XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, первая лига, первый тур

28 июня 2014 года

1. В небоскрёбе **2014** этажей и только один странный лифт. В лифте всего две кнопки: $\boxed{\text{-3}}$ и $\boxed{\text{x2}}$. При нажатии на первую кнопку из номера текущего этажа вычитается **3**, при нажатии на вторую номер этажа умножается на **2**, и если такой этаж в небоскрёбе есть, лифт едет туда. Егор вошёл в лифт на первом этаже. До каких этажей он сможет доехать?

2. К двум непересекающимся окружностям ω_1, ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания с ω_1 и ω_2 соответственно. CD — общая внутренняя касательная, где C и D — точки касания с ω_1 и ω_2 соответственно. Окружность, проходящая через точки A, C, B, пересекает ω_2 в точке E. Найдите $\angle CED$.

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 20$, $KC = 14$. Ее отразили относительно боковых сторон треугольника и получили точки L и M. Серединный перпендикуляр к отрезку LM пересекает прямую AC в точке P. Найдите PK.

4. На шахматной доске стоят **15** фишек — по одной на каждой клетке левой вертикали и нижней горизонтали. Любые фишки можно передвигать на соседние (по стороне) клетки, причём на клетку, где побывала фишка, нельзя ставить никакую другую. Какое максимальное количество фишек может оказаться на пятнадцати клетках верхней горизонтали и правой вертикали?

5. В куче сто палочек длин $1, 2, 3, \ldots, 100$. Петя и Вася по очереди берут из кучи по три палочки и складывают из них не соприкасающиеся друг с другом треугольники. Кто не может сделать ход, проиграл. Начинает Петя. Кто из них может выигрывать, как бы ни играл соперник?

6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{k!} + \frac{1}{m!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{r!}$. (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

7. Шесть команд в однокруговом турнире набрали **10**, **7**, **6**, **6**, **3** и **3** очка. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу, если за ничью давали **1** очко, а за поражение **0**?

8. На доску последовательно выписывают числа вида $n^2 - 7n + 47$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ Какое максимальное количество простых чисел будет выписано подряд?