V турнир математических боёв
ФПМИ МФТИ
Долгопрудный. 24-25 апреля 2021г.

Третий бой

1. У Васи есть граф G на n вершинах и шайтан-машина. Шайтан-машина умеет в мгновение ока определять, есть ли в произвольном графе замкнутый обход, посещающий каждую вершину не менее одного, но не более 2021 раза. Докажите, что Вася способен за $O(p(n))$ операций, где $p(n)$ — многочлен, определять, есть ли в графе G гамильтонов цикл. Иными словами, докажите **NP**-трудность задачи о наличие в графе обхода, посещающего каждую вершину не менее одного, но не более 2021 раза.

2. Пусть A — комплексная матрица $n \times n$, и $a_1, \ldots, a_n$ — её собственные числа (с учётом алгебраической кратности). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} p_i x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ является симметрическим многочленом. Наконец, пусть A_i^k — это i-ый столбец матрицы A^k. Докажите тождество:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} p_i \det(A_1^{i_1}, \ldots, A_n^{i_n}).$$

3. Даны $a, b \in \mathbb{R}$ и дифференцируемая функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, причём $f(a) = a$ и $f(b) = b$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b (f'(x))^2\, dx \geq b - a.$$

4. На плоскости дано множество M из n точек: $n-1$ точка образует выпуклый многоугольник P и ещё одна точка X находится внутри него. Докажите, что количество способов триангулировать многоугольник P так, чтобы множество вершин триангуляции являлось подмножеством M (то есть точка X может как участвовать в триангуляции, так и не участвовать), не меньше количества способов триангулировать выпуклый n-угольник.

5. Есть монетка, выпадающая орлом с вероятностью $p \in (0, 1)$. Петя подбрасывает её n раз и считает число k выпавших орлов. Если оно чётно, он полагает $X = k$, если нечётно, то забывает про этот эксперимент и снова подбрасывает монетку n раз — и так пока не определится значение $X \in \{0, 2, \ldots\}$. Вася аналогичным образом определяет значение случайной величины $Y \in \{1, 3, \ldots\}$: он ждёт, пока та же монетка в серии из n подбрасываний выпадет нечётное число раз. Докажите, что существует вероятностное распределение на парах целых чисел $\{(u, v) : |u - v| = 1\}$ такое, что u распределено как X, а v как Y.

6. Пусть $n+1$ является степенью двойки. Докажите, что таблицу $n \times n$ можно заполнить числами от 1 до n так, что в любом прямоугольнике побитовое исключающее или (XOR) всех чисел не равно нулю.

Примечание: побитовым исключающим или двух чисел x и y называется число $x \oplus y$, у которого в k-м разряде в двоичной записи стоит единица тогда и только тогда, когда цифры в k-х разрядах у чисел x и y различаются, например: $3 \oplus 5 = 11_2 \oplus 101_2 = 110_2 = 6$, $4 \oplus 4 = 0$.