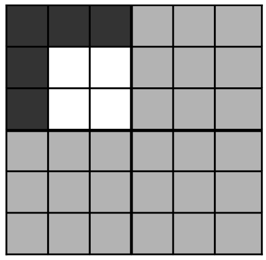
31 турнир городов, осень
Решения задач от А.Шаповалова и Л.Медникова

Базовый вариант, младшие

1. [3] Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты – не равны? (*Н. Авилов*)
Решение. Можно. Разрежем квадрат 6×6 на 4 квадрата 3×3. Три из них окрасим в серый цвет, а от четвертого отрежем угловой (белый) квадрат 2×2. Оставшийся уголок состоит из 5 единичных квадратов (см. рис).



2. [4] Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г. Из них выбрали 10 гирь четной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечетной массы и положили на правую чашу весов. Весы оказались в равновесии. Докажите, что на какой-нибудь чаше есть две гири с разностью масс в 20 г. (*В. Произволов*)
Решение. Разобьем гирьки на пары с разностью 20 г: (1, 21), (2, 22), ..., (20, 40). Если на весах окажутся обе гирьки какой-то пары, все доказано. Иначе на весах оказалось ровно по одной гирьке из каждой пары. Тогда (независимо от выбора гирек в каждой паре) вес нечетной чашки при делении на 20 даст тот же остаток, что и сумма 1 + 3 + ... + 19 = 100 (то есть 0), а вес четной чашки даст тот же остаток, что и сумма 2 + 4 + ... + 20 = 110 (то есть 10). Противоречие: по условию эти веса равны.

3. [4] На столе лежит картонный круг радиуса 5 см. Петя, пока возможно, прикладывает к кругу снаружи картонные квадраты со стороной 5 см так, чтобы выполнялись условия:
1) у каждого квадрата одна вершина лежит на границе круга;
2) квадраты не перекрываются;
3) каждый следующий квадрат касается предыдущего вершиной к вершине.
Определите, сколько квадратов может выложить Петя, и докажите, что последний и первый квадрат тоже коснутся вершинами. (*А. Шаповалов*)
Ответ. 8 квадратов.
Решение. Если вершина A квадрата $ABCD$ лежит на окружности с центром O, то точки B, D и O лежат на окружности радиусом 5 см и центром A. Вписанный угол $BOD = 45°$ – как половина центрального угла BAD. Итак, по условию каждый выложены квадрат виден из центра под углом 45°, и границы соседних углов совпадают, поэтому всего Петя сможет выложить 360°/45° = 8 квадратов. Пусть $EDFG$ – еще один выложенный квадрат (E лежит на окружности). $OADE$ – ромб, поэтому$\angle OAD = \angle OED$. Отсюда
$\angle OAB = 360° – 90° – \angle OAD = 360° – 90° – \angle OED = \angle OEG$. Треугольники OAB и OEG равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $OB = OG$. Итак, вершины квадратов, противоположные общей, равноудалены от O. Таким образом, одна вершина первого квадрата и одна вершина восьмого лежат на одном и том же луче из O на одинаковом расстоянии от O. Значит, они совпадают.

4. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток? (*Д. Баранов*)
Решение. Можно за 6 попыток: 1234560, 2345610, 3456120, 4561230, 5612340, 6123450. Среди первых 6 цифр пароля есть цифра от 1 до 6. Поскольку мы каждую цифру от 1 до 6 по разу набрали на каждом из первых 6 мест, она хоть раз да совпадет.

5. [5] На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться? (*А.Эвнин*)
Ответ. 1000.
Решение. Всего было отправлено 2000000 приглашений, а пар на сайте $2000\cdot1999/2 = 1999000$. Приглашений на 1000 больше, чем пар, поэтому внутри хотя бы 1000 пар было отправлено два приглашения. Значит, образовалось хотя бы 1000 пар друзей. Ровно 1000 возможна: расставим всех людей на сайте по кругу, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только то, кто расположен строго напротив друг друга.

Базовый вариант, старшие

1. [4] Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток? (*Д. Баранов*)
См. задачу 5 для 8-9 классов.

