XII
Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Издательство МЦНМО
Москва • 2007

УДК 51
ББК 22.1
Т86

Т86 XII Турнир математических боев им. А. П. Савина. — М.: МЦНМО, 2007. — 120 с.

ISBN 978-5-94057-278-7

Книга подготовлена по материалам XII летнего Турнира математических боев им. А. П. Савина, заключительного этапа конкурса «Математика 6–8», проводимого журналом *Квант*.

Здесь собраны условия и решения задач математической регаты, математических боев, командной и личной олимпиады. Решения задач специально отделены от условий, чтобы читатель мог самостоятельно порешать понравившиеся ему задачи. В приложении приведены списки победителей Турнира.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся олимпиадными задачами по математике: школьников 6–9 классов, а также школьных учителей и руководителей математических кружков.

ББК 22.1

Введение [1]

База отдыха «Берендеевы поляны» под Судиславлем Костромской области уже стала традиционным местом проведения финальных соревнований конкурса имени А. П. Савина. Летом 2006 года здесь состоялся XII финальный летний турнир математических боев, который в очередной раз побил рекорд по количеству команд-участниц: тридцать шесть. На турнире присутствовали школьники из пятнадцати городов. Приехали отдельные команды из Иваново, Кирова, Костромы, Магнитогорска, Перми, Троицка, Харькова. Ну и, конечно же, больше всего команд представила Москва. Примечательная особенность последних турниров — соревнования стали привлекательными для девятиклассников.

В организации турнира, кроме журнала *Квант*, приняли участие Московский городской дворец детского (юношеского) творчества (председатель оргкомитета турнира Г. Кондаков), образовательная программа «Большая перемена» (руководитель программы депутат областной думы и председатель Федерации профсоюзов Костромской области М. А. Батин), Департамент общего и профессионального образования администрации Костромской области, Фонд математического образования и просвещения. Спонсорскую помощь командам оказали также некоторые организации на местах. Так, школьники Черноголовки выражают свою благодарность Объединенной профсоюзной организации научного центра Черноголовка РАН (зам. председателя ОПО НЦЧ РАН Л. А. Ковалева).

Работу методической комиссии возглавил А. Шаповалов, специально прилетевший на турнир из Швеции. В составе комиссии работали опытные члены жюри, не раз принимавшие участие в подобного рода мероприятиях: А. Акопян, М. Берштейн, А. Блинков (зам. председателя оргкомитета), Ю. Блинков, А. Горская, В. Гуровиц, А. Жуков, Д. Калинин, Т. Караваева, И. Раскина, В. Сендеров,

[1] *Квант*, 2007, №2.

А. Скопенков, А. Спивак, С. Токарев (организатор первых летних турниров), В. Трушков, Б. Френкин, Е. Чернышева, В. Шарич. Руководители команд также принимали активное участие в работе жюри: помогали судить отдельные бои, организовывать и проводить дополнительные интеллектуальные игры: «Математическая регата», «Завалинка». С лекциями перед школьниками выступили А. Скопенков («Найди количество раскрасок»), Н. Нетрусова («Узлы и косы»), А. Шаповалов («Принцип узких мест»).

Турнир проводился по традиционной схеме: командная олимпиада в первый день[1], затем ежедневные математические бои, между которыми в один из дней проводилась личная устная олимпиада. В день проведения олимпиады для школьников организовывались экскурсии в старинные города Галич и Кострому.

А. В. Жуков

[1] Для 9 классов вместо командной олимпиады был проведен нулевой тур математических боев.

1. Условия задач

1.1. Математическая регата

1.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) До отхода поезда остается 2 минуты. Расстояние до вокзала — 2 километра. Если первый километр бежать со скоростью 30 километров в час, то можно ли успеть на поезд?

1.2. (6 баллов) Покажите, как разрезать фигуру, изображенную на рис. 1, на две равные части (не обязательно по линиям сетки).

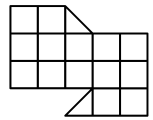


Рис. 1

1.3. (6 баллов) Может ли значение суммы

$$(1+2+3+4)\cdot 5+(6+7+8+9)\cdot 10+(11+12+13+14)\cdot 15+\ldots$$

при каком-то количестве слагаемых оканчиваться на $\overline{10}$?

1.4. (6 баллов) Каждому из ста жителей острова, часть жителей которого — рыцари, а остальные — лжецы, был задан вопрос: «Сколько среди вас рыцарей?». В ответ было названо сто различных чисел. Какое число наверняка было названо?

Второй тур

2.1. (7 баллов) У Алисы живет крокозябра. Каждый день она съедает бананов ровно в два раза больше своего веса, а каждую ночь худеет в три раза. Уезжая на четырехдневные каникулы, Алиса оставила ей 40 кг бананов, и этого крокозябре в точности хватило. Сколько весила крокозябра до отъезда Алисы?

2.2. (7 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AP и BQ из вершин острых углов. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из Q и P на гипотенузу AB. Найдите угол DCE.

2.3. (7 баллов) Имеет ли решение ребус: $\overline{\text{ДО}} \cdot \overline{\text{ЧЬ}} = \overline{\text{МАМА}}$?

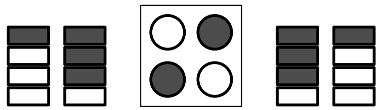
2.4. (7 баллов) Дан квадрат 2×2, разбитый на четыре единичных квадрата. Некоторая ломаная пересекает все стороны единичных квадратов. Какое наименьшее количество звеньев может содержать такая ломаная?

Третий тур

3.1. (8 баллов) Рассеянный Вовочка при сложении двух чисел по ошибке приписал ноль на конце первого слагаемого и вместо числа 2006 получил число 4157. Какие числа складывал Вовочка?

3.2. (8 баллов) В равностороннем треугольнике ABC точка D — середина BC. Из точки O, лежащей на стороне BC, опущены перпендикуляры OK и OM на стороны AB и AC. Найдите периметр четырехугольника $AMOK$, если периметр треугольника ACD равен p.

3.3. (8 баллов) Существует ли такой набор из десяти натуральных чисел, что каждое из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из этих чисел делится на каждое из остальных?



а б в

Рис. 2

3.4. (8 баллов) На квадратном столе лежат четыре стопки шашек двух цветов. Известно, что черных и белых шашек поровну. На рис. 2 приведены виды стола спереди, сверху и слева соответственно. Какой цвет имеет шашка, лежащая внизу в дальнем правом углу стола?

1.1.2. 8–9 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) Решите уравнение:

$$\max(x; 2 - x) = \min(3x; 1 + 2x).$$

(*Напомним, что* $\max(a; b)$ *— наибольшее, а* $\min(a; b)$ *— наименьшее из чисел* a *и* b.)

1.2. (6 баллов) Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого серединный перпендикуляр к каждой стороне не пересекает противолежащую сторону?

1.3. (6 баллов) Существует ли такое натуральное n, при котором сумма $1 + 2 + \dots + n$ оканчивается цифрой 7?

1.4. (6 баллов) Квадрат размером 4×4 клетки вырезан из белой бумаги, и его клетки покрашены с одной стороны в черный цвет. Можно ли, сгибая вырезанный квадрат какое-то количество раз (не обязательно по линиям сетки), добиться того, чтобы образовался квадрат размером 3×3 клетки, у которого восемь черных клеток и одна белая?

Второй тур

2.1. (7 баллов) Известно, что для натуральных чисел x, y и z выполняются два равенства: $7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8$ и $16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3$. Найдите значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

2.2. (7 баллов) В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведена биссектриса BL. На ее продолжении за точку B отложен отрезок BD длиной 4 см. Оказалось, что угол ADC равен $60°$. Найдите площадь треугольника ABC.

2.3. (7 баллов) Могут ли числа $\overline{\text{РАБ}}$ и $\overline{\text{БРА}}$ одновременно делиться на 49?

2.4. (7 баллов) В таблице 10×10 выписаны по возрастанию все натуральные числа от 1 до 100 по строкам (в первой строке — выписаны слева направо числа от 1 до 10, во второй строке — аналогично выписаны числа от 11 до 20, и так далее). Перед некоторыми из чисел поставлен знак минус так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по пять минусов. Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы?

Третий тур

3.1. (8 баллов) Докажите, что любой действительный корень уравнения $x^3 + px + q = 0$ удовлетворяет неравенству $4qx \leqslant p^2$.

3.2. (8 баллов) На окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC, взята точка P. Отрезок AP еще раз пересекает окружность в точке Q так, что $AQ = QP$. Найдите угол BPC.

3.3. (8 баллов) Натуральное число называется «хорошим», если в его разложение на простые множители каждый множитель входит в нечетной степени. (Например, «хорошими» являются числа $13 = 13^1$ и $54 = 2 \cdot 3^3$.) Какое наибольшее количество «хороших» чисел может стоять подряд в ряду последовательных натуральных чисел?

3.4. (8 баллов) Улитка движется по поверхности куба с ребром 1, переползая от вершины к вершине по ребру либо по диагонали грани. Найдите протяженность самого длинного маршрута из одной вершины куба в противоположную (наиболее удаленную) вершину, если запрещается пересекать свою траекторию движения и проползать через одну вершину дважды.

1.2. Командная олимпиада

В квадратных скобках указаны номера классов, для которых предлагалась задача.

1. [7] p, q, r — простые числа. $p^2 - q^2 - r^2$ — натуральное число, делящееся на 10. Найдите $q + r$.

