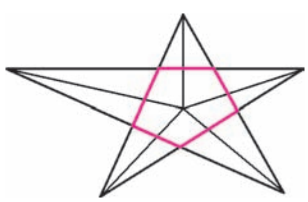


Летний турнир имени А.П.Савина «Математика 6-8»

В выпуклом многоугольнике сумма тупых углов равна 2008°. Сколько сторон у этого многоугольника?

А.Шаповалов

С 26 июня по 2 июля 2008 года под городом Судиславлем Костромской области состоялся летний турнир математических боев имени А.П.Савина. Это уже 14-й такой турнир, и популярность его растет с каждым годом. Организаторами турнира выступили образовательная программа «Большая перемена» (директор Г.В.Кондаков) и база отдыха «Берендеевы поляны». Лишь размеры базы вынудили организаторов ограничиться 32 командами 6—9 классов. Кроме москвичей, составивших львиную долю команд, в турнире приняли участие команды из Иванова, Кирова, Костромы, Ленинградской области, Магнитогорска, Харькова и Черноголовки. Команды были разделены на 5 лиг: четыре основные лиги по классам и еще одна лига, объединившая четыре оставшиеся команды 6 и 7 классов.

В первый день для разминки была проведена новая математическая игра «Абака»[1], вызвавшая большой интерес у школьников.

Во второй день у старших школьников начались круговые турниры матбоев (5 туров), у младших прошла устная командная олимпиада для разделения на лиги, а 4 тура матбоев начались со следующего дня.

В лиге 9 классов интрига сохранялась до последнего: сборные Магнитогорска (руководитель Н.С.Никифорова), Костромы (руководитель Д.А.Калинин) и «Квантик-1» из Москвы (руководитель И.А.Николаева) выиграли друг у друга по кругу и победили остальные 3 команды. Блиц-бой вывел на первое место Кострому, на 2-е — «Квантик-1», оставив Магнитогорск на 3-м месте. В лиге 8 классов борьба была менее острой: с заметным отрывом, выиграв все бои, победила команда «Эврика» из Харькова (руководитель А.Л.Берштейн), 2-е и 3-е места — у московских

[1] *См. об этом статью К.Кнопа «Абака для математиков» в газете «Математика» («Первое сентября») № 16/2008.*

команд «Л2Ш» (т.е. лицей «Вторая школа», руководитель А.Г.Кондакова) и гимназии 1514 (руководитель Л.О.Бычкова). В лиге 7 классов диплом I степени достался команде «Москва-Юг» (руководитель Т.П.Зорина), дипломы II степени – командам Кирова (руководитель Н.Н.Франчески) и «2007-Б» из Москвы (руководитель Д.В.Прокопенко), дипломы III степени – командам Ленинградской области (руководитель С.П.Павлов) и «2007-А» из Москвы (руководитель О.Е.Данченко). В лиге 6 классов диплом I степени выиграла команда Кирова (руководитель М.А.Прокашева), дипломы II степени – команды «Кострома 6-6-6» (руководитель Н.Л.Чернятьев) и «Интеллектуал» из Москвы (руководитель Н.М.Нетрусова), дипломы III степени – команды «Эврика-1» и «Эврика-2» из Харькова (руководитель Е.Л.Аринкина).

Один из дней в середине турнира был отдан под личную устную олимпиаду. Участнику выдавался листочек с тремя задачами. Решив одну, участник получал второй листочек с еще тремя задачами. Решив задачу из второго листочка, участник получал последний, третий листочек с еще тремя задачами. Ученики 6–7 классов решали одни и те же задачи, но с раздельным зачетом. Аналогично проходила личная олимпиада и для учеников 8 и 9 классов.

Призеры личной олимпиады

Гран-при завоевали семиклассник *Всеволод Гулин* («Эврика», Харьков), опередивший всех в олимпиаде для старших на 2 задачи и разделивший первое место в олимпиаде для младших, и шестиклассница *Юлия Гребенникова* («Интеллектуал», Москва), опередившая своих сверстников на одну задачу.