2. [4] В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE. Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.
(*В. Произволов*)
Решение 1. Плоскости AEF и BCD параллельны: в них есть по паре параллельных прямых. Если бы они не совпадали, то высекали бы на параллельных прямых AB и DE равные отрезки $AB = DE$. Значит, все 6 точек лежат в плоскости AEF.
Решение 2. Вектор $\overline{AD}$ двумя способами *разными* способами выражается через векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$: $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{ED} + \overline{FE} + \overline{AF} = a\overline{AB} + b\overline{BC} + c\overline{CD}$, где $a\neq1$. Поэтому векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ компланарны.

3. [4] Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?
(*М. Мурашкин*)
Решение. Существуют, например
$(100^{33})^3 + (200^{33})^3 + (300^{33})^3 + (400^{33})^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)\cdot100^{99} = 100\cdot100^{99} = 100^{100}$.

4. [4] На сторонах правильного 2009-угольника отметили по точке. Эти точки являются вершинами 2009-угольника площади S. Каждую из отмеченных точек отразили относительно середины стороны, на которой эта точка лежит. Докажите, что 2009-угольник с вершинами в отраженных точках также имеет площадь S. (*П. Кожевников*)
Решение. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2009}$ – правильный 2009-угольник со стороной 1, φ – его угол, P – его периметр, M – 2009-угольник площади S, a_i расстояние от A_i до ближайшей по часовой стрелке отмеченной вершины ($i = 1, 2, \ldots, 2009$). Сторона многоугольника M отсекает от

угла A_i правильного многоугольника треугольник площади $0{,}5\sin\varphi\cdot(1-a_{i-1})a_i$. Суммируя отсеченные площади, получаем $0{,}5\sin\angle A\cdot((a_1+a_2+\ldots+a_{2009})-(a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{2009}a_1))$. После отражения сторона нового 2009-угольника отсекает от угла A_i треугольник площади $0{,}5\sin\varphi\cdot a_{i-1}(1-a_i)$. Суммируя отсеченные площади, снова получаем тот же результат.

5. [5] В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше десяти платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно раздать десяти компаниям так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний. (*И.Нетай, Д.Баранов*)

Решение 1. Отметим на каждом пути из южной столицы Ю в северную С самую первую платную дорогу числом 1. Докажем, что на каждом пути p осталось не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Выберем на p ближайшую к С отмеченную дорогу d. Поскольку она отмечена, она была первой платной на некотором пути q. Пройдем от Ю до d по (бесплатным дорогам) пути q, а далее через d вдоль p до С. По условию на таком пути не менее 10 платных дорог, и только дорога d отмечена. Значит, на участке пути от d до С есть не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Объявим временно отмеченные дороги бесплатными и отметим на каждом пути первую платную дорогу числом 2. Теперь на каждом пути останется не менее 8 платных дорог.

Повторяя рассуждение, расставим отметки 3, ..., 10 на каждом пути.
Теперь раздадим дороги компаниям в соответствии с их «номерами». Оставшиеся платные дороги раздадим произвольно.

Решение 2. Пусть проезд по каждой платной дороге стоит 1 тугрик. Назовем *весом* дороги, наименьшую сумму, которую надо заплатить, чтобы выехав из Ю, проехать по этой дороге.

Докажем, что вес самой северной дороги каждого пути не меньше 10. Предположим, противное – что вес последней дороги на пути p не превосходит 9. Тогда до нее можно дойти, заплатив не более 8 тугриков. Продолжив путь по остатку пути p мы получим (в противоречие с условием) пример пути, на котором менее 10 платных дорог.

Заметим, что первая платная дорога на каждом пути имеет вес 1. При переходе к следующей дороге вес не меняется или увеличивается на 1. Поэтому на каждом пути есть дороги любого веса от единицы до 10. Отдадим k-й компании все дороги веса k, а дороги веса больше 10 распределим произвольно.

Сложный вариант, младшие

1. В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко – не поровну, но каждый оказался заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него поровну во все остальные. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну. (*Е. Горинов*)

Решение. Отольем из каждого кувшина во все остальные $^1/_{10}$ от *первоначального* количества молока в данном кувшине. Тогда молоко из каждого кувшина распределится поровну, значит, и в каждом кувшине станет поровну.

