

# Леонид Медников, Александр Шаповалов

## 28-й Международный математический Турнир городов 2006/07 учебный год, осенний тур Решения задач

### Тренировочный вариант, младшие

1. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа  $x$  и  $y$  ( $x \leq y$ ). Петя записывает на бумажке  $x^2$  (квадрат меньшего числа), а затем заменяет числа на доске числами  $x$  и  $y-x$ , записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на петиной бумажке? [4 балла] (*Е. Горский*)

**Ответ.** Сумма равна  $xу$ .

**Решение.** На каждом шаге Петя уменьшает произведение чисел на доске на число, которое он пишет на бумажке:  $x(y-x) = xy - x^2$ . Поскольку в конце произведение на доске будет равно 0, то сумма на бумажке равна исходному произведению  $xу$ .

2. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ "да" или "нет" (например: "верно ли, что этот человек – хитрец?").

**а)** Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать? [1 балл]

**б)** Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он. [3 балла] (*Б. Гинзбург, М. Гервер*)

**Решение. а)** Спросим каждого «Верно ли, что оба твоих соседа – вруны?». Среди трех ответов есть «Да» вруна и «Нет» правдивого, поэтому один из ответов будет дан ровно один раз. По нему мы узнаем ответившего: это либо врун, либо правдивый. Задав ему вопрос про одного из двух других «Верно ли, что он хитрец», мы все узнаем.

**Замечания. 1.** В начале можно задавать любой вопрос, ответ на который вам известен (например, «Верно ли, что сегодня четверг»).

2. Можно обойтись и 3 вопросами, если они будут достаточно изощренными, что-то вроде: «Ответишь ли он “да”, если я спрошу...».

**б)** Обозначим участников: врун В, правдивый П, и хитрецы ХВ и ХП. Пусть хитрецы договорятся отвечать так, как будто ХВ врун, ХП – правдивый, В – хитрец, притворяющийся вруном, а П – хитрец, притворяющийся правдивым. Поставив их лицом друг против друга, так что ХП как бы служит отражением П, а ХВ служит отражением В, видим, что невозможно отличить, кто стоит «перед зеркалом», а кто «за зеркалом» – ответы полностью «зеркальны».

3. **а)** Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1. Докажите, что удастся зачеркнуть одно число, так чтобы произведение оставшихся можно было представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел. [2 балла]

**б)** Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1, одно из которых равно 2006. Оказалось, что есть только одно такое число среди написанных, что произведение оставшихся представляется в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Докажите, что это число – 2006. [2 балла] (*Г. Гальперин*)

**Решение.**

Натуральные числа, представимые в виде разности квадратов натуральных чисел, назовем *хорошими*, а не представимые – *плохими*.

**Лемма.** Число  $n$  хорошее  $\Leftrightarrow n$  – нечетное число, большее 1, или  $n$  кратно 4 и больше 4.

**Доказательство леммы.** Пусть  $n$  – хорошее, то есть  $n=(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$ , где  $a$  и  $b$  – различные натуральные числа. Сомножители в правой части – одинаковой четности (их сумма четна). Они различны (иначе  $b=0$ ). Если они нечетны, то и  $n$  – нечетно и больше 1·1. Если они четны, то  $n$  кратно 4 и больше 2·2.

Наоборот, для каждого из этих случаев мы можем разложить  $n$  в произведение двух подходящих множителей и найти  $a$  и  $b$ , решив систему уравнений:

$$n=2k+1 \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2k+1 \end{cases} \Rightarrow a=k+1, b=k$$

$$n=4m (m>1) \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=2m \end{cases} \Rightarrow a=m+1, b=m-1. \text{ Лемма доказана.}$$

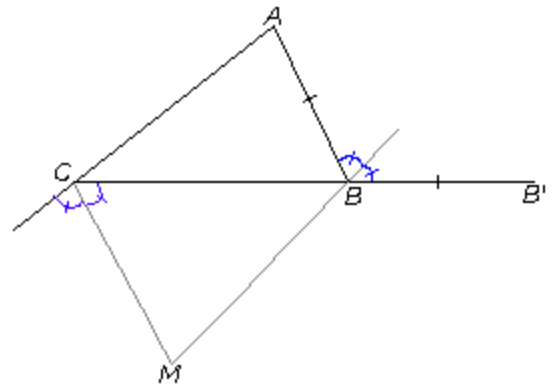
**а)** Всегда можно вычеркнуть одно число так, чтобы четных чисел не осталось совсем (произведение будет нечетным) или осталось как минимум два четных числа (произведение будет кратно 4, но больше 4). Действительно, если среди чисел ровно одно четное, зачеркнем его. Если есть ровно два четных – зачеркнем любое кроме этих двух. В остальных случаях можно зачеркнуть любое.

