XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

6 класс I ТУР

6.1. СУММА ЦИФР И ПРОСТОЙ ДЕЛИТЕЛЬ Существует ли трехзначное число, у которого сумма цифр равна наибольшему простому делителю этого числа?

6.2. РАЗРЕЗАНИЕ КВАДРАТА Квадрат разрезали пополам и сложили из получившихся прямоугольников букву Т (без наложений). Найдите сторону квадрата, если периметр получившейся фигуры равен 120 см.

6.3. «РЕКОРД» Осенью «Зенит» установил рекорд футбольной Лиги Чемпионов: в турнире из четырех команд в два круга занял «чистое» второе место всего с 6 набранными очками. Можно ли побить этот рекорд, то есть занять в таком же турнире «чистое» второе место с меньшим количеством очков? (*Победа — 3 очка, ничья — 1, поражение — 0. Команда, занявшая «чистое» второе место, набрала меньше очков, чем победитель, но больше, чем занявшая третье место.*)

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

6 класс II ТУР

6.4. ТЕЛОХРАНИТЕЛИ 7 бизнесменов и 4 телохранителя подошли к переправе. Есть трехместная лодка. Бизнесмен не может быть на берегу, если там нет телохранителей (в лодке — может), но чувствует себя комфортно только в том случае, когда там же где он находится (на берегу или в лодке) — бизнесменов больше чем телохранителей. Как им всем комфортно переправиться на противоположный берег?

6.5. ПРЯМОУГОЛЬНИК Если и длину и ширину прямоугольника увеличить на 3 метра, то его площадь увеличится на 60 м^2. А если вместо этого увеличить и длину и ширину на 2 метра, то как изменится его площадь?

6.6. ПОД БОЕМ На клетчатой доске 16×16 центральный квадрат 8×8 заполнили пешками. Можно ли на свободные клетки расставить 32 коня так, чтобы каждая из оставшихся свободных клеток этой доски была под «боем» коня?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

6 класс III ТУР

6.7. ОСТРОВ КАННИБАЛОВ На Острове Каннибалов живут два племени: «канни» и «балы». В каждом племени есть и правши и левши. У «балов» правши всегда говорят правду, левши всегда лгут. У «канни» правши лгут своим соплеменникам и говорят правду «балам», а левши — наоборот, говорят правду своим соплеменникам и лгут «балам». Когда на остров попадает путешественник, ему любезно сообщают все это и предлагают записать на бумажке вопрос. Затем каждый островитянин задает этот вопрос остальным. Если путешественник после всех ответов сможет определить для каждого островитянина его племя и «любимую» руку, то его отпускают с миром, если хоть раз ошибется — съедают на ужин. Какой вопрос можно записать, чтобы не попасть на ужин к каннибалам?

6.8. НО НЕ НА ДОМИНО Клетчатую фигуру можно по границам клеток разрезать на одинаковые трехклеточные фигуры, а можно — на одинаковые четырёхклеточные. Обязательно ли её можно разрезать на двухклеточные фигуры (доминошки)?

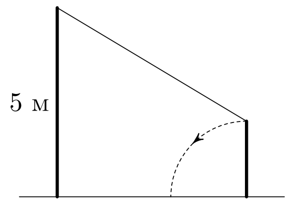
6.9. МОНЕТЫ ПО КРУГУ На столе по кругу лежат монеты в 50 копеек, 2 рубля и 10 рублей. У полтинников сосед по часовой стрелке лежит вверх орлом, а против часовой стрелки — вверх решкой, у двухрублевых монет — наоборот, а у 10-рублёвок оба соседа лежат одинаково: оба орлом или оба решкой. Может ли на столе лежать в сумме ровно 2014 рублей?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

7 класс I ТУР

7.1. КИРПИЧ У кирпича сумма длин всех 12 ребер равна 100 см. Длину каждого ребра увеличили на 1 см. На сколько увеличилась площадь поверхности кирпича?