Дипломы I степени получили

Глухов Евгений – Кострома, 9 кл.,
Николаев Семен – Москва, «Квантик-1», 9 кл.,
Бурова Ольга – Москва, «Л2Ш», 8 кл.,
Лисичкин Сергей – Харьков, «Эврика», 8 кл.,
Сандрикова Мария – Москва, школа 218, 7 кл.,
Синяков Лев – Москва, «Москва-Юг», 7 кл.,
Любчик Евгений – Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Зверев Иван – Москва, «Москва-Юг», 6 кл.

Дипломы II степени получили

Зиборов Артем – Москва, школа 218, 9 кл.,
Ноздрин Михаил – Магнитогорск, 9кл.,
Пастух Денис – Москва, школа 218, 9 кл.,
Яцкевич Максим – Москва, гимназия 1514, 9 кл.,
Вилкул Даниил – Москва, «Л2Ш», 8 кл.,
Матвеевский Дмитрий – Харьков, «Эврика», 7 и 8 кл.,
Логвинов Сергей – Москва, «Москва-Юг», 7 кл.,
Баев Будимир – Москва, «Фрактал», 6 кл.,
Бакунов Никита – Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Горбунов Дмитрий – Москва, «Интеллектуал», 6 кл.

Дипломы III степени получили

Абрамян Левон – Магнитогорск, 9 кл.,
Деревицкий Иван – Магнитогорск, 9кл.,
Ланина Наталья – Москва,«Квантик-1», 9 кл.,
Яцкевич Максим – Москва, гимназия 1514, 9 кл.,
Топеха Артур – Москва, «Квантик-2», 9 кл.,
Завадский Дмитрий – Ленинградская область, 8 кл.,
Циглер Александр – Магнитогорск, 8 кл.,
Шолохов Александр – Иваново, 8 кл.,
Виноградов Алексей – Москва, гимназия 1514, 7 кл.,
Котельникова Дарья – Киров, 7 кл.,
Мирский Алексей – Москва, «Интеллектуал», 7 кл.,
Рахматулин Ян – Киров, 7 кл.,
Жабрёв Илья – Ленинградская область, 6 кл.,
Калашников Вадим – Харьков, «Эврика-1», 6 кл.,
Князева Алиса – Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Корякин Данил – Киров, 6 кл.,
Малыгин Виталий – Киров, 6 кл.,
Мизюк Соломия – Москва, школа 2007, 6 кл.,
Сиротина Анастасия – Москва, школа 2007, 6 кл.

Поощрительными дипломами отмечены

семиклассники: кировчане *Никита Козицын* и *Роман Маракулин*, москвичи *Ирина Булушева*, *Артем Закиров* и *Сергей Рафаэлов* (все из школы 2007), *Денис Булейко* (гимназия 1514), *Наталья Остроухова* (школа 218) и *Мария Щербакова* («Фрактал»).

Книги и другие призы для победителей предоставили редакция журнала «Квант», компания «Яндекс» и Фонд математического образования и просвещения.

Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия турнира: А.Л.Берштейн, М.А.Берштейн, А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков, А.С.Горская, Н.Гребеник, С.А.Дориченко, А.Ефремов, Д.А.Калинин, П.Мартынов, К.Матвеев, Д.В.Прокопенко, В.А.Сендеров, А.Б.Скопенков, К.Скопцов, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов.

Избранные задачи турнира

По традиции, идущей еще от первых турниров, большинство задач турнира были новыми и авторскими. Из них мы постарались выбрать такие, где есть пусть маленькое, но чудо: из условий следует чуть-чуть больше, чем можно ожидать, или в решении есть неожиданный поворот и краткость.

У каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит и кто ее автор. Звездочками отмечены трудные задачи, двумя звездочками – особо трудные.

1 (6–7). На поверхности кубика Рубика $3\times3\times3$ отмечены несколько точек так, что в каждом из 54 квадратиков, включая его границу, отмечена ровно одна точка. Какое наименьшее число точек может быть отмечено?

А.Шаповалов

2 (6–7). Дано натуральное число, у которого все цифры, кроме одной, нечетные. Может ли оно делиться на 2008?

С.Токарев

3 (6–8). В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. *Интересной* назовем команду, выигравшую нечетное число матчей, а *особенной*

— команду, выигравшую нечетное число матчей у интересных. Докажите, что число особенных команд четно.