**б)** Число 2006 – четное. Если есть еще четное число  $n$ , то, как показано в а), любое число кроме  $n$  и 2006 можно зачеркнуть. Это противоречит условию. Значит, других четных нет. Тогда число 2006 вычеркнуть можно (произведение оставшихся нечетно и больше 1), а никакое другое число вычеркнуть нельзя (поскольку 2006 четно, но не кратно 4 то таким же окажется и произведение оставшихся).

**4.** На продолжении стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  за вершину  $B$  отложен отрезок  $BB'$ , равный стороне  $AB$ . Биссектрисы внешних углов при вершинах  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что точки  $A, B', M$  и  $C$  лежат на одной окружности. [4 балла]

(Р. Гордин)

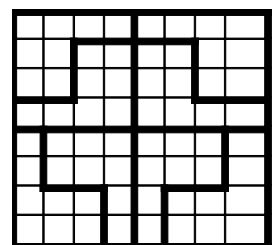
**Решение.** Точка  $M$  равноудалена от прямых  $AC$  и  $BC$  (как лежащая на биссектрисе угла  $C$ ), и от прямых  $AB$  и  $BC$  (как лежащая на биссектрисе угла  $B$ ). Поэтому  $M$  равноудалена от сторон угла  $BAC$ , и, значит,  $AM$  – биссектриса этого угла, то есть  $\angle BAM = \angle CAM$ . Так как  $ABB'$  – равнобедренный треугольник, то  $MB$  – серединный перпендикуляр к  $AB'$ , поэтому  $\angle BAM = \angle BB'M$ . Тем самым,  $\angle CB'M = \angle BB'M = \angle BAM = \angle CAM$ . Отрезок  $CM$  виден из точек  $A$  и  $B'$  под равными углами, значит, точки  $A, B', M$  и  $C$  лежат на одной окружности.



**5.** На какое наибольшее число равных невыпуклых многоугольников можно разрезать квадрат так, чтобы все стороны многоугольников были параллельны сторонам квадрата и никакие два из этих многоугольников не получались друг из друга параллельным переносом? (Параллельный перенос – это сдвиг без поворота). [4 балла] (А. Шаповалов)

**Ответ.** На 8 многоугольников.

**Решение.** Пример разрезания на 8 многоугольников – см. рис. Покажем, что больше быть не может. Данный многоугольник можно не более, чем 8 способами разместить на плоскости (с точностью до параллельного переноса) с



соблюдением условия. Действительно, рассмотрим три его последовательные вершины  $A, B$  и  $C$  (их положением многоугольник определяется однозначно). Можно считать, что точка  $B$  фиксирована. Сторону  $BA$  можно выпустить из нее 4 способами (в 4 направлениях, параллельным сторонам квадрата), после чего сторону  $BC$  – двумя способами.

### Основной вариант, младшие

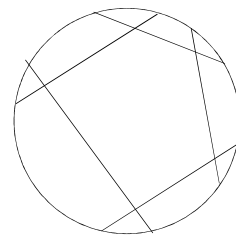
1. Вокруг правильного 7-угольника описали окружность и вписали в него окружность. То же проделали с правильным 17-угольником. В результате каждый из много-угольников оказался расположенным в своем круговом кольце. Оказалось, что площади этих колец одинаковы. Докажите, что стороны многоугольников одинаковы. (*Г. Гальперин*)

**Решение.** Пусть  $2a$  – длина стороны правильного многоугольника,  $r$  и  $R$  – радиусы вписанной и описанной окружности соответственно. Вписанная окружность касается стороны в ее середине, поэтому проведенный туда радиус перпендикулярен стороне. По теореме Пифагора  $a^2 + r^2 = R^2$ . Поэтому площадь кольца между этими окружностями равна  $\pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$ , откуда и следует утверждение задачи.

