(x^2+x+2)=2y^2$.

7. Удачностью заполнения доски 10 × 10 числами назовем количество способов вырезать из нее (по границам клеток) удачный четырехклеточный уголок. Четырехклеточный уголок называется удачным, если числа в нем расположены монотонно, т.е. если в этом уголке число, имеющее двух соседей, больше одного из них и меньше другого. Какова наибольшая возможная удачность заполнения доски 10 × 10 числами? (*Е.Бакаев*)

8. Средняя Незнайка нарисовал внутри выпуклого пятиугольника ABCDE пятиконечную звезду KLMNP так, что продолжения сторон звезды пересекают стороны пятиугольника в серединах его сторон. Для ещё большей гармонии Незнайке хотелось бы нарисовать аналогичную картинку так, чтобы продолжения сторон звезды пересекали стороны пятиугольника не просто в серединах, а ещё и под прямыми углами. Возможно ли это сделать? (*Н.Стрелкова*)



Источник: **www.ashap.info/Turniry/Savin/index.html**