С.Токарев

4 (6–8). Двум игрокам выдано по карточке с числами a и b из набора, где 1, 2, ..., 10 встречаются по разу. Каждый видит только свое число. Игроки Первый и Второй по очереди называют числа, каждое должно быть больше предыдущего и заведомо (для называющего) делить НОК(a, b). Кто не смог сделать ход — проиграл. Есть ли такая карточка, получив которую Первый может быть уверен в выигрыше?

А.Шаповалов

5 (6–9). Какое наименьшее число слонов можно расставить на доске $2N \times 2N$ так, чтобы каждое свободное поле было побито ровно один раз?

А.Шаповалов

6 (6–9). На шахматную доску по одной выставляются ладьи так, чтобы каждая выставленная побила (на момент выставления) четное число пустых полей. Какое наибольшее число ладей можно выставить?

А.Шаповалов

7** (6–9). Можно ли поверхность куба оклеить без перекрытий тремя одинаковыми пятиугольниками?

С.Токарев

8* (7–8). В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 85°$, $\angle B = 115°$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

А.Шаповалов

9 (7–8). Натуральное число n можно заменить на одно из следующих 6 чисел: $3n$, $3n+1$, $3n+2$, $n/3$, $(n+1)/3$, $(n+2)/3$ при условии, что получающееся число — целое. Докажите, что с помощью таких операций из любого натурального числа можно получить любое.

Л.Смирнова

10 (7–8). Корень n-й степени из n-значного числа равен сумме цифр этого числа ($n > 1$). Найдите все значения, которые может принимать этот корень.

С.Шестаков

11 (7–8). Даны два равных прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ ($AB = AE, AD = AG$) таких, что точка G лежит на отрезке BC. Точка P — пересечение отрезков FG и CD. Докажите, что отрезки PB и PE равны.

Д.Калинин

12 (7–9). За круглым столом сидят 2000 рыцарей, которые представляют 999 рыцарских орденов, причем каждый орден кем-нибудь представлен. Среди любых 1000 подряд сидящих рыцарей есть представители не более чем 500 орденов. Сколько рыцарей первого ордена присутствует за круглым столом? Найдите все возможные ответы и покажите, что других нет.

К.Матвеев

13 (7–9). Существуют ли ненулевые целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$ такие, что

$$x_1 x_2 \ldots x_{2008} = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\ldots(x_{2008} + x_1)?$$

С. Токарев, В. Сендеров

14 (7–9). Дан клетчатый квадрат $n \times n$, в котором стерли все клетки выше главной диагонали. В каждой клетке оставшейся фигуры записывают 0 или 1, при этом если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

А.Горская

15 (7–9). Диаметром треугольника назовем длину его наибольшей стороны. Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника одинакового диаметра.

А.Шаповалов

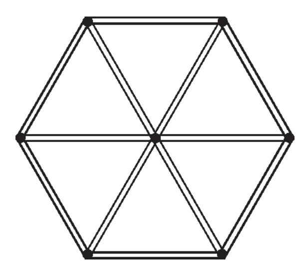
16 (7–9). Дана таблица из 40 строк и 20 столбцов. В первом столбце закрашена самая нижняя клетка, во втором столбце закрашены 3 нижние клетки и т. д.; в 20-м столбце закрашены 39 нижних клеток. Два игрока по очереди ставят ладьи в закрашенные клетки так, чтобы ладьи не били друг друга. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

К.Матвеев

17* (7–9). Натуральное число N равно произведению первых l простых чисел. Докажите, что любое натуральное число, меньшее N, может быть представлено как сумма нескольких различных натуральных делителей N.

К.Матвеев

18* (7–9). В системе коридоров, показанной на рисунке, расстояние между каждыми двумя соседними развилками одно и то же. По коридорам бегает мышка, способная развивать скорость до 7 м/с. За мышкой согласо-



(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 29)

ванно охотятся две кошки, могущие развивать скорость до v м/с. Все животные в каждый момент знают месторасположение друг друга. При каком наименьшем значении v кошки могут (независимо от начальных положений) гарантированно поймать мышку?

С.Токарев

19 (8–9). Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ делится на $a+b+c$.