2. У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая – синяя, третья – красная. Он собрал из них большой куб 10×10×10, прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань. (*М. Мурашкин*)

Решение. Пусть левая грань кубика – разноцветная. Тогда найдутся два соседних разноцветных квадратика. Повернем кубик так, чтобы соответствующие кубики были один над другим. Они образуют 2×1×1-параллелепипед П с разноцветной (скажем, сине-белой) левой гранью. Тогда общая горизонтальная грань кубиков красная, а все вертикальные 2×1-грани П – сине-белые. Рассмотрим 2×1×1-параллелепипед П’, примыкающий к П по 2×1-грани. У него есть сине-белая грань, значит, и все его 2×1-грани – сине-белые. Так продолжая, видим, что в двойном горизонтальном слое 2×10×10, содержащем П, у всех вертикальных 2×1×1 параллелепипедов есть сине-белая грань, и, значит, общая грань красная. Итак, в двойном слое одинарные слои 1×10×10 соприкасаются по красной грани 10×10, значит, и верхняя грань куба – тоже красная.

3. Найдите все такие натуральные a и b, что $(a^2 + b)(b^2 + a)$ является целой степенью двойки. (*В. Произволов*)

Ответ. $a = b = 1$

Решение 1. Каждая скобка является степенью двойки. Поэтому числа a и b одной четности. Разберем два случая.

1) $a = b$. Тогда $a^2 + a = a(a + 1)$ – степень двойки. Числа a и $a + 1$ – степени двойки разной четности, следовательно, $a = 1$.

2) $a > b$. Тогда $a^2 + b = 2^m > b^2 + a = 2^n$. Имеем $(2^{m-n} - 1)\cdot 2^n = a^2 - b^2 + b - a = (a - b)(a + b - 1)$. $a - b$ четно, а $a + b - 1$ нечетно, следовательно, $a - b = 2^n = a + b^2$. Противоречие.

Решение 2. Каждая скобка является степенью двойки. Пусть $a = 2^k m$, $b = 2^l n$, где m и n – нечетны. Можно считать, что $k \ge l$. Тогда $a^2 + b = 2^{2k}m^2 + 2^l n = 2^l(2^{2k-l}m^2 + n)$. Последняя скобка четна только при $2k - l = 0$, то есть при $k = l = 0$. Итак, a и b – нечетны. Тогда $a + 1= 2^k m$, $b + 1 = 2^l n$, где m и n – нечетны, $k \ge 1$, $l \ge 1$. Снова можно считать, что $k \ge l$. Нетрудно убедиться, что $a^2 + b = 2^{2k}m^2 - 2^{k+1}m + 2^l n = 2^l(2^{2k-l}m^2 - 2^{k-l+1}m + n)$. Выражение $2^{2k-l}m^2 - 2^{k-l+1}m + n$ нечетно, значит, равно 1. Но первый член по модулю не меньше второго, поэтому такое равенство возможно только при $k = m = n = 1$. Но тогда и $l = 1$, то есть $a = b = 1$.

4. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба. (*В. Произволов*)

Набросок решения. Достаточно доказать, что середина отрезка PQ лежит на прямой, параллельной BD и расположенной в 1,5 раза дальше от A, чем BD. Но это – прямая, проходящая через точки K и L – середины сторон BC и CD соответственно. Ясно, что $KP =$

LQ. Отсюда легко вывести, что точки P и Q равноудалены от прямой KL, а значит, середина отрезка PQ лежит на KL.

5. Из гирек весами 1 г, 2 г, ..., N г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарным весом, равным среднему весу оставшихся гирек. Докажите, что

а) это можно сделать, если N+1 – квадрат целого числа;

б) если это можно сделать, то N+1 – квадрат целого числа.

(*А. Шаповалов*)

Решение. **а**) Пусть $N + 1 = k^2$. Выберем гирьки веса 1, 2,..., k, их сумма равна $\frac{k^2+k}{2}$. Среднее арифметическое оставшихся последовательных чисел равно полусумме крайних, то есть $\frac{k+1+k^2-1}{2} = \frac{k^2+k}{2}$.