2. Попав в новую компанию, Чичиков узнавал, кто с кем знаком. А чтобы запомнить это, он рисовал окружность и изображал каждого члена компании хордой, причем хорды знакомых между собой пересекались, а незнакомых – нет. Чичиков уверен, что такой набор хорд есть для любой компании. Прав ли он? (Совпадение концов хорд считается пересечением). (*А. Шаповалов, С. Ландо*)

**Решение.** Чичиков не прав, вот контрпример. Пусть есть хозяин, три его сына и три гостя. Гости попарно незнакомы, хозяин с ними всеми знаком, а три сына знакомы с тремя разными парами гостей. Хорды гостей пересекают хорду хозяина в трех различных точках. Одна точка – средняя, две – крайние, соответственно назовем средними и крайними и хорды гостей, и самих гостей. Ясно, что крайние хорды лежат по разные стороны от средней. Хорда сына, знакомого лишь с крайними гостями должна пересечь крайние хорды, но не пересечь среднюю. Противоречие.

**Замечание.** Есть контрпример и на 6 человек, но его несколько сложнее обосновать. Пусть граф знакомств – пятиугольная пирамида. Хорды, соответствующие вершинам основания пирамиды, должны образовать 5-угольник с “хвостиками” (см. рис.), а хорда, соответствующая вершине, не может пересечь все пять его “сторон”.



**Идея неконструктивного решения для знатоков.** “Легко” видеть, что все “схемы Чичикова” на  $n$  человек можно реализовать на сторонах и диагоналях правильного  $2n$ -угольника. Число таких схем Чичикова (с указанием номеров) равно  $(2n)! \cdot 2^{-n}$ . При этом разным сздамам может соответствовать один и тот же граф знакомств. Но число всевозможных графов знакомств (с нумерацией вершин) равно  $2^{n(n-1)/2}$ . При  $n = 14$  второе число больше:

$$20! = 2 \cdot (3 \cdot 5) \cdot 4 \cdot (6 \cdot 10) \cdot (7 \cdot 9) \cdot 8 \cdot (11 \cdot 21) \cdot (12 \cdot 20) \cdot (13 \cdot 19) \cdot (14 \cdot 18) \cdot (15 \cdot 17) \cdot 16 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 28 < \\ < 2 \cdot 4^3 \cdot 8^5 \cdot 16^{11} \cdot 32^9 = 2 \cdot 2^6 \cdot 2^{15} \cdot 2^{44} \cdot 2^{35} = 2^{101} = 2^{91} \cdot 2^{14}.$$

Следовательно, существует граф знакомств, который не может быть реализован схемой Чичикова.

3. В квадрате  $3 \times 3$  расставлены числа (см. рис.). Известно, что квадрат магический: сумма чисел в каждом столбце, в каждой строке и на каждой диагонали одна и та же. Докажите, что

а) [3]  $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$ .

$a$	$b$	$c$
$d$	$e$	$f$
$g$	$h$	$i$

$$\text{б) [3]} \quad 2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3.$$

(А. Грибалко)

**Первое решение.** а) Прибавим к обеим частям  $b + d + f + h$  получим очевидное равенство  $(a + b + c) + (a + d + g) + (c + f + i) + (g + h + i) = 2(b + e + h) + 2(d + e + f)$ .

б) 1) Пусть  $S$  – сумма чисел в каждой строке. Тогда  $a + i = c + g = b + h = d + f = S - e$ . Подставив в равенство из п. а), получим  $4(S - e) = 2(S - e) + 4e$ , откуда  $2S = 6e$ , то есть  $S = 3e$ .

$$2) \text{ Докажем сначала равенство } 2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2.$$

Для этого запишем его в виде

$$\begin{aligned} (a + c)^2 + (c + i)^2 + (a + g)^2 + (g + i)^2 - 2(ac + ci + ag + gi) = \\ = (h + e)^2 + (d + e)^2 + (f + e)^2 + (b + e)^2 - 2e(b + d + f + h). \end{aligned}$$

Суммы квадратов в левой и правой частях равны, поскольку  $a + c = S - b = h + e$ , и т.д. Кроме того,  $ac + ci + ag + gi = (a + i)(c + g) = (S - e)^2 = 2e(S - e) = e(b + d + f + h)$ .