В. Сендеров

2. [7] Есть клетчатая рамка 10×10 толщиной в одну клетку (см. рис. 3). Ее разрезали по границам клеток на попарно различные части и сложили из них квадрат 6×6. Каково наибольшее число частей?

А. Шаповалов

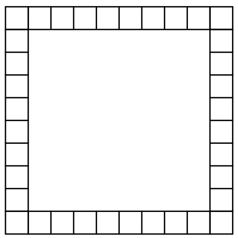


Рис. 3

3. [7] Вася разделил некоторое число на 666 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 200. Петя разделил то же самое число на 121 и также обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 200. Найдите исходное число.

В. Каскевич, Е. Чернышева

4. [7] Даны два треугольника. Сумма двух углов первого равна некоторому углу второго. Сумма другой пары углов первого также

равна некоторому углу второго. Докажите, что первый треугольник — равнобедренный.

Б. Френкин

5. [7] В бане дети набирают полные шайки воды. Сначала они включают горячий кран, потом его выключают и включают холодный. Известно, что если выключить горячий кран ровно в тот момент, когда он загудит, соотношение горячей и холодной воды в шайке будет оптимальным. Володя выключил горячий кран на 9 секунд позже, и в итоге в его шайке оказалось горячей воды ровно в два раза больше, чем холодной. Сеня выключил горячий кран на 9 секунд раньше, и в его шайке оказалось горячей и холодной воды поровну. Через сколько секунд после того, как открыли горячий кран, он загудит?

Е. Чернышева

6. [7] В треугольнике ABC угол C прямой, точка M — середина AB. Пусть точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на биссектрису угла B, а точка Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на биссектрису угла A. Найдите углы треугольника PMQ.

Д. Калинин

7. [7-8] Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

А. Шаповалов

8. [7-8] На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединяются дугой, если $|x - y|$ — простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все целые точки, чтобы любые две соединенные точки были разного цвета?

Фольклор

9. [8] В треугольнике ABC на сторонах BC, AC и AB соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{B_1C}{B_1A} = \alpha,$$

где $\alpha \in (0;1)$. На сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отмечены точки A_2, B_2, C_2 так, что

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.

И. Рудаков

10. [8] x и y — неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

В. Сендеров

11. [8] Докажите, что существует бесконечно много приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту.

А. Хачатурян

12. [8] Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающих к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

А. Шаповалов

13. [8] $S(n)$ — сумма делителей числа n. Найдите все такие натуральные n, что $3S(n) = 4n + 79$.

В. Трушков

14. [8] Некоторые из сторон и диагоналей выпуклого n-угольника ($n > 3$) покрасили в красный или синий цвет. Известно, что синие отрезки не пересекаются и между любыми вершинами есть единственный синий путь. То же верно для красных отрезков. Найдите (для каждого n) наименьшее количество пересечений между красными и синими отрезками. (Никакие три диагонали не пересекаются в одной точке.)

Б. Френкин

1.3. Математические бои

1.3.0. Нулевой тур

9 класс

1. $S(n)$ — сумма делителей числа n. Найдите все такие натуральные n, что $3S(n) = 4n + 79$.

В. Трушков

2. Квадрат разрезан на равные треугольники. Обязательно ли у любых двух треугольников найдутся параллельные стороны?

А. Шаповалов

3. Некоторые из сторон и диагоналей выпуклого n-угольника ($n > 3$) покрасили в красный или синий цвет. Известно, что синие отрезки не пересекаются и между любыми вершинами есть единственный синий путь. То же верно для красных отрезков. Найдите (для каждого n) наименьшее количество пересечений между красными и синими отрезками. (Никакие три диагонали не пересекаются в одной точке.)

Б. Френкин

4. Докажите, что существует бесконечно много приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту.

А. Хачатурян

5. Дан треугольник ABC. Рассматриваются все точки P внутри него, и для каждой из них строятся точки P_1, P_2 и P_3, симметричные ей относительно середин сторон. Найти ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников $P_1P_2P_3$.

И. Наумкин

6. На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединены дугой, если $|x-y|$ — простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все целые точки, чтобы любые две соединенные точки были разного цвета?

Фольклор

7. Докажите неравенство:

$$|x+y|^3 + |x-y|^3 \geqslant 2(|x|^3 + |y|^3).$$

В. Сендеров

8. Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

А. Шаповалов

1.3.1. Первый тур

7 класс

1. Члены жюри предложили для олимпиады по одинаковому числу задач. После этого каждый из них вычеркнул из получившегося списка по 4 задачи (никакую задачу не вычеркивали дважды). В результате в списке осталось 5 задач. Сколько всего могло быть членов жюри?

Д. Калинин

2. Найдите углы треугольника, если одна из его вершин является центром окружности, содержащей середины сторон этого треугольника.

А. Блинков

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырех есть ровно одна фальшивая монета, среди последних двух — тоже одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить обе фальшивые монеты?

Предложил В. Трушков

5. Для чисел a, b, c, d вычислили их попарные произведения ab, bc, cd, da, db, ac. Сколько различных чисел могло при этом получиться? (Найдите все варианты).

Б. Френкин

6. На окружности отмечены десять точек. Каждые две из них соединены отрезком. Сеня покрасил точки в два цвета. Какое наибольшее количество отрезков с концами в точках разного цвета могло получиться?

Фольклор

7. Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2 (поля d4, e4, d5, e5). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

В. Шарич

8. Есть три кучки камней, в первой лежит 2005, во второй — 2006, в третьей — 2007 камней. Двое играют в игру. За ход можно взять два камня, по одному из каких-нибудь двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Д. Калинин

7–8 классы

1. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно, так что

$$BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C.$$

Вырежем треугольники BC_1A_1, $C_1A_1B_1$, A_1B_1C и выстроим их последовательно так, чтобы основания лежали на одной прямой, причем второй треугольник при этом перевернем, чтобы его вершина A_1 также смотрела вверх. Докажите, что вершины этих трех равнобедренных треугольников лежат на одной прямой.

А. Мякишев

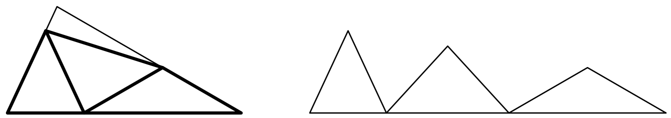


Рис. 4

2. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

По мотивам В. Брагина

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырех есть ровно одна фальшивая монета, и среди последних двух — тоже одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Импортные чашечные весы сообщают результат взвешивания на следующий день. Можно ли сегодня провести такие два взвешивания, чтобы завтра по полученным результатам наверняка определить обе фальшивые монеты?

Предложил В. Трушков

5. Двое играли в следующую игру. На бумаге нарисовано несколько точек, и некоторые из них соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки в каждую можно пройти единственным образом. Игроки по очереди красят точки — один в красный цвет, другой в синий. Красить можно только непокрашенные точки, и, начиная со второго хода, требуется, чтобы какая-то из соседних точек уже была покрашена в тот же цвет.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Оба игрока всегда играют наилучшим возможным образом. В итоге победил второй. После этого на том же рисунке они стали играть по тем же правилам, но крася отрезки, а не точки. (Соседние точки — точки, соединенные отрезком. Соседние отрезки — отрезки, имеющие общий конец.) Кто победит на этот раз?

Б. Френкин

6. Найдите 100 первых цифр числа:

$$3+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\cdot 11}+\frac{6}{9\cdot 11\cdot 13}+\cdots+$$
$$+\frac{1002}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{1003}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}$$

Израильская олимпиада 2006 г.

7. Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2 (поля d4, e4, d5, e5). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

В. Шарич

8. Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании?

А. Блинков

8 класс, первая лига

1. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно, так что

$$BC_1=C_1A_1=A_1B_1=B_1C.$$

Вырежем треугольники BC_1A_1, $C_1A_1B_1$, A_1B_1C и выстроим их последовательно так, чтобы основания лежали на одной прямой, причем второй треугольник при этом перевернем, чтобы его вершина A_1 также смотрела вверх. Докажите, что вершины этих трех равнобедренных треугольников лежат на одной прямой (см. рис. 4).

А. Мякишев

2. Найдите углы треугольника, если одна из его вершин является центром окружности, содержащей середины сторон этого треугольника.

А. Блинков

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырех есть ровно одна фальшивая монета, среди последних двух — тоже одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить обе фальшивые монеты?

Предложил В. Трушков

5. Для чисел a, b, c, d вычислили их попарные произведения ab, bc, cd, da, db, ac. Сколько различных чисел могло при этом получиться? (Найдите все варианты).

Б. Френкин

6. В одном из судиславских городских автобусов недавно была введена новая форма оплаты проезда. Пассажиры приобретают талон, имеющий форму круга, разбитого на 13 равных секторов. Одна сторона талона покрашена в синий цвет, а другая — в желтый. При входе в автобус они вставляют талон в электронный компостер синей стороной вверх, и компостер пробивает несколько секторов, предварительно проверяя, что эти секторы не были пробиты ранее. Какое наименьшее количество секторов должен пробивать компостер, чтобы один и тот же талон нельзя было использовать дважды?