б) Общий вес всех N гирек равен $\frac{N^2+N}{2}$. Пусть мы выбрали k гирек общим весом S так, что средний вес оставшихся $N-k$ гирек равен S. Значит, $\frac{N^2+N}{2}$–S=(N–k)S, что равносильно равенству $2S(N-k+1) = N^2 + N$. Отсюда следует, что $2S > N + k$, поскольку $N^2 + N > N^2 + N - k^2 + k = (N + k)(N - k + 1)$.

С другой стороны, если мы выбираем k *наименьших* гирь, то средний вес оставшихся будет *наибольшим* и равным $\frac{N+k+1}{2}$, то есть (при любом выборе гирь) $2S \leq N + k + 1$.

Итак, единственный возможный вариант – выбрать k *наименьших* гирь, удвоенный общий вес $k^2 + k$ которых должен *равняться* $N + k + 1$. Отсюда, $N + 1 = k^2$.

6. [5] На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов, стороны которых идут по сторонам клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем в одном квадрате. (*И. Пак, Ю. Рабинович*)

Решение. Назовем 2009 квадратов плитками. Разобьем плоскость на решетку из квадратов размером с плитку линиями, идущими по границам клеток. У каждой клетки теперь есть координаты: номер столбца (считая от левого края квадрата) и номер строки, (считая от нижнего края). Заметим, что все клетки, накрытые плиткой, имеют разные координаты. Выберем любую пару координат, и в каждой накрытой клетке с этими координатами напишем число покрывающих ее плиток. Сумма этих чисел равна числу плиток, то есть 2009. Хотя бы одно слагаемое нечетно. Это верно для каждой пары координат, а число пар равно числу клеток в плитке.

7. Оля и Макс оплатили путешествие по архипелагу 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они вместе путешествуют на катерах, по очереди выбирая следующий остров (первый раз выбирает Макс). Кто не сможет выбрать новый остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы не играл Макс. (*Фольклор, предложил А.Шаповалов*)

Решение. Отметим на схеме *максимально возможное* число маршрутов без общих концов. Соответственно, острова разобьются на пары и несколько (но не менее одного) отдельных островов. Прилетим на какой-нибудь отдельный остров. Далее, если Макс ходит на остров отмеченного маршрута, Оля отвечает ходом на второй остров этого маршрута. Предположим, однако, что Максу удастся сделать ход на отдельный остров. Путь с начала до этого острова состоит из четного числа $2k$ островов, или из $k-1$ отмеченного маршрута и двух отдельных островов. Но ведь этот путь можно разбить на k

маршрутов, и они, вместе с непосещенными отмеченными маршрутами дадут *большее* число маршрутов, что противоречит максимальности. Значит, ход Макса на отдельный остров невозможен, и Оля выигрывает.

Сложный вариант, старшие

1. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.) (*Е. Горинов*)

Решение. Обозначим через Z сумму выигрышей (она же сумма проигрышей). Пусть сначала у каждого пирата весь его песок лежит в *правом* кармане. Попросим каждого проигравшего выдать всем (включая себя самого) по 0,01 от своего проигрыша. Полученный при этом песок каждый кладет в свой *левый* карман. В результате у каждого пирата в *левом* кармане окажется на $0{,}01Z$ золотого песка, а *правый* карман каждого проигравшего "облегчится" на его проигрыш. Далее каждому выигравшему все пираты (включая его самого) выдают из своих *левых* карманов по 0,01 его выигрыша. В результате все *левые* карманы снова опустеют, а к песку в *правом* кармане каждого выигравшего добавится его выигрыш.

2. Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из оставшихся N частей – прямоугольник. (*А. Шаповалов*)

Решение. Пусть размеры прямоугольника $a \times b$, $a < b$ и сторона b горизонтальна. Сожмем прямоугольник равномерно по горизонтали так, чтобы стороны стали равны. Получим разбитый на прямоугольники квадрат. Каждая его часть получена сжатием плитки по горизонтали в $^b/_a$ раз. Значит, она имеет меньшую ширину, но ту же высоту, и такую часть можно отрезать от плитки вертикальным разрезом. Оставшая часть плитки получается из нее сжатием по горизонтали в $^b/_{(b-a)}$ раз. Соответственно, из них можно сложить прямоугольник, получающийся из исходного сжатием в $^b/_{(b-a)}$ раз.

3. Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке. (*В. Произволов*)

Решение 1. Поместим в каждую вершину массу, обратно пропорциональную длинам проведенных из этой вершины касательных к сферы (все три касательные для данной вершины, очевидно, равны). Тогда точка касания ребра совпадает с центром масс этого ребра, и все три отрезка из условия задачи пересекаются в центре масс тетраэдра.

Решение 2. Пусть K, L, M, N, P, R – точки, в которых соответственно ребра AB, AC, AD, BC, BD, CD тетраэдра $ABCD$ касаются сферы, a, b, c, d – длины касательных, выходящих соответственно из вершин A, B, C, D.

Плоскости ABD и BCD пересекаются по прямой BD. По теореме Менелая (примененной к треугольнику ABD) прямая MK пересекает BD в точке, делящей отрезок BD (внешним образом) в отношении $\frac{AM}{DM}\cdot\frac{BK}{AK} = \frac{a}{d}\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{d}$. По той же причине прямая RN пересекает BD в той же точке ($\frac{CR}{DR}\cdot\frac{BN}{CN} = \frac{c}{d}\cdot\frac{b}{c} = \frac{b}{d}$). (Если $b = d$, то MK и RN параллельны BD.) Значит, прямые MK и RN лежат в одной плоскости (пересекаются или параллельны). Следовательно, прямые MN и KR также пересекаются.

Аналогично прямая LP пересекает MN и KR. Поскольку эти три прямые очевидно не лежат в одной плоскости, они должны пересекаться в одной точке.

4. Обозначим через $[n]!$ произведение $1\cdot 11\cdot 111\cdot\ldots\cdot 11\ldots 11$ (всего n сомножителей, в последнем числе n единиц). Докажите, что число $[n+m]!$ делится на произведение $[n]![m]!$. (*М. Берштейн*)

Решение 1. Обозначим число из k единиц 1_k, тогда $[m]! = 1_m[m-1]!$, $1_{m+n} = 10^m 1_n + 1_m$. Обозначим $C[m, n] = \dfrac{[n+m]!}{[m]![n]!}$. Положим $[0]! = 1$, тогда $C[0, n]$ и $C[m, 0]$ определены и равны 1.

Докажем индукцией по $m + n$, что число $C[m, n]$ – целое. База и случай $m = 0$ или $n = 0$ очевидны.

Пусть $m, n \geq 1$ и для меньших значений $m + n$ все доказано. Тогда число

$$C[m, n]= \frac{1_{m+n}[n+m-1]!}{[m]![n]!} = \frac{\left(1_n 10^m + 1_m\right)[n+m-1]!}{[m]![n]!} = 10^m \frac{1_n[n+m-1]!}{[m]!1_n[n-1]!} + \frac{1_m[n+m-1]!}{1_m[m-1]![n]!} = =$$

$$10^m C[m, n-1] + C[m-1, n]$$ – тоже целое.

Решение 2. Пусть q – число, взаимно простое с 10, $k(q)$ – наименьшее k, при котором кратно q. Легко видеть, что m при делении на k дает в остатке $r \Leftrightarrow 1_m$ при делении на 1_k дает в остатке 1_r. Отсюда 1_k кратно $q \Leftrightarrow k$ кратно $k(q)$. Поэтому из множителей вида 1_k, входящих в $[n]!$, на q делятся ровно $\left[\dfrac{n}{k(q)}\right]$.

Из этого следует, что простое число $p \neq 2, 5$ входит в разложение $[n]!$ на простые множители в степени

$$\left[\frac{n}{k(p)}\right] + \left[\frac{n}{k(p^2)}\right] + \left[\frac{n}{k(p^3)}\right] + \ldots$$

В силу неравенства $\left[\dfrac{n}{k}\right] + \left[\dfrac{m}{k}\right] \leq \left[\dfrac{n+m}{k}\right]$ каждое простое число входит в разложение $[n+m]!$ не в меньшей степени, чем в разложение $[n]![m]!$.