3) Заметим, что равенство п. б) остается верным при увеличении всех чисел таблицы на одно и то же число. Действительно,

$$\begin{aligned} & 2((a + t)^3 + (c + t)^3 + (g + t)^3 + (i + t)^3) = \\ & = 2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) + 6t(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) + 6t^2(a + c + g + i) + 8t^3 = \\ & = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 + 3t(b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2) + 3t^2(b + d + f + h + 4e) + 8t^3 = \\ & = (b + t)^2 + (d + t)^2 + (f + t)^2 + (h + t)^2 + 4(e + t)^2. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать равенство для случая, когда  $e = 0$ . Но в этом случае равенство очевидно, поскольку  $a + i = c + g = a + c = g + i = b + h = d + f = 2e = 0$ , и обе части равенства равны нулю.

**Второе решение.** Сложив 4 суммы: по средней строке, среднему столбцу и диагоналям, мы получим сумму всех чисел таблицы плюс утроенное число в центральной клетке:  $4S = 3S + 3e$ , то есть  $S = 3e$ .

Поскольку  $b + h = S - e = 2e$ , обозначим  $b = e - 2u$ ,  $h = e + 2u$ .

Поскольку  $a + c = S - b = 2e + 2u$ , обозначим  $a = e + u + v$ ,  $c = e + u - v$ .

Последовательно находим

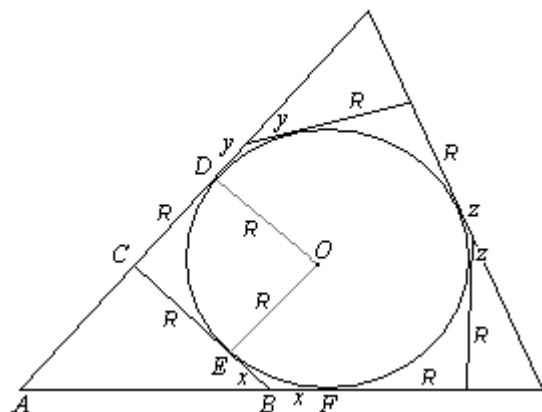
$$i = S - (a + e) = e - u - v, \quad g = S - (c + e) = e - u + v, \quad d = S - (a + g) = e - 2v, \quad f = e + 2v.$$

Теперь равенство из п. а) очевидно. Для проверки равенства п. б) мы будем многократно использовать очевидное соотношение  $(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} 2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) &= 2((e + u + v)^3 + (e + u - v)^3 + (e - u + v)^3 + (e - u - v)^3) = \\ &= 4((e + u)^3 + (e - u)^3) + 12((e + u) + (e - u))v^2 = 8e^3 + 24e(u^2 + v^2), \\ b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 &= (e + 2u)^3 + (e - 2u)^3 + (e + 2v)^3 + (e - 2v)^3 + 4e^3 = \\ &= 2e^3 + 6e(2u)^2 + 2e^3 + 6e(2v)^2 + 4e^3 = 8e^3 + 24e(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

4. В остроугольный треугольник вписана окружность радиуса  $R$ . К окружности проведены три касательные, разбивающие треугольник на три прямоугольных треугольника и шестиугольник. Периметр шестиугольника равен  $Q$ . Найдите сумму диаметров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники. (Р. Гордин)

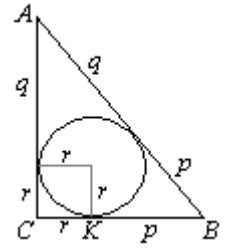
**Решение.** Точки касания вписанной окружности со сторонами шестиугольника и его вершины разбивают его периметр на 12 отрезков (см. например рис.). Отрезки, выходящие из вершин прямых углов шестиугольника (на каких бы сторонах треугольника эти вершины не лежали) равны  $R$  (например, проведя радиусы  $OD$  и  $OE$  в точки касания, получим квадрат  $CDOE$ , значит,  $CD = CE = R$ ). Отрезки касательных, проведенных из трех остальных вершин шестиугольника обозначим



$x, y, z$  (см. рис.). Тогда периметр шестиугольника  $Q = 6R + 2x + 2y + 2z$ .