А. Акопян

7. Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2 (поля d4, e4, d5, e5). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

В. Шарич

8. Есть три кучки камней, в первой лежит 2005, во второй — 2006, в третьей — 2007 камней. Двое играют в игру. За ход можно взять 2 камня, по одному из каких-нибудь двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Д. Калинин

8 класс, высшая лига

1. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ внешним образом построили подобные прямоугольные треугольники EAB и FCB ($\angle EAB = \angle FCB = 90^\circ$, $\angle ABE = \angle CBF$). Отразив точку B относительно середины отрезка EF, получили точку G. Докажите, что углы BDC и ADG равны.

А. Акопян

2. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

По мотивам В. Брагина

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. В одном из судиславских городских автобусов недавно была введена новая форма оплаты проезда. Пассажиры приобретают талон, имеющий форму круга, разбитого на 13 равных секторов. Одна сторона талона покрашена в синий цвет, а другая — в желтый. При входе в автобус они вставляют талон в электронный компостер синей стороной вверх, и компостер пробивает несколько секторов, предварительно проверяя, что эти секторы не были пробиты ранее. Какое наименьшее количество секторов должен пробивать компостер, чтобы один и тот же талон нельзя было использовать дважды?

А. Акопян

5. Двое играли в следующую игру. На бумаге нарисовано несколько точек, и некоторые из них соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки в каждую можно пройти единственным образом. Игроки по очереди красят точки — один в красный цвет, другой в синий. Красить можно только непокрашенные точки, и, начиная со второго хода, требуется, чтобы какая-то из соседних точек уже была покрашена в тот же цвет.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Оба игрока всегда играют наилучшим возможным образом. В итоге победил второй. После этого на том же рисунке они стали играть по тем же правилам, но крася отрезки, а не точки. (Соседние точки — точки, соединенные отрезком. Соседние отрезки — отрезки, имеющие общий конец.) Кто победит на этот раз?

Б. Френкин

6. Найдите 100 первых цифр числа:

$$3+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\cdot 11}+\frac{6}{9\cdot 11\cdot 13}+\dots+$$
$$+\frac{1002}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{1003}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Израильская олимпиада 2006 г.

7. Клетки доски $m\times n$ раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвет. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки — в черный цвет, черные — в красный, а красные — в белый. При каких m и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски были покрашены в черный цвет, а черные — в белый?

М. Ахмеджанова, К. Кохась

8. Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании?

А. Блинков

9 класс

1. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ внешним образом построили подобные прямоугольные треугольники EAB и FCB ($\angle EAB=\angle FCB=90^\circ$, $\angle ABE=\angle CBF$). Отразив точку B относительно середины отрезка EF, получили точку G. Докажите, что углы BDC и ADG равны.

А. Акопян

2. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек, делящих ее на 15 равных отрезков. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На сколько частей отрезки разделили треугольник?

В. Брагин

3. Каких чисел больше в первой тысяче: представимых или не представимых в виде $x^3-y!$, где $x,\ y\in\mathbb{N}$?

В. Сендеров, Н. Агаханов

4. CD — биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точку A и касающаяся биссектрисы в точке D, пересекает AC в точке A_1. Окружность, проходящая через точку B и касающаяся биссектрисы в точке D, пересекает BC в точке B_1.

Докажите, что окружность, симметричная описанной около треугольника A_1B_1C относительно CD, касается стороны AB.

Д. Калинин

5. Двое играли в следующую игру. На бумаге нарисовано несколько точек и некоторые из них соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки в каждую можно пройти единственным образом. Игроки по очереди красят точки — один в красный цвет, другой в синий. Красить можно только непокрашенные точки, и, начиная со второго хода, требуется, чтобы какая-то из соседних точек уже была покрашена в тот же цвет.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Оба игрока всегда играют наилучшим возможным образом. В итоге победил второй. После этого на том же рисунке они стали играть по тем же правилам, но крася отрезки, а не точки. (Соседние точки — точки, соединенные отрезком. Соседние отрезки — отрезки, имеющие общий конец.) Кто победит на этот раз?

Б. Френкин

6. Найдите 100 первых цифр числа:

$$3+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\cdot 11}+\frac{6}{9\cdot 11\cdot 13}+\cdots+$$
$$+\frac{1002}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{1003}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Израильская олимпиада 2006 г.

7. Клетки доски $m\times n$ раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвет. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки — в черный цвет, черные — в красный, а красные — в белый. При каких m и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски были покрашены в черный цвет, а черные — в белый?

М. Ахмеджанова, К. Кохась

8. Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании?

А. Блинков

1.3.2. Второй тур

7 класс

1. В группе детского сада мальчиков на три человека больше, чем девочек. На прогулке дети стали прыгать через лужу. Когда воспитательница это обнаружила, успешно прыгнувших детей оказалось на восемь больше, чем промочивших ноги. Все ли дети успели прыгнуть?

И. Раскина

2. На ужин в столовой давали шоколадки с разным содержанием миндаля, фундука и арахиса. Даня выбрал себе одну. Он согласен поменяться шоколадкой с любым своим одноклассником при условии, что содержание хотя бы двух видов орехов в полученной шоколадке будет больше, чем в отданной. Может ли после нескольких обменов у него оказаться шоколадка с меньшим содержанием каждого вида орехов, чем в первоначальной?

Фольклор

3. Турнир матбоев в один круг закончился тем, что наибольшее количество очков набрала команда, которая одержала меньше побед, чем любая другая. При каком наименьшем числе команд-участниц это возможно? (За победу начислялось два очка, за ничью — одно, за поражение — ноль.)

Фольклор

4. Галя вышивает крестиком узор на квадрате 10×10. Она считает узор красивым, если:

1) он центрально-симметричен;

2) любые два крестика одного цвета соединены цепочкой крестиков того же цвета с общими сторонами.

Какое наибольшее число цветов сможет использовать Галя?

А. Артемьев, И. Раскина

5. Даны окружности с радиусами 6 см и 8 см. Расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно 11 см. Через середину отрезка O_1O_2 проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке A, а другую — в точке B. Какую наибольшую длину может иметь отрезок AB?

В. Сендеров

6. Можно ли в клетках таблицы 12×12 расставить натуральные числа от 1 до 144 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

7. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A отмечена точка A_1, а за точку B — B_1. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка A_2, а за точку C — C_1. На продолжении стороны CB за точку C отмечена точка C_2, а за точку B — B_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Дж. Конвей

8. Папа с сыном пошли в тир. Папа попадал в цель в четырех выстрелах из пяти, а сын — вдвое реже. Всего у них получилось в два раза больше попаданий, чем промахов. Кто сделал больше выстрелов и во сколько раз?

И. Раскина

7–8 классы

1. После окончания чемпионата мира по футболу для каждой команды посчитали отношение числа голов, забитых ею с пенальти, к числу пробивавшихся пенальти и отношение числа голов, пропущенных с пенальти, к числу пенальти, пробитых в ее ворота. Может ли у всех команд первый показатель быть меньше второго?

А. Заславский

2. Существует ли такое натуральное число n, что число n^2 представимо в виде суммы квадратов трех попарно взаимно простых натуральных чисел?

В. Сендеров

3. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC — точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

Д. Калинин

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2006}$?

В. Сендеров

6. Каким наибольшим может быть число сторон у многоугольника, полученного пересечением четырехугольника и пятиугольника?

А. Шаповалов

7. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A отмечена точка A_1, а за точку B — B_1. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка A_2, а за точку C — C_1. На продолжении стороны CB за точку C отмечена точка C_2, а за точку B — B_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Дж. Конвей

8. Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

8 класс, первая лига

1. Существуют ли положительные числа x, y, z и t, удовлетворяющие равенствам

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5} = \frac{1}{t^5}?$$

В. Сендеров

2. Пусть a, b, c, x, y и z — целые числа, причем

$$a + b + c = x + y + z = 0.$$

Докажите, что произведение

$$(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(-\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})\times$$
$$\times(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}-\sqrt{c^2+z^2})$$

является квадратом целого числа.

С. Токарев

3. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Докажите равенство сумм квадратов противоположных сторон четырехугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

А. Акопян

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2006}$?

В. Сендеров

6. Каким наибольшим может быть число сторон у многоугольника, полученного пересечением четырехугольника и пятиугольника?

А. Шаповалов

7. В квадрате $ABCD$ на стороне AB выбрана точка P, на стороне BC — точки Q и R, и на стороне AD — точка S. Вычислите $\angle BSQ + \angle BRP + \angle SPD - \angle RPC$, если известно, что $3BP = 3BQ = 3CR = 3DS = AD$.

О. Крижановский

8. Можно ли в клетках таблицы 12×12 расставить натуральные числа от 1 до 144 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

8 класс, высшая лига

1. Существуют ли положительные числа x, y, z и t, удовлетворяющие равенствам

$$x^5 + y^5 + z^5 = t^5 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7} = \frac{1}{t^7}?$$

В. Сендеров

2. Пусть a, b, c, x, y и z — целые числа, причем

$$a + b + c = x + y + z = 0.$$

Докажите, что произведение

$$(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(-\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})\times$$
$$\times(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}-\sqrt{c^2+z^2})$$

является квадратом целого числа.

С. Токарев

3. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Докажите равенство сумм квадратов противоположных сторон четырехугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

А. Акопян

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2006}$?

В. Сендеров

6. Каким наибольшим может быть число сторон у многоугольника, полученного пересечением четырехугольника и пятиугольника?

А. Шаповалов

7. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A отмечена точка A_1, а за точку B — B_1. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка A_2, а за точку C — C_1. На продолжении стороны CB за точку C отмечена точка C_2, а за точку B — B_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$.

Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Дж. Конвей

8. Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

9 класс

1. Существуют ли положительные числа x, y, z и t, удовлетворяющие равенствам

$$x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = t^{2005} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^{2007}} + \frac{1}{y^{2007}} + \frac{1}{z^{2007}} = \frac{1}{t^{2007}}?$$

В. Сендеров

2. Пусть P — произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q — наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом.

С. Токарев

3. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, M — середина его стороны BC, а E — точка пересечения прямых MO и AD. Докажите равенство

$$S_{\triangle ABO} : S_{\triangle CDO} = AE : ED.$$

М. Волчкевич

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Решите в натуральных числах x, y и z уравнение $x^6 + 3^y = z^2$.

В. Сендеров

6. Докажите, что при пересечении m-угольника и n-угольника не может получиться многоугольник более чем с $2m + 2n - 6$ сторонами.

А. Шаповалов

7. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность. Пусть BD — диаметр этой окружности, K —

произвольная точка меньшей из дуг BC, а K' и K'' — точки, симметричные K относительно прямых AC и BC соответственно. Докажите, что прямые AC, DK и $K'K''$ имеют общую точку.

А. Акопян

8. Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

1.3.3. Третий тур

7 класс

1. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не 1/2 очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Д. Калинин, С. Токарев

2. Решите ребус РОТОР : СОКОЛ = 3 : 1.

А. Хачатурян

3. Можно ли в таблице 3×3 расставить числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в любых трех клетках, никакие две из которых не лежат на одной вертикали или горизонтали, равнялась 15?

Д. Калинин

4. В прямоугольнике $ABCD$ соединили вершину C с серединой K стороны AD. Оказалось, что $CK \perp BD$. Пусть H — точка пересечения BD и CK. Докажите, что треугольник AHB — равнобедренный.

Д. Калинин

5. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в три цвета так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) Сможет ли он это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

6. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

В. Сендеров

7. На доске написали квадрат, куб, четвертую и пятую степени каких-то натуральных чисел. Одно из этих чисел разделили на два, другое — на три, третье — на четыре, четвертое — на пять. Могли ли снова получиться квадрат, куб, четвертая и пятая степени каких-нибудь натуральных чисел?

Д. Калинин

8. У Сени с Гришей есть пять монет, из которых три настоящие одного веса, одна фальшивая (легче настоящей на 1 г) и одна поддельная (тяжелее настоящей на 1 г). Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без стрелок и гирек определить фальшивую и поддельную монеты?

Жюри турнира

7–8 классы

1. Решите ребус РОТОР : СОКОЛ = 3 : 1.

А. Хачатурян

2. В прямоугольнике $ABCD$ соединили вершину C с серединой K стороны AD. Оказалось, что $CK \perp BD$. Пусть H — точка пересечения BD и CK. Докажите, что треугольник AHB — равнобедренный.

Д. Калинин

3. В некоторой компании любые два человека с общим знакомым имеют разное количество знакомых. Доказать, что в этой компании есть человек только с одним знакомым. (Все знакомства симметричны, у каждого человека есть хотя бы один знакомый.)

С. Конягин

4. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел плохой, если они одной четности и левое больше правого, либо они разной четности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

А. Шаповалов

5. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

6. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Д. Калинин, С. Токарев

7. Найти все тройки простых чисел, удовлетворяющие равенству $x^3 + y^3 = 2z^3$.

В. Сендеров

8. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

В. Сендеров

8 класс, первая лига

1. Пусть d — наибольшее из положительных чисел a, b, c, d. Доказать неравенство

$$a(d-b) + b(d-c) + c(d-a) \leqslant d^2.$$

Сербская олимпиада 1995 г.

2. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает второй раз гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC в точке E. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает второй раз AB в точке F. Сами окружности пересекаются второй раз в точке D. Найти угол EDF.

Д. Калинин

3. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

4. Решите ребус РОТОР : СОКОЛ $= 3 : 1$.

А. Хачатурян

5. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел плохой, если они одной четности и левое больше правого, либо они разной четности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

А. Шаповалов

6. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Д. Калинин, С. Токарев

7. Найти все тройки простых чисел, удовлетворяющие равенству $x^3 + y^3 = 2z^3$.

В. Сендеров

8. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

В. Сендеров

8 класс, высшая лига

1. Многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ таковы, что $P(x) = Q(x)R(x)$. Про $P(x)$ известно, что он имеет степень четыре и все его коэффициенты по модулю не превосходят единицы. Найти наибольшее возможное значение наибольшего из коэффициентов многочленов Q и R.

В. Сендеров

2. Дан плоский выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Через a_k обозначим длину стороны $A_{k-1}A_k$ ($A_0 = A_n$), а через d_k — длину проекции многоугольника на прямую, содержащую сторону $A_{k-1}A_k$. Доказать неравенство

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Д. Фомин

3. Пусть d — наибольшее из положительных чисел a, b, c, d. Доказать неравенство

$$a(d-b) + b(d-c) + c(d-a) \leqslant d^2.$$

Сербская олимпиада 1995 г.

4. Точка M принадлежит короткой дуге AB окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Точки P, Q симметричны M относительно сторон CA и CB. Прямая ℓ симметрична CM относительно биссектрисы угла $\angle ACB$. Доказать, что $\ell \perp PQ$.

Д. Калинин

5. В некоторой компании любые два человека с общим знакомым имеют разное количество знакомых. Доказать, что в этой компании есть человек только с одним знакомым. (Все знакомства симметричны, у каждого человека есть хотя бы один знакомый.)

С. Конягин

6. У натурального числа есть ровно десять простых делителей. Доказать, что найдется несколько делителей этого числа, сумма которых делится на 1024.

Д. Калинин

7. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

8. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел плохой, если они одной четности и левое больше правого, либо они разной четности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

А. Шаповалов

9 класс

1. Многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ таковы, что $P(x) = Q(x)R(x)$. Про $P(x)$ известно, что он имеет степень четыре и все его коэффициенты по модулю не превосходят единицы. Найти наибольшее возможное значение наибольшего из коэффициентов многочленов Q и R.

В. Сендеров

2. Найти все натуральные m, при каждом из которых $3^m + 4^m$ делится на $1^m + 2^m$ и $1^m + 2^m$ простое.

В. Шарич

3. Сумма неотрицательных чисел x, y, z равна 1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{1+4x^2} + \frac{1}{1+4y^2} + \frac{1}{1+4z^2} \geqslant 2.$$

В. Сендеров, В. Шарич

4. Точка M принадлежит короткой дуге AB окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Точки P, Q симметричны M относительно сторон CA и CB. Прямая ℓ симметрична CM относительно биссектрисы угла $\angle ACB$. Доказать, что $\ell \perp PQ$.

Д. Калинин

5. В некоторой компании любые два человека с общим знакомым имеют разное количество знакомых. Доказать, что в этой компании есть человек только с одним знакомым. (Все знакомства симметричны, у каждого человека есть хотя бы один знакомый.)

С. Конягин

6. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

7. Дан плоский выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$. Через a_k обозначим длину стороны $A_{k-1}A_k$ ($A_0 = A_n$), а через d_k — длину проекции многоугольника на прямую, содержащую сторону

$A_{k-1}A_k$. Доказать неравенство

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Д. Фомин

8. Углы B и C треугольника ABC равны 50° и 30° соответственно. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MBC = 20^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Доказать, что $AM \perp BC$.

Сербская олимпиада 1995 г.

1.3.4. Финал

7 класс, финальный бой за 3 и 5 места

1. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это двузначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы 120°). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать как на три равных треугольника, так и на четыре равных (совпадающих при наложении) четырехугольника.

А. Шаповалов

4. Почти прямоугольным будем называть треугольник, где есть угол, который отличается от прямого не более чем на 15°. Почти равнобедренным будем называть треугольник, где есть два угла, которые отличаются не более чем на 15°. Докажите, что любой остроугольный треугольник почти равнобедренный или почти прямоугольный.

В. Гуровиц

5. У Сени есть 5 альбомов с фотографиями. Как-то, рассматривая фотографии, он заметил, что суммарное число фотографий в любых двух альбомах принимает только три значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом альбоме?

Е. Барабанов

6. Можно ли в кружочки на рис. 5 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

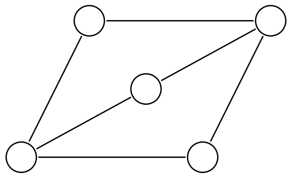


Рис. 5

7. Квадратная клетчатая таблица 4×4 заполнена числами так, что в любом квадрате 3×3 и в любом квадрате 2×2 сумма чисел равна нулю. Докажите, что суммы чисел в противоположных углах квадрата равны нулю.

А. Шаповалов

8. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

7–8 классы, финальный бой за 7 место в 8 классе и за 1 место в 7 классе

1. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы 120°). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Квадратная клетчатая таблица 7×7 заполнена числами так, что в любом квадрате 3×3 и в любом квадрате 2×2 сумма чисел равна нулю. Докажите, что числа в угловых клетках равны.

А. Шаповалов

4. Почти прямоугольным будем называть треугольник, где есть угол, который отличается от прямого не более чем на 15°. Почти равнобедренным будем называть треугольник, где есть два угла, которые отличаются не более чем на 15°. Докажите, что любой остроугольный треугольник почти равнобедренный или почти прямоугольный.

