XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, высшая лига, третий тур

1 июля 2014 года

1. Петя отметил на окружности $\mathbf{20}$ красных и $\mathbf{20}$ синих точек. Затем Вася проводит хорды так, чтобы концы каждой хорды были одного цвета и чтобы эти хорды не пересекались (даже в вершинах). Какое наибольшее количество хорд Вася гарантированно сможет провести, как бы ни расставил вершины Петя?

2. Выпуклый четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Среди их углов ровно три различных. Каким может быть наибольший из этих углов?

3. Найдите все такие натуральные $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$, для которых число $\mathbf{3}^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{7}^{\boldsymbol{k}}$ является точным квадратом.

4. Даны три уравнения: $\boldsymbol{x^2 + 2x + a = 0}$, $\boldsymbol{x^2 + 3x + b = 0}$, $\boldsymbol{x^2 + 4x + c = 0}$. Известно, что у любых двух из них есть общий корень. Докажите, что среди корней этих уравнений есть три числа, одно из которых является средним арифметическим двух других.

5. Существует ли на шахматной доске $\mathbf{100 \times 100}$ расстановка $\mathbf{100}$ не бьющих друг друга ферзей, при которой их можно разбить на $\mathbf{25}$ групп по четыре ферзя, каждая из которых располагалась бы в квадрате $\mathbf{4 \times 4}$?

6. Алиса и Базилио делят добытую кучу из $\mathbf{100}$ кошельков, в которых лежат соответственно $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, ..., $\mathbf{100}$ золотых. Ходят по очереди, начинает Алиса. За один ход можно вынуть из кучи любой кошелёк и либо взять его себе, либо отдать напарнику. Как только у кого-то наберётся $\mathbf{50}$ кошельков, другой забирает из кучи все остальные. Какую наибольшую долю золотых может обеспечить себе Алиса, как бы ни действовал Базилио?

6. Существует ли на шахматной доске $\mathbf{100 \times 100}$ расстановка $\mathbf{100}$ не бьющих друг друга ферзей, при которой их можно разбить на $\mathbf{25}$ групп по четыре ферзя, каждая из которых располагалась бы в квадрате $\mathbf{4 \times 4}$?

7. По кругу написаны $\mathbf{2014}$ целых чисел. Разрешается выбрать два противоположных числа и умножить каждое на $\mathbf{2}$, а также выбрать $\mathbf{1007}$ подряд стоящих чисел и увеличить каждое на $\mathbf{1}$. Всегда ли можно с помощью таких действий добиться, чтобы числа стали равными?

8. Один из углов треугольника равен $\mathbf{60^\circ}$. Докажите, что центр описанной окружности этого треугольника равноудалён от биссектрис двух других его углов.

XX Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Берендеевы поляны, 26 июня – 2 июля 2014 года

8 класс, первая лига, третий тур

1 июля 2014 года

1. Петя отметил на окружности **20** красных и **20** синих точек. Затем Вася проводит хорды так, чтобы концы каждой хорды были одного цвета и чтобы эти хорды не пересекались (даже в вершинах). Какое наибольшее количество хорд Вася гарантированно сможет провести, как бы ни расставил вершины Петя?

2. Выпуклый четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Среди их углов ровно три различных. Каким может быть наибольший из этих углов?

3. На доске написали число **10000**. После этого с числом, написанным на доске, производят следующую операцию: если в записи этого числа есть хотя бы одна нечётная цифра, то из него вычитают **1**, иначе из него вычитают **2**. За какое количество операций на доске получится число **0**?

4. Даны три уравнения: $\boldsymbol{x^2 + 2x + a = 0}$, $\boldsymbol{x^2 + 3x + b = 0}$, $\boldsymbol{x^2 + 4x + c = 0}$. Известно, что у любых двух из них есть общий корень. Докажите, что среди корней этих уравнений есть три числа, одно из которых является средним арифметическим двух других.

5. Шахматную доску разбили на двухклеточные доминошки, после чего конь обошел все клетки доски, побывав в каждой ровно по разу. Назовем **весом** доминошки количество ходов, которое сделал конь между ее клетками. Могут ли веса всех доминошек оказаться равными?

6. Алиса и Базилио делят добытую кучу из **100** кошельков, в которых лежат соответственно **1**, **2**, **3**, …, **100** золотых. Ходят по очереди, начинает Алиса. За один ход можно вынуть из кучи любой кошелёк и либо взять его себе, либо отдать напарнику. Как только у кого-то наберётся **50** кошельков, другой забирает из кучи все остальные. Какую наибольшую долю золотых может обеспечить себе Алиса, как бы ни действовал Базилио?

7. По кругу написаны **4** целых числа. Разрешается выбрать два противоположных числа и умножить каждое на **2**, а также выбрать два рядом стоящих числа и увеличить каждое на **1**. Всегда ли можно с помощью таких действий добиться, чтобы числа стали равными?

8. Один из углов треугольника равен $\boldsymbol{60^\circ}$. Докажите, что центр описанной окружности этого треугольника равноудалён от биссектрис двух других его углов.