

XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, высшая лига, четвёртый тур

2 июля 2014 года

1. В королевстве Кривых Весов запрещены чашечные весы, показывающие равновесие при равенстве масс грузов на чашах. Однако для любого $a > 1$ разрешены неравноплечные весы, показывающие равновесие, если вес груза на левой чаше в a раз больше веса на правой. Имея всего одни весы, Толя за два взвешивания может из 8 монет выявить одну фальшивую (более легкую). Чему равно a у Толиных весов? (Известно, что все настоящие монеты весят одинаково).

2. В шахматном турнире участвуют 14 игроков. В каждом туре они разбиваются на пары случайным образом, но два шахматиста, игравшие друг с другом раньше, второй раз играть не могут. Турнир заканчивается, когда такое разбиение произвести невозможно. Найдите минимально возможное число туров.

3. Возьмём бумажный квадрат $ABCD$. Пусть M — середина CD . Согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M , а середина AD попала на диагональ AC . Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим как MX . Теперь согнем квадрат так, чтобы сгиб снова проходил через точку M , а середина BC попала на диагональ BD . Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим как MY . Докажите, что треугольник MXU — правильный.

4. В полночь ведьма заколдовала Мальчика-с-пальчика бродить по плоской равнине. За первый час он должен пройти по прямой 1 км, потом повернуть под прямым углом направо или налево, пройти за следующий час 2 км, опять так же повернуть, пройти за час 3 км и т.д. Колдовство исчезнет, если Мальчик-с-пальчик окажется в точке старта через целое число часов. Через некоторое время Мальчику удалось освободиться. В котором часу это могло произойти?

5. Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается продолжений катетов CA , CB в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника ABC пересекает прямую A_1B_1 в точках P и Q . Найдите $\angle PBQ$.

6. В записи натурального числа ровно 2014 цифр, причём средние четыре цифры — 2, 0, 1, 4 (в указанном порядке). Может ли такое число быть точным квадратом?

7. В каждую из n одинаковых пробирок налито не более половины пробирки раствора разной концентрации. Химик знает, где что, и может перелить из пробирки в пробирку любое нужное ему количество раствора (лишь бы пробирка не переполнилась). За какое наименьшее число переливаний он гарантированно может добиться, чтобы раствор в каждой пробирке был одинаковой концентрации (при этом некоторые пробирки, возможно, опустеют).

8. Парно различные действительные числа a , b и c таковы, что $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. Чему может равняться abc ?

XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, высшая лига, четвёртый тур

2 июля 2014 года

1. В королевстве Кривых Весов запрещены чашечные весы, показывающие равновесие при равенстве масс грузов на чашах. Однако для любого $a > 1$ разрешены неравноплечные весы, показывающие равновесие, если вес груза на левой чаше в a раз больше веса на правой. Имея всего одни весы, Толя за два взвешивания может из 8 монет выявить одну фальшивую (более легкую). Чему равно a у Толиных весов? (Известно, что все настоящие монеты весят одинаково).

2. В однокруговом шахматном турнире участвует 8 игроков. В какой-то момент оказалось, что нет пяти шахматистов, которые попарно сыграли друг с другом. Какое максимальное количество партий могло быть сыграно к этому моменту?

3. Возьмём бумажный квадрат $ABCD$. Пусть M — середина CD . Согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M , а середина AD попала на диагональ AC . Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим как MX . Теперь согнем квадрат так, чтобы сгиб снова проходил через точку M , а середина BC попала на диагональ BD . Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим как MY . Докажите, что треугольник MXY — правильный.

4. В полночь ведьма заколдовала Мальчика-с-пальчика бродить по плоской равнине. За первый час он должен пройти по прямой 1 км, потом повернуть под прямым углом направо или налево, пройти за следующий час 2 км, опять так же повернуть, пройти за час 3 км и т.д. Колдовство исчезнет, если Мальчик-с-пальчик окажется в точке старта через целое число часов. Через некоторое время Мальчику удалось освободиться. Могло ли это произойти в полдень наступившего дня?

5. На окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC , выбрана точка M так, что середина отрезка AM также лежит на этой окружности. Найдите $\angle BMC$.

6. В записи натурального числа ровно 2014 цифр, причём средние четыре цифры — 2, 0, 1, 4 (в указанном порядке). Может ли такое число быть точным квадратом?

7. В ряд стоят (дном вниз) 100 стаканов. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди (начинает Петя). Ходящий может взять два стакана, стоящие через один, и перевернуть их вверх дном. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. (Обратно переворачивать стакан нельзя.) Кто из игроков сможет победить независимо от игры соперника?

8. Попарно различные действительные числа a , b и c таковы, что $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. Чему может равняться abc ?