В. Гуровиц

5. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это трехзначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

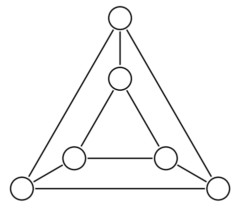


Рис. 6

6. Можно ли в кружочки на рис. 6 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). Докажите, что за 3 операции треугольник можно превратить в любой другой треугольник того же периметра.

А. Шаповалов

8. По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их третья встреча произошла на линии старта. Известно, что первый тратил на один круг на 45 секунд меньше второго и при этом проезжал круг не быстрее чем за 30 секунд. Через какое время после старта произошла первая встреча?

Фольклор

7–8 класс, финальный бой за 1, 3, 5 места

1. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы $120°$). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Есть обычный комплект из 28 домино. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить весь комплект так, чтобы доминошки соприкасались только половинками с одинаковыми цифрами? (Комплект домино — это набор прямоугольников 1×2, в каждой клетке которых написана одна из цифр от 0 до 6, причем каждая пара цифр встречается ровно на одной доминошке.)

А. Шаповалов

4. По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их седьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг трека, если известно, что первый тратил на него на 12 секунд меньше второго и при этом проезжал круг не быстрее 31 секунды?

Фольклор

5. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это трехзначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

6. Можно ли в кружочки на рис. 7 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

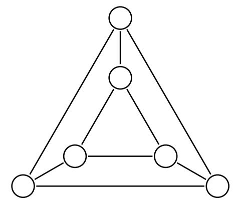


Рис. 7

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). Докажите, что за 3 операции треугольник можно превратить в любой другой треугольник того же периметра.

А. Шаповалов

8. Гирьки весом 1, 2, 3, ..., 40 г разложили на две чашки весов так, что весы оказались в равновесии. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось.

А. Шаповалов

8 класс, тренировочный бой (первая лига)

1. Можно ли в кружочки на рис. 7 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы $120°$). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Квадратная клетчатая таблица 7×7 заполнена числами так, что в любом квадрате 3×3 и в любом квадрате 2×2 сумма чисел равна нулю. Докажите, что числа в угловых клетках равны.

А. Шаповалов

4. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это трехзначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого число $10n$ делится на все натуральные числа, меньше n.

И. Акулич

6. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать как на три равных треугольника, так и на четыре равных (совпадающих при наложении) четырехугольника.

А. Шаповалов

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). Докажите, что за 12 операций можно из правильного треугольника со стороной 1 сделать правильный треугольник со стороной 40.

А. Шаповалов

8. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

8 класс, высшая лига

1. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45°$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Докажите, что точки A, P, M, N, Q лежат на одной окружности.

В. Произволов

3. Есть обычный комплект из 28 домино. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить весь комплект так, чтобы доминошки соприкасались только половинками с одинаковыми цифрами? (Комплект домино — это набор прямоугольников 1×2, в каждой клетке которых написана одна из цифр от 0 до 6, причем каждая пара цифр встречается ровно на одной доминошке.)

А. Шаповалов

4. По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их восьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг трека, если известно, что первый тратил на него на 14 секунд больше второго и при этом проезжал круг не быстрее 31 секунды?

Фольклор

5. Найдите наибольшее натуральное число n, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $n/10$.

И. Акулич

6. Решите уравнение $y^2 = 3p^n + 1$, где y и n натуральные, p — простое.

В. Сендеров

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). За какое наименьшее число операций можно из правильного треугольника со стороной 100 сделать правильный треугольник со стороной 1?

А. Шаповалов

8. Гирьки весом 1, 2, 3, $\ldots$, n г ($n > 4$) разложили на две чашки весов так, что весы оказались в равновесии. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось.

А. Шаповалов

9 класс

1. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45°$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите равенство площадей: $S_{\triangle AFG} = S_{\triangle PMF} + S_{\triangle GNQ}$.

В. Произволов

3. Есть обычный комплект из 28 домино. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить весь комплект так, чтобы доминошки соприкасались только половинками с одинаковыми цифрами? (Комплект домино — это набор прямоугольников 1×2, в каждой клетке которых написана одна из цифр от 0 до 6, причем каждая пара цифр встречается ровно на одной доминошке.)

А. Шаповалов

4. В треугольнике h_1, h_2, h_3 — высоты, d_1, d_2, d_3 — расстояния от некоторой внутренней точки до сторон треугольника. Докажите неравенство: $(h_1^4 + h_2^4 + h_3^4)^3 \geqslant 3^{15}(d_1 d_2 d_3)^4$.

В. Сендеров

5. Найдите наибольшее натуральное число n, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $n/10$.

И. Акулич

6. Решите уравнение $y^2 = 3p^n + 1$, где y и n натуральные, p — простое.

В. Сендеров

7. Назовем треугольники сходными, если у них равны как минимум две из трех сторон. Докажите, что найдется квадрат, который можно разбить на треугольники, сходные данному остроугольному треугольнику.

А. Шаповалов

8. Гирьки весом 1, 2, 3, $\ldots$, n г ($n > 4$) разложили на две чашки весов так, что весы оказались в равновесии. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось.

А. Шаповалов

1.4. Личная олимпиада

1.4.1. 6–7 классы

1. Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трех человек. Беда в том, что стиральная машина тяжелая, поэтому погрузить ее в катер или вытащить из него можно только втроем. Смогут ли они переправиться?

А. Шаповалов

2. Есть некоторое количество одинаковых квадратных столов. Их можно расставить для банкета либо буквой «П», либо буквой «Т» («толщина» каждой буквы — один стол). В каком случае можно будет посадить больше гостей (периметр образовавшегося банкетного стола будет больше)?

А. Блинков

3. Мартышка, Попугай, Удав и Слоненок устроили концерт по случаю приезда бабушки Удава. На концерте было исполнено 7 номеров, причем каждый номер представлял собой либо пение вдвоем, либо танец втроем. Никакие два номера не исполнялись одним и тем же составом. Удав участвовал в исполнении одной песни и двух танцев. Мартышка исполнила больше номеров, чем Слоненок. Сколько номеров исполнил Слоненок?

Е. Барабанов

4. Миллионзначное натуральное число назовем кошачьим, если оно делится на произведение своих цифр. Сколько последовательных натуральных чисел могут быть кошачьими?

В. Сендеров

5. Кеша вырезал из бумаги треугольник ABC с наибольшей стороной AB и перегнул его по прямой так, что вершина C попала на сторону AB и образовался четырехугольник. Укажите множество точек на стороне AB, куда могла попасть вершина C.

А. Шаповалов, В. Гуровиц

6. Клетчатая таблица 3×3 называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы, например

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Существует ли магический квадрат 3×3, заполненный числами, обратными натуральным?

А. Шаповалов

7. Каждому из трех логиков написали на лбу натуральное число, причем одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

Предложил В. Трушков

1.4.2. 8–9 классы

1. Найдите все положительные числа x, для которых число $\{x\}(x+[x])$ целое. ($[x]$ — целая часть, а $\{x\}$ — дробная часть числа x).

Л. Радзивиловский

2. Известно, что p и q — простые числа, причем p^2+q и p^2-q также простые. Найдите p и q.

Б. Френкин

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $C_1A_1B_1$ лежит на биссектрисе угла A.

А. Мякишев

4. Можно ли расположить в ряд все числа от 1 до 2006, взятые по два раза, так, чтобы для каждого числа разница между позициями, на которых оно встречается, была равна этому числу? Например, для чисел от 1 до 4 такое возможно: 2 3 2 4 3 1 1 4.

В. Гуровиц

5. На доске записаны числа 1, 2, 4, 8, ..., 512. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них частное от деления их произведения на их сумму. Докажите, что число на доске после девяти операций не зависит от порядка выбора чисел, и найдите это число.

А. Шаповалов

6. Петя и Вася играют в следующую игру. Имеется куча из 2006! камней. За один ход из кучи разрешается взять не более, чем 1/2006 часть оставшихся в ней камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Ходят поочередно, начинает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

А. Гусаков

7. При каких N можно любой треугольник разбить на N треугольников, имеющих по равной медиане?

А. Шаповалов

2. Решения задач

2.1. Математическая регата

2.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Если первый километр бежать со скоростью 30 км/ч, то время движения будет равно $\frac{1}{30}$ ч $= 2$ мин. Таким образом, поезд уйдет в тот момент, когда останется бежать еще километр.

1.2. Ответ: см. рис. 8.

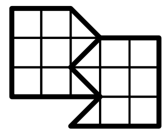


Рис. 8

1.3. Ответ: нет, не может.

Решение. Действительно, последняя цифра суммы зависит только от последних цифр слагаемых. Каждая сумма чисел, стоящих в скобках, оканчивается нулем, то есть делится на 10. Так как каждое из чисел, стоящих вне скобок, делится на 5, то каждое слагаемое данной суммы делится на 50. Следовательно, при любом количестве слагаемых данная сумма делится на 50, поэтому ее значение может оканчиваться либо на $\overline{50}$, либо на $\overline{00}$.

1.4. Ответ: наверняка было названо число 1.

Решение. Заметим, что среди жителей острова не могло быть более одного рыцаря, так как в этом случае рыцари назвали бы одинаковые числа, что противоречит условию задачи.

Если же на острове — один рыцарь, то он обязательно назвал число 1, а лжецы назвали любые 99 различных чисел, возможно, и большие ста. Таким образом, число 1 обязательно было названо, а любое другое число могло быть и не названо.

Второй тур

2.1. Ответ: 5 кг.

