XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, высшая лига, первый тур

28 июня 2014 года

1. Клетки прямоугольной таблицы раскрасили в несколько цветов так, что каждым цветом оказались раскрашены 4 клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям таблицы. Докажите, что если длина стороны одной клетки таблицы равна 1, то сумма периметров всех прямоугольников делится на 4.

2. К двум непересекающимся окружностям ω_1, ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания с ω_1 и ω_2 соответственно. CD — общая внутренняя касательная, где C и D — точки касания с ω_1 и ω_2 соответственно. Окружность, проходящая через точки A, C, B, пересекает ω_2 в точке E. Найдите $\angle CED$.

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 20$, $KC = 14$. Ее отразили относительно боковых сторон треугольника и получили точки L и M. Серединный перпендикуляр к отрезку LM пересекает прямую AC в точке P. Найдите PK.

4. Саша написал программу, которая последовательно вычисляет сумму натуральных чисел, начиная с 2014, убирая при этом в каждом слагаемом произвольно одну цифру в десятичной записи. (Разрешается убирать и первую цифру, даже если после неё стоит 0.) Программа должна закончить работу, как только полученная на очередном шаге сумма будет нацело делиться на три. Может ли так случиться, что программа будет работать бесконечно?

5. В куче сто палочек длин 1, 2, 3, $\ldots$, 100. Петя и Вася по очереди берут из кучи по три палочки и складывают из них не соприкасающиеся друг с другом треугольники. Кто не может сделать ход, проиграл. Начинает Петя. Кто из них может выигрывать, как бы ни играл соперник?

6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{k!} + \frac{1}{m!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{r!}$. (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

7. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу, если за ничью давали 1 очко, а за поражение 0?

8. На доску последовательно выписывают числа вида $n^2 - 7n + 47$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ Какое максимальное количество простых чисел будет выписано подряд?