Как известно, диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме катетов минус гипотенуза (см, например, рис. справа). Для треугольника  $ABC$  получаем

$AC + BC - AB = (AD - R) + (R + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x$ , поскольку касательные  $AD$  и  $AF$  равны. Аналогично, два других диаметра равны  $2y$  и  $2z$ , откуда их сумма  $2x + 2y + 2z = Q - 6R$ .



**Идея 2-го решения (для знатоков).** Пусть вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $K$ . Как известно,  $CK = BE = x$  ( $E$  – точка касания невписанной окружности). С другой стороны,  $CK$  равен радиусу вписанной окружности. Поэтому диаметр ее равен  $2x$ .

5. Оберткой плоской картины размером  $1 \times 1$  назовем прямоугольный лист бумаги площади 2, которым можно, не разрезая его, полностью обернуть картину с обеих сторон. Ясно, что прямоугольник  $2 \times 1$  и квадрат со стороной  $\sqrt{2}$  – обертки.

- а) Докажите, что есть и другие обертки.
- б) Докажите, что оберток бесконечно много.

(А. Шаповалов)

**Решение.** Покажем, что прямоугольник  $\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$  – обертка. Наложим его на квадрат так, чтобы две вершины квадрата оказались на длинных сторонах, а третья – в середине короткой (см. рис.1). Процесс обертывания изображен на рис. 2 и 3.

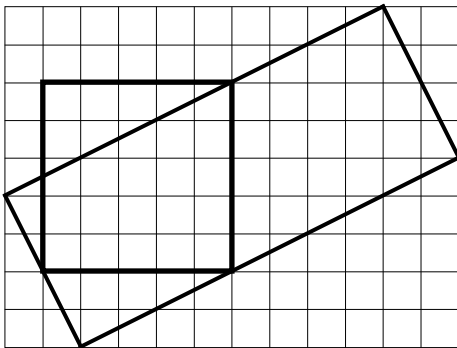


Рис. 1

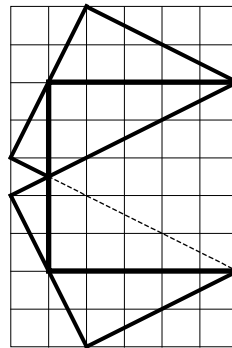


Рис. 2

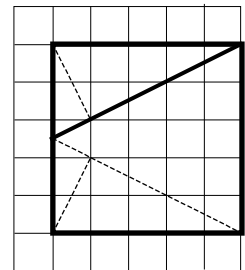


Рис. 3

б) Разделим вертикальные стороны квадрата на  $n$  частей. На рис 4 показана (для  $n=3$ ) обертка квадрата параллелограммом, меньшая сторона которого равна  $\frac{2}{n}$ . На рис. 5 показано как превратить параллелограмм в прямоугольник (при этом выступающие за горизонтальные стороны квадрата прямоугольные треугольники распадаются на 2 части). На рисунке 6 показано (для  $n=2$ ) как их надо загибать.

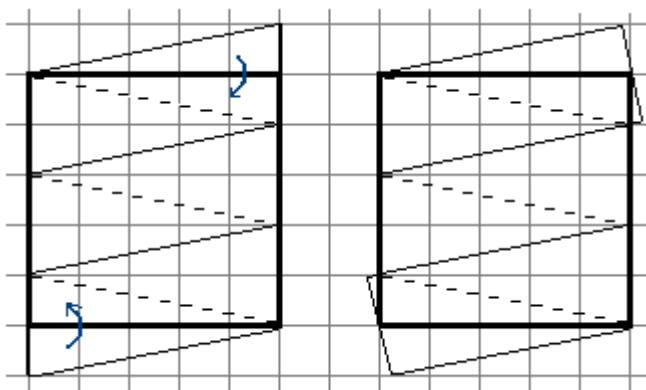


Рис. 4

Рис. 5

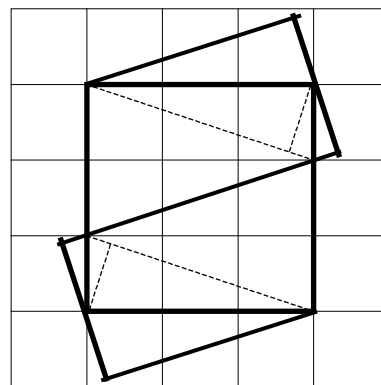


Рис. 6

**Замечание.** При  $n = 1$  получается обертка квадратом  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ , при  $n = 2$  – прямоугольником  $\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$  (рис 3), при  $n = 3$  – прямоугольником  $\sqrt{10} \times \frac{2}{\sqrt{10}}$  (рис. 6).