Решение. Заметим, что если утром крокозябра весит m кг, то, съев $2m$ кг бананов, она к вечеру весит $3m$ кг, а утром следующего дня — m кг, и так далее. Таким образом, за 4 дня крокозябра съест $8m$ кг бананов, что по условию составляет 40 кг. Следовательно, ее вес до отъезда Алисы — 5 кг.

2.2. Ответ: $45°$.

Решение. Пусть $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$ (см. рис. 9). Прямоугольные треугольники ACP и AEP равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $CP = E$.

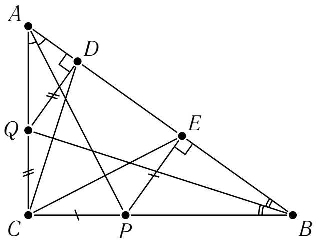


Рис. 9

Аналогично, из равенства прямоугольных треугольников BQC и BQD получим, что $CQ = DQ$.

Следовательно, треугольники CPE и CQD — равнобедренные, поэтому по свойству внешнего угла треугольника $\angle PCE = \angle PEC = \frac{1}{2}\angle BPE = \frac{90° - 2\beta}{2}$ и $\angle QCD = \angle QDC = \frac{1}{2}\angle QD = \frac{90° - 2\alpha}{2}$. Таким образом, $\angle DCE = 90° - (\angle PCE + \angle QCD) = \alpha + \beta = 45°$.

2.3. Ответ: нет, не имеет.

Решение. Заметим, что $\overline{\text{МАМА}} = \overline{\text{МА}} \cdot 101$. Так как 101 — простое число и на него делится произведение чисел $\overline{\text{ДО}}$ и $\overline{\text{ЧБ}}$, то одно из этих чисел должно делится на 101. Но двузначное число не может делиться на трехзначное. Поэтому данный ребус не имеет решений.

2.4. Ответ: 4 звена.

Решение. Пример такой ломаной приведен на рис. 10. Докажем, что меньше четырех звеньев быть не может. Заметим, что любое звено ломаной может пересекать не более двух сторон большого квадрата, причем каждую из них только один раз. Значит, каждое звено ломаной может пересекать не более двух сторон маленьких квадратов, лежащих на сторонах большого. Так как таких сторон восемь, то ломаная должна иметь не меньше, чем 8:2=4 звена.

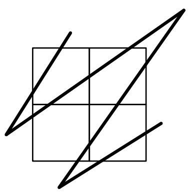


Рис. 10

Третий тур

3.1. Ответ: 239 и 1767.

Решение. Пусть Вовочка должен был сложить числа a и b, а фактически сложил числа $10a$ и b, тогда $a+b=2006$ и $10a+b=4157$. Вычтем из второго уравнения первое, получим: $9a = 2151$, то есть $a = 239$. Тогда $b = 2006 - 239 = 1767$.

3.2. Ответ: периметр четырехугольника $AMOK$ равен p.

Первое решение. Пусть L — середина стороны данного треугольника, тогда BL является его высотой и биссектрисой и периметр треугольника ABL равен периметру треугольника ACD (см. рис. 11).

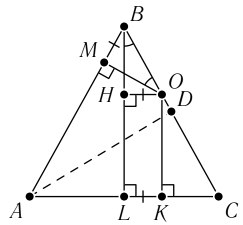


Рис. 11

Проведем перпендикуляр OH к прямой BL. Так как $\angle OBH = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$, $\angle BOM = 90° - \angle ABC = 30°$ и гипотенуза BO у прямоугольных треугольников BOM и BOH — общая, то эти треугольники равны. Следовательно, $OH = BM$ и $BH = OM$. Кроме того, поскольку $LHOK$ — прямоугольник, то $OH = LK$ и $OK = HL$. Таким образом,

$$P_K = AM + MO + OK + KA = \\ = AM + BH + HL + BM + AL = AB + BL + AL = p.$$

Второе решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC. Тогда сумма расстояний от точки O, лежащей на BC, до боковых сторон равна высоте BL, проведенной к боковой стороне (см. рис. 12).

Действительно, продолжим отрезок MO за точку O и проведем к прямой MO перпендикуляр BN. Так как

$$\angle BOK = 90° - \angle ABC = \\ = 90° - \angle ACB = \angle COM = \angle BON,$$

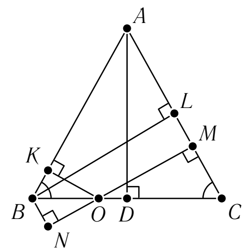


Рис. 12

то прямоугольные треугольники BOK и BON, имеющие общую гипотенузу BO, равны. Следовательно, $OK = ON$, тогда $OK+OM=NM=BL$, поскольку прямые BN и AC параллельны.

По условию, треугольник ABC — равносторонний. Пусть его сторона равна a, а высота h, тогда $P_D = 1,5a + h$. Кроме того, $\angle BOK = \angle COM = 30^\circ$, поэтому $BK = \frac{1}{2}BO$ и $M = \frac{1}{2}CO$. Следовательно,

$$P_K = OK + OM + AK + AM =$$
$$= BL + AB + AC - (BK + CM) = h + 2a - 0,5a = 1,5a + h = p.$$

3.3. Ответ: да, существует.

Решение. Например, можно взять числа

$$2^{19} \cdot 3^{10};\ 2^{18} \cdot 3^{11};\ \ldots;\ 2^{10} \cdot 3^{19}.$$

Каждое из этих чисел не делится ни на одно из остальных, так как в его разложение либо множитель 2, либо множитель 3 входит с меньшим показателем степени. Если возвести любое из выбранных чисел в квадрат, то и двойка, и тройка войдут в его разложение с показателем степени не меньшим, чем 20, поэтому квадрат любого такого числа делится на каждое из остальных чисел.

3.4. Ответ: черный.

Решение. Судя по виду сверху, верхняя шашка в передней правой стопке — белая, поэтому все три черные шашки правого столбца на виде спереди принадлежат дальней стопке, то есть в передней правой стопке всего одна шашка, и она — белая.

Аналогично, на виде слева все три черные шашки левого столбца принадлежат дальней стопке, то есть в задней левой стопке также всего одна белая шашка. Это означает, что все четыре шашки левого столбца на виде спереди и правого столбца на виде слева принадлежат передней левой стопке.

Таким образом, в передней левой стопке — три белых и одна черная шашка, по одной белой шашке — в передней правой и задней левой стопках, три черных шашки — в задней правой стопке, и в этой же стопке — одна (нижняя) шашка неизвестного цвета (см. рис. 13).

Всего: пять белых шашек, четыре черных и одна шашка неизвестного цвета. Поскольку черных и белых шашек должно быть поровну, то цвет этой шашки — черный.

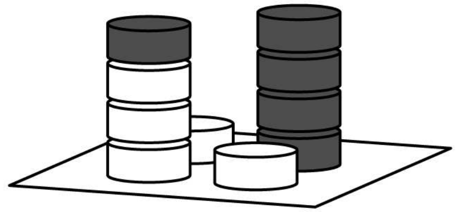


Рис. 13

2.1.2. 8–9 классы

1.1. Ответ: 0,5.

Первое решение. Так как $x \geqslant 2 - x \Leftrightarrow x \geqslant 1$, то

$$\max(x; 2-x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1, \\ 2-x, & x < 1. \end{cases}$$

Аналогично, $3x \geqslant 1 + 2x \Leftrightarrow x \geqslant 1$, поэтому

$$\min(3x; 1+2x) = \begin{cases} 1+2x, & x \geqslant 1, \\ 3x, & x < 1. \end{cases}$$

Следовательно:
1) если $x \geqslant 1$, то исходное уравнение примет вид: $x = 1 + 2x$, откуда $x = -1$, что невозможно;
2) если $x < 1$, то исходное уравнение примет вид: $2 - x = 3x$, откуда $x = 0,5$.

Второе решение. Рассмотрим графики функций

$$f(x) = \max(x; 2-x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1, \\ 2-x, & x < 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \min(3x; 1+2x) = \begin{cases} 1+2x, & x \geqslant 1, \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$$

(см. рис. 14). Эти ломаные имеют единственную общую точку, абсцисса которой $x = 0,5$ находится из графиков и проверяется подстановкой.

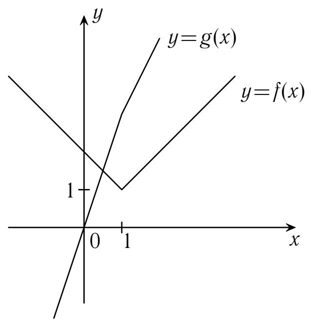


Рис. 14

Более общий способ решения уравнений вида $\max(a;b) = \min(a;b)$ *основан на применении формул*

$$\max(a;b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

и

$$\min(a;b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

В нашем случае

$$\max(x;2-x) = \frac{2+|2-2x|}{2}; \quad \min(3x;1+2x) = \frac{5x+1-|x-1|}{2}.$$

Исходное уравнение примет вид: $3|x-1| = 5x-1$. *Решив это уравнение, получим, что* $x = 0,5$.

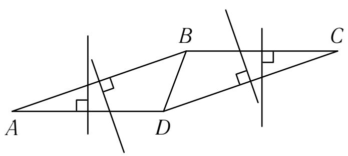


Рис. 15

1.2. Ответ: да, существует. Например, параллелограмм $ABCD$, у которого диагональ BD меньше любой из сторон (см. рис. 15).

1.3. Ответ: нет, не существует.

