квадрат 2×2, равна одному и тому же числу s. Найдите все возможные значения s.

В.Замков

9. Двое играют в шахматы, а еще шестеро желающих сыграть образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди; тот, чья очередь подошла, играет с победителем и так далее. Может ли в какой-то момент оказаться, что каждые двое сыграли между собой ровно один раз?

С.Токарев

10. В многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные – разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

В.Каскевич

11. Решите систему уравнений

$$x\left(1+\sqrt{y}\right)=y\left(1+\sqrt{z}\right)=z\left(1+\sqrt{x}\right).$$

С.Дворянинов

12. Биссектрисы AA', BB', CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что из отрезков IA', IB', IC' можно составить остроугольный треугольник.

С.Токарев

13. Из бумаги склеили правильный тетраэдр. Разрежьте его на 12 одинаковых бумажных равносторонних треугольников.

В.Произволов

14. Изобразите на координатной плоскости точки $(x; y)$, удовлетворяющие условию

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3=\frac{x^3+y^3}{2}.$$

С.Токарев

15. Могут ли длины сторон a, b, c треугольника удовлетворять неравенству

$$a^3+b^3+c^3+2abc\geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)?$$

Д.Калинин

16. Оси абсцисс и ординат и графики $y=ax+b$, $y=bx+c$, $y=cx+a$ расположены так, как показано на рисунке 7. Укажите ось абсцисс и положительное направление на ней.

С.Токарев

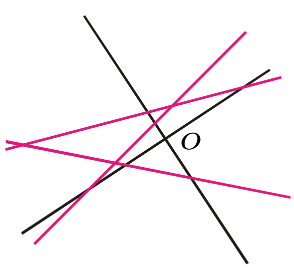

Рис. 7

17. Может ли каждая из сторон выпуклого четырехугольника быть пересечена биссектрисой некоторого его угла (в точке, отличной от вершины)?

И.Григорьева

18. Существуют ли такие натуральные числа x, y, z, для которых

$$\text{НОК}[x, y, z]=\text{НОК}[x+1, y+1, z+1]=\text{НОК}[x+2, y+2, z+2]?$$

С.Токарев

19. Можно ли в кубе с ребром 2000 разместить 7 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было бы больше 2001? (Точки можно помещать не только внутри, но и на поверхности куба.)

С.Волченков

20. Докажите, что существуют такие различные стозначные числа A и B, являющиеся точными кубами, что цифры десятичной записи числа A, записанные в обратном порядке, образуют число B.

В.Замков

21. Палиндромом называют натуральное число, которое не изменится, если его цифры записать в обратном порядке. Докажите, что для любого простого $p>150$ существует палиндром, делящийся на p и содержащий не более $0{,}23p$ цифр.

И.Акулич

22. Рассмотрим всевозможные трехчлены вида ax^2+bx+c с натуральными коэффициентами a, b, c, не превосходящими 100. Каких трехчленов среди них больше: имеющих действительные корни или не имеющих?

С.Токарев

23. Окружность пересекает стороны равностороннего треугольника, как показано на рисунке 8. Докажите равенство

$$AB_2+CA_2+BC_2=AC_1+BA_1+CB_1.$$

В.Произволов

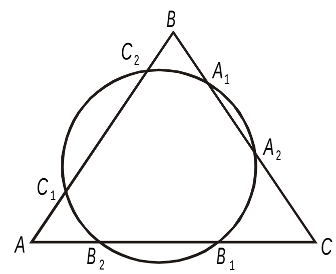

Рис. 8

24. Какое наибольшее количество королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы ровно половина из них не угрожала никому из остальных?

И.Акулич

25. В однокруговом хоккейном турнире все команды набрали разное число очков. (В хоккее за победу дают 2 очка, за ничью 1, а за поражение 0 очков.) Команда, занявшая последнее место, выиграла не менее 25% своих матчей, а команда, занявшая второе место, выиграла не более 40% своих матчей. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этом турнире?

И.Воронович

26. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляем пешки по следующим правилам: выбираем любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставим пешку. Затем выбираем аналогичные четыре пустые клетки, на них снова ставим пешку, и так далее. Какое наибольшее число пешек можно поставить на доску, соблюдая эти правила?

И.Акулич

27. На турнир съехались 105 школьников. Среди любых пятнадцати из них есть школьники, знакомые между собой. Кроме того, любые два школьника, у которых одинаковое количество знакомых среди участников турнира, не знакомы между собой, а у которых разное количество знакомых – знакомы. Докажите, что среди участников турнира есть школьник, знакомый со всеми остальными.

В.Каскевич

Публикацию подготовили
И.Акулич, Т.Бахтина, А.Спивак, С.Токарев

Фото представила Е.Иванова