6. Пусть  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$ , где  $\frac{a_n}{b_n}$  – несократимая дробь. Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , при которых выполнено неравенство  $b_{n+1} < b_n$ . (С. Маркелов)

**Решение.** Пусть  $n = p(p-1) - 1$ , где  $p$  – нечетное простое число.

Заметим, что  $b_{n+1}$  не делится на  $p$ . Действительно, в соответствующей сумме только знаменатели дробей  $\frac{1}{p}, \frac{1}{2p}, \dots, \frac{1}{(p-1)p}$  делятся на  $p$ , но их можно сгруппировать попарно так, чтобы знаменатель суммы на  $p$  не делился:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)p} = \frac{1}{p-1}, \quad \frac{1}{2p} + \frac{1}{(p-2)p} = \frac{1}{2(p-2)}, \dots$$

$$\text{В то же время } \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}}{b_{n+1}(p-1)p}.$$

Пусть числитель и знаменатель последней дроби удалось сократить на  $d$ :

$$a_{n+1}(p-1)p \equiv b_{n+1} \pmod{d}, \quad b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}.$$

Тогда  $a_{n+1}(p-1)^2 p^2 \equiv b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}$ . Числа  $d$  и  $p$  взаимно просты (иначе  $b_{n+1}$  кратно  $p$ ). Числа  $d$  и  $a_{n+1}$  тоже взаимно просты (иначе  $b_{n+1}$  делится на их общий делитель, то есть  $a_{n+1}$  и  $b_{n+1}$  не взаимно просты). Поэтому  $(p-1)^2$  делится на  $d$ . Следовательно,  $d \leq (p-1)^2$ .

$$\text{Значит, } b_n \geq \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{p-1} > b_{n+1}, \quad \text{и утверждение задачи следует из}$$

бесконечности множества простых чисел.

7. У ведущего есть колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (при этом не уточняя – сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида “Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?”. Один из зрителей подсмотрел, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопро-сов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде? (А. Шаповалов)

**Ответ.** За 34 вопроса.

**Решение.** Первый вопрос зритель задает про две крайние карты. Ответ 50 покажет всем, что они в самом деле крайние. Назовем любую из них 1-й (сверху или снизу – нам не важно), тогда другая – 52-я. Теперь уже надо дать возможность все остальные номера карт определить однозначно. Назовем 2-ю карту дыркой, и вторым вопросом спросим про две карты рядом с дыркой (то есть 1-ю и 3-ю). Ответ 1 задает положение 3-й карты однозначно. Далее будем продолжать задавать вопросы парами: в нечетных вопросах называем две самые крайние карты из еще не упомянутых (одна из них была дыркой, другая – недыркой), назначаем новой дыркой ранее неупомянутую карту рядом с недыркой, и следующим четным вопросом спрашиваем про две карты рядом с дыркой. Так, в первой паре вопросов он называет 1-ю, 52-ю и 3-ю карты, во второй – 2-ю, 51-ю и 49-ю карты, в третьей паре – 4-ю, 50-ю и 6-ю карты и т.д. Как видим, дырки по очереди возникают то ближе к началу, то ближе к концу. В отличие от первой тройки для каждой следующей тройки карт после ответов на очередную пару вопросов теоретически есть два возможных расположения: основное (то, что на самом деле) и побочное (крайние карты меняются местами, средняя передвигается соответственно). Так, из ответов на 3-й и 4-й вопросы следует, что вторая тройка карт – это 2, 51 и 49 либо 2, 51 и 4. Эта неопределенность исчезнет, однако, после ответа на следующий (в примере – на 5-й) вопрос. Суть в том, что максимальное число карт между ранее не упомянутыми крайними картами в побочном варианте меньше, чем в основном (см. рис, где карты одной тройки обозначены одинаковой буквой, неопределенная – тройка C):

Основной    abaC\_C.....bCbа  
Побочный    abaC.....CbCbа

Так задаем 33 вопроса. Последний 34-й вопрос зададим про крайнюю и карту рядом с ней (25-ю и 26-ю) (см. рис, предпоследняя и последняя тройка обозначены буквами p и Q соответственно):

abacdcfehgijlklmnpоrQQ\_pQpnonlmlkjhihfgdedbcba

Тогда положение последней тройки и единственной оставшейся карты определится однозначно.