Решение 3 (для знатоков). Рассмотрим многочлены $P_k(x) = x^{k-1} + x^{k-2} \ldots + x + 1$, $Q_n(x) = P_2(x)\ldots P_n(x)$ (над полем комплексных чисел).

Корнями многочлена $P_k(x)$ являются все (кроме единицы) корни k-й степени из единицы. Пусть ε – *первообразный* корень k-й степени из 1. Тогда он является корнем l-й степени тогда и только тогда, когда l кратно k. Поэтому множитель $x - \varepsilon$ входит в разложение $Q_{m+n}(x)$ на линейные множители в степени $\left[\dfrac{n+m}{k}\right]$, а в $Q_n(x)Q_m(x)$ – в степени

$$\left[\frac{n+m}{k}\right] + \left[\frac{n+m}{k}\right] \leq \left[\frac{n+m}{k}\right].$$

Следовательно, $Q_{m+n}(x)$ делится на $Q_n(x)Q_m(x)$.

Поскольку $Q_n(x)Q_m(x)$ – приведенный многочлен, частное – многочлен с целыми коэффициентами. Подставив $x = 10$, получаем утверждение задачи.

5. Даны треугольник XYZ и выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Стороны AB, CD и EF параллельны и равны соответственно сторонам XY, YZ и ZX. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA не меньше площади треугольника XYZ. (*Н. Белухов*)

Решение 1. Пусть $S_{XYZ} = s$, $S_{ABCDEF} = S$, K, L и M – середины соответственно сторон BC, DE и FA.

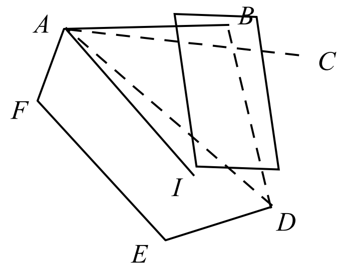
1) Напомним, что если R – середина отрезка PQ, не пересекающего прямую HG, то

$$S_{RHG} = {}^1/_2\,(S_{PHG} + S_{QHG})$$

(высота треугольника RHG, опущенная на HG равна полусумме соответствующих высот треугольников PHG и QHG).

Поэтому $S_{KLM} = {}^1/_2\,(S_{BLM} + S_{CLM}) = {}^1/_4\,(S_{BDM} + S_{BEM} + S_{CDM} + S_{CEM}) =$
$= {}^1/_8\,(S_{BDA} + S_{BDF} + S_{BEA} + S_{BEF} + S_{CDA} + S_{CDF} + S_{CEA} + S_{CEF})$.

2) Построим параллелограмм $BCDI$ (см. рис.). По условию треугольники ABI и XYZ равны. Заметим, что



$$S_{DAB} = S_{CAB} + S_{IAB} = S_{CAB} + s$$

(высота треугольника ADB, опущенная на AB равна сумме соответствующих высот треугольников ACB и AIB).

Аналогично $S_{EAB} = S_{FAB} + s$,

$S_{ACD} = S_{BCD} + s$, $S_{FCD} = S_{ECD} + s$,

$S_{BFE} = S_{AFE} + s$, $S_{CFE} = S_{AFE} + s$,

3) Отсюда

$$S_{KLM} = {}^1/_8\,(S_{BDA} + S_{BDF} + S_{BEA} + S_{BEF} + S_{CDA} + S_{CDF} + S_{CEA} + S_{CEF}) =$$
$$= {}^1/_8\,(6s + S_{ABC} + S_{BDF} + S_{ABF} + S_{AEF} + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{ACE} + S_{DEF}).$$

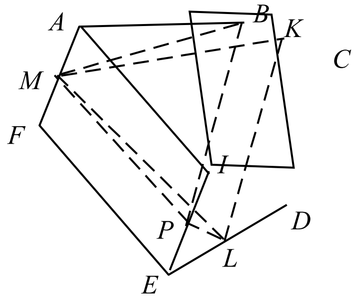
Заметим, что

$$S_{BDF} + S_{ABF} + S_{BCD} + S_{DEF} = S_{AEF} + S_{CDE} + S_{ACE} + S_{ABC} = S$$

Поэтому $S_{KLM} = {}^1/_8\,(6s + 2S) = {}^1/_4\,(3s + S) > s$.

