V турнир математических боёв
ФПМИ МФТИ
Долгопрудный. 24-25 апреля 2021г.

Первый бой

1. Последовательность a_n такова, что $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, а каждый последующий член равен среднему арифметическому нескольких последних предыдущих. Обязательно ли эта последовательность имеет предел?

2. На столе лежат $2n$ яблок, веса каждого известны. Двое игроков ходят по очереди. За ход игрок кладет одно яблоко в сумку себе или сопернику. Как только у кого-то в сумке наберётся n яблок, соперник забирает себе в сумку остальные. Выиграет тот, у кого больше вес яблок. Докажите, что при правильной игре первый не проигрывает.

3. Пусть p — простое число, $\mathbb{F}_p$ — поле вычетов по модулю p, $X \subset \mathbb{F}_p^n$ — линейное подпространство размерности $m \leqslant n$, r — целое число. Обозначим через $f(X)$ количество элементов в X, имеющих не более, чем r ненулевых координат. Докажите, что $f(X) \leqslant f(\mathbb{F}_p^m)$.

4. Дано натуральное число $k > 1$. Бесконечно ли много таких натуральных чисел n, что $1^n + 2^n + \ldots + k^n$ делится на n?

5. На плоскости дано счётное множество точек A. Докажите, что его можно разбить на два множества $A = B \sqcup C$ так, чтобы любая вертикальная прямая пересекала множество B лишь по конечному числу точек, и любая горизонтальная прямая пересекала множество C лишь по конечному числу точек.

6. n бегунов собираются пробежать трассу размера n. Скорость k-го бегуна равна k. На трассе берутся случайно равномерно независимо в совокупности n точек, i-й бегун начинает бежать с i-й справа точки и бежит вправо до конца. Найти математическое ожидание времени, за которое победитель добежит до финиша.