Покажем, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. Разобьем изначально все карты на 52 группы по одной карте. При вопросе про две карты из разных групп объединяем эти группы в одну. Каждый вопрос уменьшает число групп максимум на одну. Если задано не более 33 вопросов, то останется не менее  $52 - 33 = 19$  групп. Среди них групп из 3 карт – не более 17. Значит, либо найдутся две группы по одной карте, либо группа из ровно двух карт. В обоих случаях можно эту пару карт поменять местами, не трогая остальных: все ответы не изменятся. Тем самым, порядок не восстанавливается однозначно.

## Основной вариант, старше

1. См. 2 для младших.

2. На сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что лучи  $A_1A$ ,  $B_1B$  и  $C_1C$  являются биссектрисами углов треугольника  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – высоты треугольника  $ABC$ . (*Р. Гордин, П. Сергеев*)

**Решение.** Проведем биссектрисы внешних углов треугольника  $A_1B_1C_1$ . Пусть биссектрисы внешних углов  $B_1$  и  $C_1$  пересекаются в точке  $A_2$ , и т.д. Через точку проходит также биссектриса угла  $A_1$  (см. решение 1.4.), т.е. прямая  $A_1A$ . Значит, в треугольнике  $A_2B_2C_2$  прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  являются высотами. Докажем, что треугольники  $A_2B_2C_2$  и  $ABC$  совпадают.

Пусть это не так, например, точка  $A_2$  находится вне треугольника  $ABC$ . Тогда луч  $A_2B_2$  пере-секает сторону  $AB$  треугольника  $ABB_1$  (в точке  $C_1$ ) и не пересекает сторону  $AB_1$  (их разделяет пря-мая  $A_2A_1$ ). Следовательно, он пересекает сторону  $BB_1$ , то есть точка  $B_2$  находится внутри отрезка  $BB_1$ , а значит, внутри треугольника  $ABC$ . Аналогично  $C_2$  находится внутри треугольника  $ABC$ . Но отрезок  $B_2C_2$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ . Противоречие.

Аналогично к противоречию ведет предположение о том, что  $A_2$  находится внутри треугольника  $ABC$ .

3. В числе  $a = 0,12457\dots$   $n$ -я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе  $n\sqrt{2}$ . Докажите, что  $a$  – иррациональное число. (А. Шаповалов)

**Решение.** Пусть это не так:  $0,12457\dots$  – периодическая десятичная дробь с длиной периода  $m$  (и неким предпериодом). Тогда цифры, соответствующим членам нашей последовательности с номерами  $m, 10m, 100m, \dots, 10^k m, \dots$ , начиная с некоторого момента совпадают. В то же время – это последовательные цифры десятичного разложения иррационального числа  $m\sqrt{2}$  (то есть непериодической дроби). Противоречие.

4. Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а противоположная вершина – на другом основании призмы? (С. Слободник)

**Первое решение.** Нельзя. Рассмотрим центральное сечение призмы. Каждая разрешенная пирамида пересекает его по многоугольнику, площадь которого в 4 раза меньше площади ее основания. Сумма площадей оснований таких пирамид должна быть равна двум основаниям призмы. Но тогда сумма площадей пересечений с центральным сечением равна половине основания призмы. Значит, даже центральное сечение не заполняется целиком.

**Второе решение.** Сумма объемов пирамид, вершины которых находятся на верхнем осно-вании призмы, не превосходит одной трети объема призмы. То же верно для пирамид с вершиной на нижнем основании. таким образом, сумма объемов пирамид меньше объема призмы.

5. См. задачу 6 для младших.

6. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно

а) делится на  $12!$ ;

б) делится на  $13!$ .

