XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, высшая лига, второй тур

28 июня 2014 года

1. Окружность с центром $\boldsymbol{I}$ вписана в прямоугольный треугольник $\boldsymbol{ABC}$ и касается его катетов $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ в точках $\boldsymbol{B_0}$ и $\boldsymbol{A_0}$ соответственно. Перпендикуляр, опущенный из точки $\boldsymbol{A_0}$ на прямую AI, и перпендикуляр, опущенный из точки $\boldsymbol{B_0}$ на прямую $\boldsymbol{BI}$, пересекаются в точке $\boldsymbol{P}$. Докажите, что $\boldsymbol{BP \perp AC}$.

2. Рассматривается $\boldsymbol{n}$ прямых, содержащих стороны $\boldsymbol{n}$-угольника. Какое наибольшее количество окружностей может касаться всех этих прямых? (Решите задачу для каждого $\boldsymbol{n}$.)

3. Из шести неразличимых на вид монет две фальшивые (более легкие). Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо предварительно заплатить одну монету. Если уплаченная монета настоящая, весы покажут правильный результат, а если фальшивая — покажут неизвестно что. Можно ли с помощью таких весов найти (и не потратить) хотя бы одну настоящую монету?

4. Есть $\boldsymbol{n^3}$ единичных кубиков. Петя раскрашивает их в два цвета (возможно, по-разному), каждую грань в один цвет. Вася победит, если сможет сложить из всех кубиков куб со стороной $\boldsymbol{n}$, у которого каждая грань одноцветна. При каком наименьшем $\boldsymbol{n}$ Петя не сможет ему помешать?

5. Известно, что $\boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}}$. Докажите, что для всякого нечётного $\boldsymbol{n}$ верно $\boldsymbol{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}}$.

6. Квадратная таблица $\boldsymbol{5 \times 5}$ заполнена числами. Её столбцы переставили так, что никакой столбец не остался на месте. В получившейся таблице строки переставили так, что никакая строка не осталась на месте. В итоге получилась исходная таблица. Какое наибольшее возможное количество различных чисел могло быть в ней?

7. Диагонали четырёхугольника $\boldsymbol{ABCD}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{O}$. Известно, что $\boldsymbol{AB = BC = CD}$ и $\boldsymbol{\angle AOD = 120^\circ}$. Докажите, что $\boldsymbol{AO = OD}$.

8. У натурального числа $\boldsymbol{N}$ "поднимают" последнюю цифру, превращая её в показатель степени, например из $\boldsymbol{179}$ получают $\boldsymbol{17^9}$, из $\boldsymbol{2007}$ — $\boldsymbol{200^7}$ и т. п. Найдите наибольшее $\boldsymbol{N}$, для которого полученная степень будет делиться на $\boldsymbol{N}$.

XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, первая лига, второй тур

28 июня 2014 года

1. Дан квадрат $ABCD$. Точка O выбрана так, что $\angle AOC = 45°$. Перпендикуляр к AO в точке A пересекает прямую OC в точке A_1. Перпендикуляр к CO в точке C пересекает прямую OA в точке C_1. Докажите, что на прямой A_1C_1 лежит одна из вершин квадрата.

2. Рассматривается n прямых, содержащих стороны n-угольника. Какое наибольшее количество окружностей может касаться всех этих прямых? (Решите задачу для каждого n.)

3. Из шести неразличимых на вид монет две фальшивые (более легкие). Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо предварительно заплатить одну монету. Если уплаченная монета настоящая, весы покажут правильный результат, а если фальшивая — покажут неизвестно что. Можно ли с помощью таких весов найти (и не потратить) хотя бы одну настоящую монету?

4. Есть тысяча единичных кубиков. Они как-то раскрашены в два цвета (возможно, по-разному), каждая грань одноцветна. Обязательно ли удастся сложить из них куб со стороной 10, у которого каждая грань одноцветна?

5. Известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Докажите, что для всякого нечётного n верно $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}$.

6. Квадратная таблица 4×4 заполнена числами. Её столбцы переставили так, что никакой столбец не остался на месте. В получившейся таблице строки переставили так, что никакая строка не осталась на месте. В итоге получилась исходная таблица. Какое наибольшее возможное количество различных чисел могло быть в ней?

7. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$ и $\angle AOD = 120°$. Докажите, что $AO = OD$.

8. Натуральное число назовём "дождливым", если в его разложении на простые множители каждый множитель входит в нечётной степени. Какое максимальное количество дождливых чисел может идти подряд?