В.Произволов, В.Сендеров

20 (8–9). Может ли $(n-1)!$ делиться на n^{2008} для какого-нибудь целого $n>1$?

В.Сендеров

21 (8–9). Даны 9 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Известно, что среди попарных сумм $a_i+a_j\ (i \ne j)$ как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_9$ – целые.

А.Шаповалов

22 (8–9). Пусть $x, y, z \ge 0$. Докажите неравенство

$$(x+y-z)^n+(y+z-x)^n+(z+x-y)^n \ge x^n+y^n+z^n.$$

В.Произволов, В.Сендеров

23 (8–9). Докажите, что $\sqrt[n]{2} > \dfrac{2n}{2n-1}$ при целом $n >$ > 1.

В.Сендеров

24 (8–9). Для каких x найдутся такие (не обязательно целые и не обязательно положительные) числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$, что

$$x_1+x_2+\ldots+x_{2008}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{2008}}=x\ ?$$

В.Сендеров

25 (8–9). К окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, проведены касательные в точках A и C, пересекающиеся в точке P. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, M – середина стороны AC, H – ортоцентр треугольника ABC. Прямая MH пересекает A_1C_1 в точке K. Докажите, что точки P, B_1, K лежат на одной прямой.

Ю.Блинков

26 (8–9). Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA, которая пересекает вторую окружность в точке Y. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника BXY.

Ю.Блинков

27 (8–9). В трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке O, известны основание AD, а также углы A, D и AOD. С помощью циркуля и линейки постройте эту трапецию.

Д.Калинин

28 (8–9). Двое играющих по очереди ломают палку: первый – на две части (возможно, неравные), второй – одну из получившихся частей на две, первый – одну из трех частей на две, и так далее. Выигрывает тот, кто сможет после какого-то из своих ходов выбрать из всех имеющихся частей 4 палки, длины которых образуют арифметическую прогрессию. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

А.Шаповалов

29 (8–9). На клетчатую доску 100×100 выставлены короли двух цветов так, что черные не бьют белых и черных королей не больше, чем белых. Каково наибольшее возможное число черных королей?

О.Крижановский, А. Шаповалов

30* (8–9). Дан выпуклый многоугольник. Пусть r – количество способов разбить его непересекающимися диагоналями на четное число многоугольников, а n – на нечетное. Докажите, что $|r-n|=1$.

А.Клячко

31* (8–9). Докажите, что любой треугольник можно циркулем и линейкой разбить на 4 меньших треугольника так, чтобы 4 точки пересечения медиан меньших треугольников лежали на одной окружности.

А.Шаповалов

32* (8–9). Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий – через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?

А.Шаповалов

33* (8–9). Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать на 2008 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник – параллелограмм?

А.Шаповалов

Публикацию подготовил А.Шаповалов
Фотографии предоставил Д.Калинин

ЛЕТНИЙ ТУРНИР ИМЕНИ А.П.САВИНА «МАТЕМАТИКА 6–8»

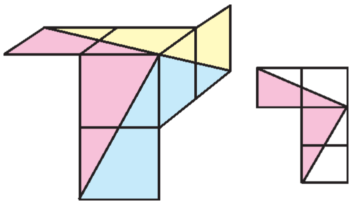


Рис. 3

7. Да, можно (см. рис. 3).

8. 80°.

По свойствам серединных перпендикуляров $MA = MB$, $MC = MD$, поэтому $\Delta AMD = \Delta BMC$ по трем сторонам, и $\angle MAD = \angle MBC$. Обозначим $\angle MAB = \angle MBA = x$. Заметим еще, что точки C и D лежат по одну сторону прямой AB. Для расположения точки M есть два случая.

Случай 1. Пусть точка M и точка C лежат по разные стороны прямой AB (рис.4).