(Точка I очевидно находится внутри шестиугольника, поэтому $s < S$).

Решение 2. Построим параллелограмм $BCDI$ (см. рис.). По условию треугольники ABI и XYZ равны. Значит, отрезок AI параллелен и равен FE, то есть $AIEF$ – тоже параллелограмм. Пусть P – середина EI.



Тогда $S_{KLM} > S_{MPB} > S_{ABI} = S_{XYZ}$.

Оба неравенства следуют из следующего очевидного утверждения:

Пусть $TUVW$ – параллелограмм, точка R и отрезок VW лежат по разные стороны от прямой TU. Тогда

$$S_{RVW} > S_{RTU}.$$

(В первом случае используется параллелограмм $BKLP$, во втором – $AIPM$.)

6. См задачу 7 для младших.

7. У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены N одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка – либо головой вверх, либо головой вниз, но где как – не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до N штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки были перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все N селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких N Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру? (*Л.Брагинский, Д.Фомин, П.Коган*)

Ответ. При $N = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Решение. Заменим бочонки на нули и единицы, стоящие по кругу.

Пусть $N \neq 2^k$, $k = 0, 1, 2,$ Покажем, что при невезении Али-Баба никогда не откроет пещеру. Можно считать, что мы играем против Али-Бабы, вращая круг, и что он заранее говорит нам, на каких местах он будет менять цифры на каждом (в том числе и на первом) ходу.

Рассмотрим сначала случай, когда N нечетно. Расставим на круге нули и единицы так, чтобы Али-Баба не выиграл первым своим (известным нам) ходом (то есть чтобы после его хода на круге были как нули, так и единицы).

Пусть Али-Баба на очередном ходу выбрал для замены определенные k мест. Он выиграет только если эти k мест совпадут либо со множеством всех нулей, либо со множеством всех единиц. Но число нулей не равно числу единиц (сумма чисел нечетна!). Значит, каких-то цифр – не k штук. Загнав поворотом такую цифру на одно из выбранных k мест, мы не дадим Али-Бабе выиграть следующим ходом.

Случай, когда N четно, но имеет нечетный делитель m, сводится к разобранному. Отметим на большом круге m равноотстоящих мест и забудем про остальные.

Действуя, как описано выше, мы сможем помешать Али-Бабе уравнять все цифры на отмеченных местах.

Алгоритм выигрыша Али-Бабы для 2^k мест будем строить индуктивно. База для $k = 1$ очевидна. Пусть у нас есть алгоритм A_m для m мест. Построим A_{2m}. Начнем с частных случаев. Разобьем круг на m пар противоположных мест и установим соответствие между парами для $2m$ и местами для m.

1) Пусть мы знаем, что в каждой паре цифры равны. Применим алгоритм A_m, заменяя места целыми парами. Ясно, что когда замок открылся там, он откроется и тут.

2) Пусть мы знаем, что четность суммы в каждой паре одинакова. Применим A_m для пар. Если не открылось, то все суммы были нечетны. Но меняя оба числа пары, мы не меняем четности. Значит, все суммы остались нечетными. Изменим m цифр подряд (назовем эту операцию D). Теперь все суммы четны. Еще раз применив A_m для пар, откроем замок. Назовем алгоритм для этого случая B.

3) Применим теперь A_m для пар другим способом: цель – сделать суммы в парах одной четности. По прежнему на каждом шагу мы выбираем набор пар согласно A_m, но меняем в каждой выбранной паре только *по одной* цифре. Назовем алгоритм C. Он гарантирует, что на каком-то шаге (мы не знаем, на каком) четности сумм совпадут. Дверь это, понятно, не откроет. Но мы схитрим: после каждого шага C применим B, а затем D. При совпадении сумм четностей B откроет дверь, а иначе BD не изменит четностей сумм.