Решение. Указанная сумма равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Предположим, что ее значение оканчивается цифрой 7, тогда число $n(n+1)$ должно оканчиваться цифрой 4. Перебором последних цифр убеждаемся, что произведение соседних натуральных чисел может оканчиваться только цифрами 0, 2 или 6, то есть цифрой 4 оканчиваться не может.

Перебор можно сократить, если использовать, что число, оканчивающееся на 4, дает остаток 4 при делении на 5. Тогда достаточно проверить все возможные остатки от деления n *на 5.*

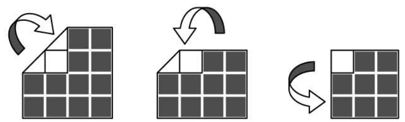


Рис. 16

1.4. Ответ: да, можно. См. рис. 16.

Второй тур

2.1. Ответ: 165.

Решение. Умножим первое равенство на 7, а второе равенство на -3 и сложим полученные равенства. Получим, что $x^2+z^2 = 65$. Учитывая, что x и z — натуральные числа, перебором находим, что

$$\begin{cases} x=1 \\ z=8 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=8 \\ z=1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=4 \\ z=7 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=7 \\ z=4 \end{cases}.$$

Подставим полученные результаты в любое из данных равенств.
1) Если $x=1$, $z=8$, то $y^2 = 85$, следовательно, $y \notin N$.
2) Если $x=8$, $z=1$, то $y^2 = 148$, следовательно, $y \notin N$.
3) Если $x=4$, $z=7$, то $y^2 = 100$, следовательно, $y = 10$. В этом случае $x^2+y^2+z^2 = 165$.
4) Если $x=7$, $z=4$, то $y^2 = 133$, следовательно, $y \notin N$.

2.2. Ответ: $4\sqrt{3}$ см^2.

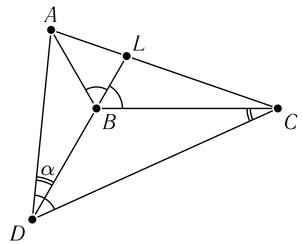


Рис. 17

Решение. Из условия следует, что угол ABL — внешний для треугольника ABD и $\angle ABL = 60^\circ$ (см. рис. 17).

Пусть $\angle ADB = \alpha$, тогда

$$\angle DAB = 60^\circ - \alpha = \angle BDC.$$

Кроме того, $\angle ABD = \angle CBD = 120^\circ$, поэтому треугольники ABD и DBC подобны (по двум углам). Следовательно, $\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow AB \cdot BC = BD^2$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} BD^2 \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}(\text{ см}^2).$$

2.3. Ответ: нет, не могут.

Решение. Рассмотрим число

$$\overline{БРАБ} = 1000Б + \overline{РАБ} = 10 \cdot \overline{БРА} + Б.$$

Тогда $10 \cdot \overline{БРА} - \overline{РАБ} = 999Б$. Пусть оба данных числа делятся на 49, тогда левая часть полученного равенства делится на 49, поэтому и $999Б$ делится на 49. Так как числа $999 = 3^3 \cdot 37$ и

$49 = 7^2$ взаимно просты, то $Б$ должно делиться на 49. Но $Б$ — однозначное число, отличное от 0 (так как с цифры $Б$ начинается число $\overline{БРА}$), поэтому оно не может делиться на 49. Полученное противоречие показывает, что на 49 данные числа одновременно делиться не могут.

Можно также непосредственно выписать все трехзначные числа, делящиеся на 49. Таких чисел 18, и, сравнивая их попарно, можно убедиться, что среди них нет пары чисел указанного вида.

2.4. Ответ: сумма всех чисел такой таблицы равна нулю.

Решение. Представим каждое из чисел от 1 до 100 в виде суммы двух слагаемых, первое из которых делится на десять нацело, а второе не больше десяти.

0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9	0+10
10+1	10+2	10+3	10+4	10+5	10+6	10+7	10+8	10+9	10+10
20+1	20+2	20+3	20+4	20+5	20+6	20+7	20+8	20+9	20+10
30+1	30+2	30+3	30+4	30+5	30+6	30+7	30+8	30+9	30+10
40+1	40+2	40+3	40+4	40+5	40+6	40+7	40+8	40+9	40+10
50+1	50+2	50+3	50+4	50+5	50+6	50+7	50+8	50+9	50+10
60+1	60+2	60+3	60+4	60+5	60+6	60+7	60+8	60+9	60+10
70+1	70+2	70+3	70+4	70+5	70+6	70+7	70+8	70+9	70+10
80+1	80+2	80+3	80+4	80+5	80+6	80+7	80+8	80+9	80+10
90+1	90+2	90+3	90+4	90+5	90+6	90+7	90+8	90+9	90+10

Заметим, что в каждой строке равны первые слагаемые, а в каждом столбце равны вторые слагаемые. Так как в каждой строке исходной таблицы положительных и отрицательных чисел поровну, то при сложении всех чисел таблицы все первые слагаемые взаимно уничтожатся, а поскольку в каждом столбце положительных и отрицательных чисел также поровну, то взаимно уничтожатся и все вторые слагаемые. Следовательно, сумма всех чисел таблицы равна нулю.

Третий тур

3.1. Решение. Пусть x — корень данного уравнения. Если $x = 0$, то $q = 0$, и требуемое неравенство выполняется при любых значениях p.

Если $x \neq 0$, то

$$x^3+px+q=0 \Leftrightarrow 4x^4+4px^2+4qx=0 \Leftrightarrow 4x^4+4px^2+p^2=p^2-4qx.$$

Так как $4x^4+4px^2+p^2=(2x^2+p)^2 \geqslant 0$, то $p^2-4qx \geqslant 0 \Leftrightarrow 4qx \leqslant p^2$, что и требовалось доказать.

3.2. Ответ: 120°.

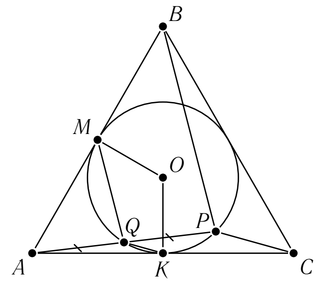


Рис. 18

Решение. Пусть данная окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и K соответственно (см. рис. 18). Так как M является серединой отрезка AB, а Q является серединой отрезка AP, то отрезок MQ является средней линией треугольника ABP, параллельной стороне BP. Аналогично, KQ — средняя линия треугольника ACP, параллельная CP. Следовательно, $\angle BPC = \angle MQK$, так как это углы с соответственно сонаправленными сторонами. Так как $\triangle ABC$ — равносторонний, то $\angle MOK = 120^\circ$. По свойству углов, вписанных в окружность, получим, что $\angle MQK = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle MOK = 120^\circ$.

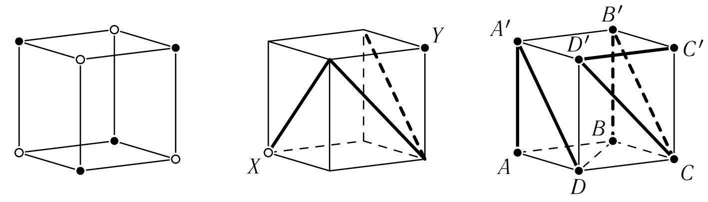
3.3. Ответ: семь.

Решение. Например: $29 = 29^1$, $30 = 2\cdot 3\cdot 5$, $31 = 31^1$, $32 = 2^5$, $33 = 3\cdot 11$, $34 = 2\cdot 17$, $35 = 5\cdot 7$. Большее количество «хороших» чисел подряд идти не может. Действительно, среди восьми последовательных натуральных чисел всегда имеется число, которое дает остаток 4 при делении на 8. В его разложении множитель 2 содержится во второй степени.

3.4. Ответ: $3 + 4\sqrt{2}$.

Решение. Так как у куба восемь вершин, то путь содержит не более семи отрезков. Пусть из них a отрезков длины 1 и b отрезков длины $\sqrt{2}$. Тогда весь путь имеет длину $a + b\sqrt{2}$. Раскрасим вершины куба в шахматном порядке (см. рис. 19а).

Поскольку начало и конец пути окрашены в разные цвета, то на протяжении маршрута цвет вершин меняется нечетное количество



а б в

Рис. 19

раз. Заметим также, что движение по ребру меняет цвет очередной вершины, а движение по диагонали — нет. Следовательно, a — нечетное число.

Докажем, что $a \neq 1$. Рассмотрим маршрут длины $1 + 6\sqrt{2}$. Так как в таком маршруте шесть диагоналей, то он должен начинаться или заканчиваться тремя подряд идущими диагоналями. Отметим также, что если маршрут содержит четыре подряд идущих диагонали, то возникает самопересечение. Следовательно, этот маршрут имеет вид: три диагонали, затем — ребро, затем еще три диагонали. Из произвольной вершины X можно (с точностью до симметрии) единственным образом провести путь из трех диагоналей без самопересечений (см. рис. 19б). Но тогда аналогичный путь из противоположной вершины определяется однозначно, и концы полученных путей не соединены ребром.

Пример маршрута длины $3 + 4\sqrt{2}$ приведен на рис. 19в. Ясно, что этот маршрут длиннее, чем любой маршрут из семи отрезков с $a > 3$. При этом он длиннее, чем самый длинный маршрут из шести отрезков, так как $3 + 4\sqrt{2} > 1 + 5\sqrt{2}$.