На первый взгляд, $\angle MAD = \angle MAB + \angle DAB$ и $\angle MBC = \angle MBA + \angle CBA$. Однако углы в левых частях равны, а суммы не равны: $\angle MAB + \angle DAB = x + 85^\circ < x + 115^\circ = \angle MBA + \angle CBA$. Как так, ведь стороны-то совпадают!? Мы забыли, что луч AB (или луч BA) не обязан лежать внутри угла, и значит, сумма может быть не равна углу, а дополнять его до 360°. Обе суммы дополнять не могут, так как тогда они снова должны быть равны между собой. Значит, одна сумма равна углу, а другая угол дополняет. При этом дополняющая сумма больше: углы у нас меньше 180°, а дополняющая сумма больше 180°. Итак, $\angle MAD = 85^\circ + x$, значит, и $\angle MBC = 85^\circ + x$. Подставляя это в равенство $\angle MBC + \angle MBA + CBA = 360^\circ$, получим уравнение $(85^\circ + x) + x + 115^\circ = 360^\circ$, откуда $x = 80^\circ$.

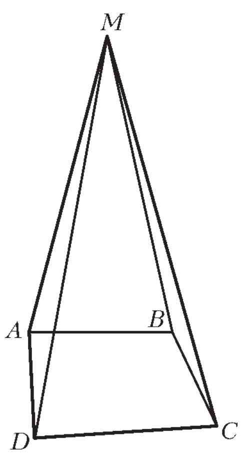


Рис. 4

Случай 2. Пусть точки M, C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Тогда $\angle MAD$ равен разности (в том или ином порядке) углов $\angle MAB$ и $\angle DAB$, т.е. $\angle MAD = 85^\circ - x$ или $\angle MAD = x - 85^\circ$. Аналогично, $\angle MBC = 115^\circ - x$ или $\angle MBC = x - 115^\circ$. Единственная возможность равенства углов: $115^\circ - x = x - 85^\circ$, откуда $x = 100^\circ$. Это не подходит, так как мы ищем угол при основании равнобедренного треугольника, а он острый. Значит, такое расположение точки M невозможно.

17. Пусть мы хотим представить число $m < N = p_1p_2\ldots p_l$. Докажем индукцией по N. База: $N = 6$. Тогда $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 3 + 1$, $5 = 3 + 2$. Переход от $N_1 = p_1p_2\ldots p_k$ к $N_2 = p_1p_2\ldots p_kp_{k+1}$. Если $m < N_1$, то число можно представить в виде суммы различных делителей N_1 (являющихся также и делителями числа N_2) по предположению. Если $m \ge N_1$, то $m = p_{k+1}s + d$, где $d < p_{k+1}$, $s < p_1p_2\ldots p_k$. Поскольку $p_{k+1} < p_1p_2\ldots p_k$ (докажем потом), то и $d < p_1p_2\ldots p_k$, поэтому и s и d мы можем представить в виде суммы различных делителей числа N_1 по предположению. Домножив почленно на p_{k+1} представление для s и сложив его с представлением для d, получим представление для m. В нем все слагаемые различны: внутри групп они и были различны, а слагаемые из разных групп различны, поскольку после домножения слагаемые из группы для s все делятся на p_{k+1}, а из группы для d – не делятся.

Осталось показать, что $N_1 = p_1p_2\ldots p_k > p_{k+1}$. Рассмотрим число $p_1p_2\ldots p_k - 1$. Оно взаимно просто с $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Поэтому у $N_1 - 1$ есть простой делитель, отличный от $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и, значит, не меньший p_{k+1}. Тем более $N_1 > p_{k+1}$.

18. При $v \ge 3{,}5$ м/с.

Пусть есть кошка, способная бегать со скоростью до 3,5 м/с. Посадим ее в точку K, середину отрезка OC, и поставим сторожить проход через точки O и C (рис.5). А именно, если мышка извне отрезков, выходящих из O или C (т.е. с ломаной $DEFAB$), попытается пройти через одну из этих точек, то кошка ее перехватит. Например, как только мышка через точку E двинется к O, кошка тоже двинется к O с вдвое меньшей скоростью, чем мышка. Если же мышка двинется назад к E, то и кошка – назад к K. Посадим теперь вторую кошку в O, и пусть она идет к мышке кратчайшим путем. Тогда, как бы медленно ни двигалась вторая кошка, мышка сначала будет вытеснена на периметр шестиугольника, а если она попала на ломаную BCD – то с этой ломаной на ломаную $DEFAB$. Далее, идя по периметру, вторая кошка рано или поздно вытеснит мышку с периметра на какой-то из отрезков, выходящих из O или C, и мышка на таком отрезке окажется зажатой между двумя кошками и будет поймана. Попытки «сбежать» на такой отрезок раньше ничего мышке не дадут, потому что первая кошка не позволит покинуть отрезок с другой стороны, и мышке придется вернуться на контур.