7.2. ДВА СТОЛБА У прямой дороги на расстоянии 5 метров стоят два столба. Высота более высокого столба — тоже 5 метров. Между верхушками столбов натянут провод. Подул ветер, и маленький столб упал на дорогу в направлении высокого столба (см. рисунок). Что стало с проводом: он провисает, он снова натянут или он порвался?



7.3. «РЕКОРД» Осенью «Зенит» установил рекорд футбольной Лиги Чемпионов: в турнире из четырех команд в два круга занял «чистое» второе место всего с 6 набранными очками. Можно ли побить этот рекорд, то есть занять в таком же турнире «чистое» второе место с меньшим количеством очков? (*Победа* — 3 *очка*, *ничья* — 1, *поражение* — 0. *Команда, занявшая «чистое» второе место, набрала меньше очков, чем победитель, но больше, чем занявшая третье место*.)

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

7 класс II ТУР

7.4. ДАЛЬНИЙ ВОСТОК 50 бизнесменов — японцы, корейцы и китайцы — сидят за круглым столом. Известно, что между любыми двумя ближайшими японцами сидит ровно столько китайцев, сколько всего за столом корейцев. Сколько китайцев может быть за столом?

7.5. МЮНХГАУЗЕН У Мюнхгаузена есть четырёхугольник, в котором длина большей диагонали равна 10 см. Он разрезал его на 4 треугольника. Могло ли случиться так, что у каждого треугольника самая длинная сторона также равна 10 см?

7.6. ПОД БОЕМ На клетчатой доске 16×16 центральный квадрат 8×8 заполнили пешками. Можно ли на свободные клетки расставить 32 коня так, чтобы каждая из оставшихся свободных клеток этой доски была под «боем»?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

7 класс III ТУР

7.7. ОСТРОВ КАННИБАЛОВ На Острове Каннибалов живут два племени: «канни» и «балы». В каждом племени есть и правши и левши. У «балов» правши всегда говорят правду, левши всегда лгут. У «канни» правши лгут своим соплеменникам и говорят правду «балам», а левши — наоборот, говорят правду своим соплеменникам и лгут «балам». Когда на остров попадает путешественник, ему любезно сообщают все это и предлагают записать на бумажке вопрос. Затем каждый островитянин задает этот вопрос остальным. Если путешественник после всех ответов сможет определить для каждого островитянина его племя и «любимую» руку, то его отпускают с миром, если хоть раз ошибется — съедают на ужин. Какой вопрос можно записать, чтобы не попасть на ужин к каннибалам?

7.8. РАВНЫЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Медиана CM пересекает вписанную окружность в точках P и Q. Докажите, что $PM = CQ$.

7.9. МОНЕТНЫЙ ДВОР Король приказал чеканить монеты. Порядок выпуска монет был определен так. Сначала чеканятся монеты в наименьшую возможную сумму — 1 крона. Затем на каждом следующем шаге казначей определяет наименьшую целочисленную сумму, которую нельзя набрать k или меньшим числом уже отчеканенных монет, и выпускаются монеты достоинством в эту сумму. При каких k в королевстве будет выпущена монета достоинством в 2014 крон?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

8 класс I ТУР

8.1. СУММА Можно ли число 2014 представить в виде суммы 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр?

8.2. РАВНЫЕ К двум равным окружностям с центрами O_1 и O_2 проведены две общие внешние касательные и одна общая внутренняя, которая пересекла внешние в точках A и B. Докажите, что $AB = O_1O_2$.

8.3. ДВА ТУРНИРА При розыгрыше кубка по теннису игроки разбиваются на пары и проводят поединки, после чего проигравшие выбывают, победители снова разбиваются на пары и т. д. (ничьи в теннисе невозможны). Если в очередном туре нечётное количество участников, то один из них «отдыхает» и проходит в следующий тур. В одном таком турнире «отдыхающий» был в каждом туре, кроме последнего. В следующем турнире участвовали те же игроки, кроме одного. В скольких турах были «отдыхающие» в этот раз?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

8 класс II ТУР

8.4. ЗАГАДОЧНЫЕ ТРОЙКИ Найдите все такие тройки $(x; y; z)$ положительных чисел, что $x - \frac{1}{y^2} = y - \frac{1}{z^2} = z - \frac{1}{x^2}$.