2.2. Командная олимпиада

1. Решение. Если q и r нечетны, то p четно, откуда $p = 2$, что невозможно. Значит, хотя бы одно из чисел q и r (например, r) четно и потому равно 2. Поэтому число $p^2 - r^2$ оканчивается на 4. С другой стороны, каждое из нечетных чисел p^2 и r^2 оканчивается на одну из цифр $1, 5, 9$. Следовательно, одно из этих двух чисел оканчивается на 5, откуда $p = 5$ либо $r = 5$. Первый случай невозможен, второй — возможен (например, $7^2 - 2^2 - 5^2 = 20$, $13^2 - 2^2 - 5^2 = 140$). Таким образом, $q + r = 7$.

Или:

Заметим, что если все числа p, q и r — нечетные, то выражение $p^2 - q^2 - r^2$ тоже нечетно, а значит, не делится на 10. Единственное простое четное число — двойка. p не может быть равно двум, поэтому одно из чисел q и r (например, q) равно двум. Значит, разность $p^2 - r^2$ оканчивается на четыре.

С другой стороны, квадрат нечетного числа может оканчиваться на одну из цифр 1, 5, 9. Следовательно, одно из этих двух чисел должно оканчиваться на 5. Поэтому либо $p = 5$, либо $r = 5$.

Если $p = 5$, то $p^2 - q^2 = 25 - 4 = 21$. Нельзя подобрать такое простое r, чтобы $(21 - r^2)$ делилось на десять. А число r может быть равно пяти, например, $7^2 - 2^2 - 5^2 = 20$, $13^2 - 2^2 - 5^2 = 140$. Таким образом, $q + r = 7$.

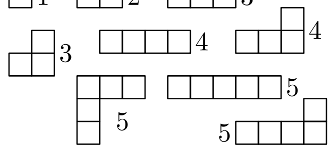


Рис. 20

2. Решение. Из рамки можно вырезать прямоугольники $1 \times n$ и уголки. Рассмотрим 10 различных фигурок возможно меньшей площади (9 из них показано на рис. 20, а десятая фигурка имеет площадь, равную шести).

Сумма их площадей равна $1+2+3+3+4+4+5+5+5+6 = 38$ клеток, что больше площади рамки. Значит, частей не более 9. Пример с 9 частями показан на рис. 21.

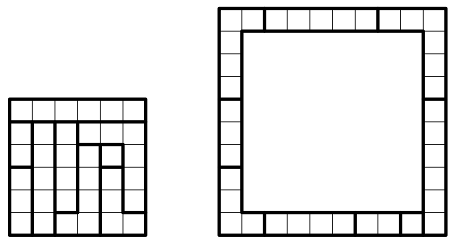


Рис. 21

3. Ответ: 16160.

$x + 1 \leqslant 2005! = \dfrac{2006!}{2006}$. Это значит, что в игре 2006! Петя имеет право взять $x + 1$ камень. Тогда он попадет в ситуацию после выигрышного хода первого игрока в игре $2006! - 1$. Действуя далее как этот игрок, он выиграет.

7. Ответ: при любых N.

Решение. На рис. 45 приведен пример для $N = 3$.

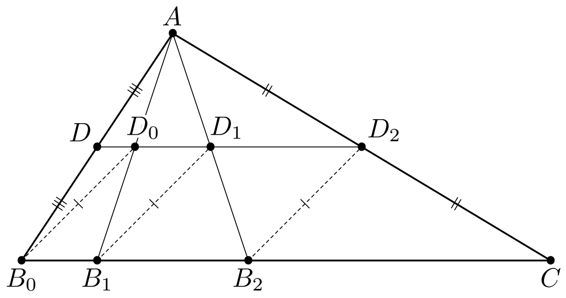


Рис. 45

Треугольник AB_0C разбит на треугольники AB_0B_1, AB_1B_2 и AB_2C такие, что $B_0B_1 : B_1B_2 : B_2C = 1 : 2 : 4$. Точки D_0 и D_1 лежат на пересечении средней линии DD_2 с отрезками AB_1 и AB_2, поэтому B_0D_0, B_1D_1 и B_2D_2 — медианы треугольников разбиения. Средняя линия параллельна основанию и вдвое меньше его. Значит, она разбивается в том же отношении $1 : 2 : 4$, $D_0D_1 = B_0B_1$ и $D_1D_2 = B_1B_2$. Следовательно, $B_0D_0D_1B_1$ и $B_1D_1D_2B_2$ — параллелограммы, и потому все медианы параллельны и равны.

В общем случае точки B_1, B_2, ..., B_{N-1} делят сторону B_0C в отношении $1 : 2 : 2^2 : \dots : 2^{N-1}$, остальные рассуждения аналогичны.

3. Приложение

Призеры награждены дипломами и призами, предоставленными журналом *Квант*, а также Фондом математического образования и просвещения. Остальные команды получили дипломы за участие. Подробные итоги турнира представлены на сайте www.lmsh.ru.

3.1. Призеры турнира математических боев

7 класс

Гимназия 1543, 7 Б, Москва, рук. М. М. Букина
Гимназия 1543, 7 А, Москва, рук. Б. П. Гейдман
«Квантик», Москва, рук. И. А. Николаева
ФМШ 2007, 7 кл., Москва, рук. В. В. Ховрина
Школа 936, Москва, рук. Т. П. Зорина

7–8 класс

Школа 17, Москва, рук. Д. А. Коробицын
ФМЛ, 7 кл., Киров, рук. Л. А. Смирнова
«Большая перемена», 7 кл., Кострома, рук. Д. А. Калинин
МОУ СОШ N5, Магнитогорск, рук. Н. С. Никифорова, А. В. Устинов
«Эврика», 7 кл., Харьков, рук. Е. Л. Аринкина, А. Л. Берштейн

8 класс, первая лига

МОУ СОШ N5, Магнитогорск, рук. А. В. Христева, А. С. Великих
Гимназия 1543, 8 А, г. Москва, рук. Т. С. Гейдер

8 класс, высшая лига

«Эврика», 8 кл., Харьков, рук. Е. Л. Аринкина
Московский городской дворец детского (юношеского) творчества, рук. С. Е. Дубов
Школа 82, 8 кл., Черноголовка, рук. Л.Н. Головко
Школа 9 им. А. С. Пушкина, Пермь, рук. О. Н. Вязьмина
Гимназия 1543, 8 Б, Москва, рук. А. В. Спивак

9 класс

Гимназия 1543, 9 кл., 9–3, Москва, рук. А. В. Спивак
Гимназия 1543, 9 кл., 9–1, Москва, рук. И. В. Раскина
Гимназия 1543, 9 кл., 9–2, Москва, рук. А. В. Спивак
«Большая перемена», 9 кл., Кострома, рук. Д. А. Калинин

3.2. Призеры личной олимпиады

6 класс

Кадец Борис — Харьков, ХУВК 45 «Академическая гимназия»
Матвеевский Дмитрий — Харьков, ХФМЛ 27 (5 класс)
Лисичкин Сергей — Харьков, гимназия 47
Коротов Денис — Москва, школа 936

7 класс

Ивлев Федор — Москва, гимназия 1543
Деревицкий Иван — Магнитогорск, МОУ СОШ N5
Малых Софья — Киров, физ.-мат. лицей
Николаев Семен — Москва, школа 1189 (кружок «Квантик»)
Садовников Сергей — Волгореченск, школа 2
Южанин Денис — Киров, физ.-мат. лицей
Артемьева Галина — Москва, гимназия 1543
Баева Светлана — Киров, физ.-мат. лицей
Голицын Владимир — Харьков, ХФМЛ 27
Дудкин Александр — Харьков, ХФМЛ 27
Криволапов Владислав — Иваново, лицей 67
Макаров Николай — Москва, школа 179
Ноздрин Михаил — Магнитогорск, МОУ СОШ N5
Панфилов Данила — Москва, ФМШ 2007
Пожарский Богдан — Харьков, ХФМЛ 27
Редега Владимир — Москва, гимназия 1543
Тарасов Артем — Киров, физ.-мат. лицей
Троицкий Алексей — Москва, школа 1189

8 класс

Соболев Евгений — Харьков, гимназия 47
Маянцев Кирилл — Кострома, Волгореченск, школа 3
Бочкарев Михаил — Пермь, МОУ СОШ N9 им. А. С. Пушкина
Ефремов Дмитрий — Магнитогорск, МОУ СОШ N5
Таранникова Екатерина — Москва, ФМШ 2007
Турбина Наталья — Ангарск Иркутской обл., школа 10
Паламарчук Игорь — Москва, лицей «Вторая школа»
Акопян Эмма — Москва, гимназия 1543
Соболев Дмитрий — Харьков, гимназия 47
Смирнова Алена — Москва, лицей «Вторая школа»
Гавричев Егор — Москва, лицей «Вторая школа»

9 класс

Андреев Михаил — Москва, школа 57
Кисловская Анна — Кострома, лицей 32
Ромаскевич Елена — Москва, гимназия 1543
Бакаев Егор — Кострома, лицей 32
Погребнов Алексей — Москва, гимназия 1543
Марченко Евгений — Москва, гимназия 1543

Оглавление

Редакторы: *Т. Караваева*, *Б. Френкин*, *А. Хачатурян*, *А. Чеботарев*.
Обложка: *М. Вельтищев*.

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 01.03.2007 г.
Формат 60 × 90/16. Печать офсетная. Печ. л. 7,5. Тираж 1000 экз. Заказ №

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».