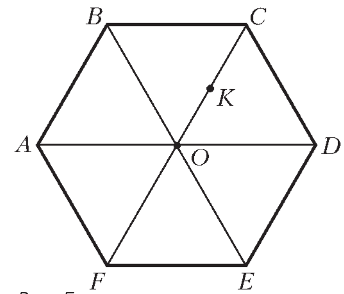


Рис. 5

Теперь пусть мышка бегает более чем вдвое быстрее любой кошки. Покажем, как она сможет убегать от кошек сколь угодно долго. Назовем вершины шестиугольника и его центр развилками: из каждой выходит не менее 3 коридоров. Пусть мышка сидит в некоторой развилке X и к ней по какому-нибудь коридору приближается кошка. Есть еще два коридора, которые сходятся в X: обозначим их XY и XZ. Если Y и Z связаны коридором, то пусть P – середина этого коридора. Добавим к XY половинки коридоров, выходящих из Y, а к XZ – половинки коридоров, входящих из Z, получим две «метелки», у которых общей точкой может быть только P (на рисунке 6 мышка сидит в B, кошка приближается по коридору AB, метелки насажены на отрезки BO и BC и обозначены красным и синим цветом соответственно). По крайней мере на одной из двух метелок нет другой кошки (исключая, быть может, точку P). Тогда мышка должна бежать к соответствующей развилке Y или Z, куда ни вторая, ни, тем более, первая кошка за это время добежать не успеют. Далее мышка продолжает убегать от кошек тем же способом.

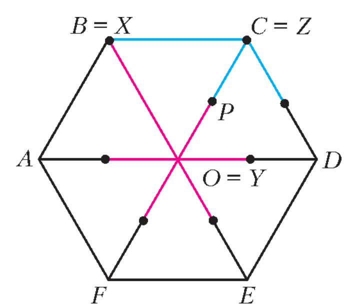


Рис. 6

29. 4949 королей.

30. Для треугольника решение очевидно, поэтому рассмотрим многоугольник с более чем 3 сторонами. Пусть B – одна из вершин многоугольника.

Рассмотрим группу из всех разбиений, где нет ни одной выходящей из B диагонали. Пусть A и C – соседние с B вершины. Заметим, что если в группе есть разбиение без диагонали AC, то можно провести и AC: ведь если нет диагоналей из B, то AC никого не пересечет. Значит, можно всю группу разбить на пары разбиений, где набор проведенных диагоналей отличается только на AC. Но тогда в каждой паре в одном разбиении четное число многоугольников, а в другом – нечетное. Следовательно, в группе тех и других разбиений поровну.

Проведем теперь произвольный набор выходящих из B диагоналей и рассмотрим группу из всех разбиений, которые можно получить, добавляя к этому набору любые диагонали, кроме выходящих из B. Если в набор вошли не все возможные диагонали из B, то добавить ничего нельзя, и вся группа состоит из одного разбиения. Если же не все, то среди частей разбиения есть многоугольник с более чем 3 сторонами. Как и выше, отметим в нем соседние с B вершины A и C, и разобьем всю группу на пары, где набор проведенных диагоналей отличается только на AC. Снова получим, что в каждой группе поровну разбиений на четное и на нечетное число многоугольников.

Остался только случай, когда в набор вошли все возможные диагонали из B. Тогда добавить ничего нельзя, и именно на это единственное разбиение отличаются количества способов разбить на четное и нечетное число многоугольников.

31. Пусть в треугольнике ABC (рис.7) углы B и C – острые, M и N – середины сторон AB и AC, D и E – такие точки на стороне BC, что $DMNE$ – прямоугольник, O – точка пересечения его диагоналей. Выберем на отрезке DE такую точку H, что $BD = DH$. Поскольку $DE = MN = BC/2$, то $HE = EC$. Разобьем треугольник ABC на треугольники BOH, COH, AOC и AOB. Их медианы OD, OE, ON и OM равны между собой как половинки диагоналей прямоугольника. Точки пересечения медиан каждого треугольника удалены от точки O на $2/3$ длины медианы и поэтому лежат на окружности с центром O.