(А. Шаповалов)

**Решение.** Очевидно, правильному расположению карт в колоде соответствует кольцевой обход ладьей (которая может прыгать через клетки!) доски  $4 \times 13$  (горизонтالي соответствуют мастям, а вертикали – достоинствам), начинающийся и кончающийся в клетке, соответствующей тузу пик (будем считать, что это левый нижний угол). Такой обход удобно закодировать, занумеровав клетки от 1 до 52, где 1 стоит в левом нижнем углу, а любая пара соседних номеров (включая 1 и 52) стоит в одной строке или в одном столбце.

а) Совершив любую из  $(12! - 1)$  нетривиальных перестановок 12 правых вертикалей, мы из данного обхода получим новый (другая нумерация!). Таким образом, все обходы разбиваются на группы по  $12!$  обходов.



б) Достаточно доказать, что это число делится на 13. Свернем доску в цилиндр, склеив вертикальные стороны. Любой из 12 возможных поворотов цилиндра переводит данный обход в другой, начинающийся уже не с “туза пик”. Но поскольку он проходит через эту клетку, то его можно рассматривать как “правильный обход” (соответствующую нумерацию можно получить, сдвинув все номера на одно и то же число по модулю 52 так, чтобы в левом нижнем углу оказалась 1). Ниже мы покажем, что этот обход отличается от первоначального. Таким образом, все обходы разбиваются на группы по 13 обходов.

Восстановим пропущенный момент. Пусть при повороте некоторый обход переходит в себя. Рассмотрим любой горизонтальный ход (он должен быть). Повторив поворот 13 раз, видим, что из каждой клетки этой горизонтали мы выходили по горизонтали, то есть сменить эту масть нельзя. Противоречие.

7. Положительные числа  $x_1, \dots, x_k$  удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + \dots + x_k}{2}, \quad x_1 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что  $k > 50$ .

б) Построить пример таких чисел для какого-нибудь  $k$ .

в) [Найти минимальное  $k$ , для которого пример возможен.

(А. Толыго)

**Решения а) и б)**

а) По условию  $4(x_1^2 + \dots + x_k^2) < 2(x_1 + \dots + x_k) < x_1^3 + \dots + x_k^3$ . Таким образом, хотя бы для одного числа (пусть для  $x_1$ ) выполнено неравенство  $4x_1^2 < x_1^3$ , то есть  $x_1 > 4$ .

Отсюда  $(2x_2^2 - x_2) + \dots + (2x_k^2 - x_k) < 4 - 2 \cdot 4^2 = -28$ .

Поскольку минимум функции  $2x^2 - x$  равен  $-\frac{1}{8}$ , то  $k - 1 > 8 \cdot 28 > 50$ .

б) Возьмем  $k = 2501$ ,  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = x_3 = \dots = x_{2501} = 0,1$ . Тогда  $x_1^2 + \dots + x_{2501}^2 = 100 + 25 = 125$ ,  $x_1 + \dots + x_{2501} = 10 + 250 = 260$ ,  $x_1^3 + \dots + x_k^3 > 1000$ , и все неравенства выполнены.

**Идея решения в)**

Примерно представляю как делать в).

1) Сначала доказываются, что “большое” число должно быть одно, а “маленькие” - все равны.

2) Из неравенств  $2x^2 - x + n(2y^2 - y) < 0 < x^3 - 2x + n(y^3 - 2y)$  получаются оценки:

$$\frac{2x^2 - x}{y - 2y^2} < n < \frac{x^3 - 2x}{2y - y^3}$$

Далее надо стремиться к минимизации левой части при условии, что она меньше правой. В “1-м приближении”, что она равна правой, то есть  $\frac{2x-1}{x^2-2} = \frac{1-2y}{2-y^2} \Leftrightarrow$

$$y = \frac{x-4}{2x-1}$$

...

Но на таком пути масса мелких трудностей, да и решение растягивается.

С другой стороны, метод множителей Лагранжа (который, возможно, в данном случае перевести на школьный язык) показывает, что в “оптимальном” примере  $\frac{3x_i^2 - 2}{4x_i - 1}$  не

зависит от  $i$ . Это сразу позволяет обосновать 1), но для 2) приводит совсем к другому соотношению. (!?)

<http://www.ashap.info/Turniry/TG/index.html>