8.5. ПОДОБНЫЕ НЕ РАВНЫ Два равных четырехугольника разрезали каждый на два треугольника. Среди треугольников нет равных. Могут ли все треугольники быть подобными?

8.6. ПОД БОЙ ЧЁТНОГО Петя и Вася по очереди ставят ладьи на крайние клетки доски размером 9×9 так, чтобы каждая выставленная ладья оказалась под «боем» чётного количества ладей. Начинает Петя. Кто не может сделать ход — тот проиграл. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

8 класс III ТУР

8.7. НИКТО НЕ МОЖЕТ В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

8.8. НА ПРЯМОЙ Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Прямая AA_1 пересекает вписанную окружность в точке A_0. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AA_0B_1 лежит на прямой A_1B_1.

8.9. УГОЛКИ Андрей закрасил некоторые клетки квадрата 100×100. Далее ему разрешается закрашивать клетки по следующему правилу: если в квадрате 2×2 закрашены 3 клетки, то он закрашивает четвёртую. Какое наименьшее количество клеток Андрей должен закрасить изначально, чтобы в дальнейшем он сумел закрасить весь квадрат?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

9 класс I ТУР

9.1. НЕРАВЕНСТВО Пусть a, b и c — натуральные числа. Обязательно ли из неравенства $a > \left[\frac{b}{c}\right]$ следует неравенство $ac > b$? ($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x).

9.2. ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ Через внутреннюю точку D стороны AB треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам AC и BC, которые пересекают их в точках F и E. Оказалось, что $ABFE$ — вписанный четырехугольник. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается стороны AB.

9.3. ДВА ТУРНИРА При розыгрыше кубка по теннису игроки разбиваются на пары и проводят поединки, после чего проигравшие выбывают, победители снова разбиваются на пары и т. д. (ничьи в теннисе невозможны). Если в очередном туре нечётное количество участников, то один из них «отдыхает» и проходит в следующий тур. В одном таком турнире «отдыхающий» был в каждом туре, кроме последнего. В следующем турнире участвовали те же игроки, кроме одного. В скольких турах были «отдыхающие» в этот раз?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

9 класс II ТУР

9.4. МАКСИМАЛЬНАЯ ПРОГРЕССИЯ Дана возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Известно, что у каждого числа ровно два различных простых делителя, причем для всех членов прогрессии эта пара одна и та же. Каково наибольшее возможное количество членов в такой прогрессии?

9.5. ПОДОБНЫЕ НЕРАВНЫ Два равных четырехугольника разрезали каждый на два треугольника. Среди треугольников нет равных. Могут ли все треугольники быть подобными?

9.6. ПОД БОЙ ЧЁТНОГО Петя и Вася по очереди ставят ладьи на крайние клетки доски размером 9×9 так, чтобы каждая выставленная ладья оказалась под «боем» чётного количества ладей. Начинает Петя. Кто не может сделать ход — тот проиграл. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

XX турнир математических боев памяти А. П. Савина
26 июня — 2 июля 2014 года

9 класс III ТУР

9.7. НИКТО НЕ МОЖЕТ В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

9.8. КАСАНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ Из вершины A треугольника ABC провели высоту AE и диаметр описанной около треугольника окружности, который пересек сторону BC в точке D. Докажите, что описанная окружность треугольника ADE касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

9.9. УГОЛКИ Андрей закрасил некоторые клетки квадрата 100×100. Далее ему разрешается закрашивать клетки по следующему правилу: если в квадрате 2×2 закрашены 3 клетки, то он закрашивает четвёртую. Какое наименьшее количество клеток Андрей должен закрасить изначально, чтобы в дальнейшем он сумел закрасить весь квадрат?