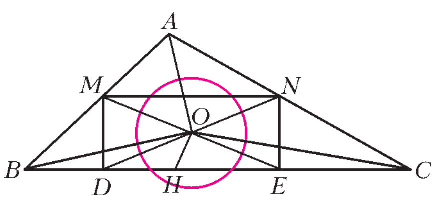


Рис. 7

32. Через 35 минут.

То что общая дорожка составляет только часть пути джентльменов (рис.8), создает неприятную для решения нерегулярность встреч. Можно, конечно, учесть это с помощью дополнительных неравенств, но этот хлопотливый метод не для Холмса. В его духе привлечь подставное лицо и попросить подыграть. Итак, попросим садовника погулять вокруг газона Холмса симметрично Ватсону относительно общей стороны. Тогда садовник будет ходить вокруг газона по часовой стрелке и встречаться с Холмсом регулярно, через равные промежутки времени. А поскольку по общей дорожке садовник и Ватсон идут бок о бок, то Ватсон встречается с Холмсом тогда и только тогда, когда садовник встречается с Холмсом на общей дорожке.

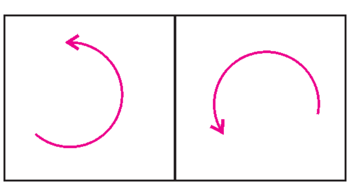


Рис. 8

Итак, поскольку скорости Холмса и садовника относятся как 6:5, то и между очередными встречами с садовником Холмс успевает пройти $6/11$ периметра квадрата, а садовник $5/11$. С точки зрения движения по дорожке квадрат можно считать кругом. Отмеряя от произвольной точки по $6/11$ периметра, мы отметим ровно 11 точек встреч, которые разбивают круг на 11 равных частей. Назовем P_1 точку какой-нибудь их встречи и обозначим еще 10 точек $P_2, \ldots, P_{11}$, шагая от точки P_1 против часовой стрелки по $1/11$ круга. Встречи Холмса и садовника происходят через равные промежутки времени T последовательно в точках $P_1, P_7, P_2, P_8, P_3, P_9, P_6, P_{10}, P_7, P_{11}, P_8, P_1$ и т.д.

Общая дорожка составляет ровно четверть круга. На нее могут попасть 2 или 3 отмеченные точки (4 точки уже не поместятся, так как расстояние между крайними $3/11 > 1/4$, а для 2-й точки всегда найдется место, поскольку первая разделит дорожку на два промежутка и один из промежутков будет не короче $1/8 > 1/11$). Если на общей дорожке лежат какие-то три последовательные точки (пусть P_1, P_2 и P_3), то встречи в этих точках (а, значит, и с Ватсоном) происходят через промежутки времени $2T$, $2T$, $7T$, $2T$, $2T$, $7T$,… Поэтому $2T = 10$ мин, и следующая встреча случится через $5T = 35$ мин. Если же на общей дорожке лежат две последовательные точки (пусть P_1, P_2), то встречи в этих точках происходят через промежутки времени $2T$, $9T$, $2T$, $9T$, $2T$, $9T$… Это противоречит двум встречам подряд через равные промежутки времени, поэтому такой случай невозможен.

33. Не обязательно.

Это может быть, например, Г-образный шестиугольник G, составленный из 1004 кирпичей: прямоугольников размера $1 \times \sqrt{502}$ (рис.9).

Заметим, что из двух таких G составляется большой прямоугольник размера $1004 \times 2\sqrt{502}$, подобный кирпичу (с коэффициентом $2\sqrt{502}$). Значит, каждый кирпич разрезается на 2 шестиугольника, подобных G. Итого, G можно разрезать на $2 \cdot 1004 = 2008$ многоугольников, подобных исходному G.

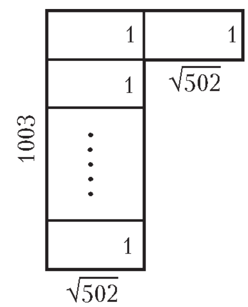


Рис. 9