32-й Международный математический Турнир городов
Осенний тур
Решения задач
(подготовили Л.Э.Медников и А.В.Шаповалов)

Сложный вариант, младшие классы

3.1. [4] На плоскости дана прямая. С помощью пятака постройте две точки какой-нибудь прямой, перпендикулярной данной. Разрешаются такие операции: отметить точку, приложить пятак к ней и обвести его; отметить две точки (на расстоянии меньше диаметра пятака), приложить пятак к ним и обвести его. Нет возможности прикладывать пятак к прямой так, чтобы она его касалась. *(Г.Фельдман)*

Решение. Отметим на данной прямой l три точки A, B и C так, чтобы AB и BC были меньше диаметра пятака. Прикладывая пятак к отрезкам AB и BC с одной стороны прямой, построим две окружности. Пусть они второй раз пересекутся в точке D. Прикладывая пятак к отрезкам AB и BC с другой стороны, получим две новые окружности, симметричные старым относительно l. Точка пересечения новых окружностей D' симметрична D относительно l, поэтому $DD' \perp l$.

3.2. [5] Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n:(n+1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он? *(Б.Френкин)*

Решение. Петя прав. Рациональное отношение – это отношение целых чисел. Чтобы поделить отрезок в отношении $k : l$, достаточно поделить его на $m = k + l$ равных частей. Покажем, как это сделать, индукцией по q. *База* : $m = 1$.

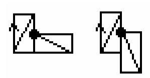
Пусть мы умеем делить отрезок на любое число частей, меньшее m. Если $m = 2n$, разделим отрезок пополам, а потом каждую половину – на n частей. Если $m = 2n + 1$, разделим отрезок в отношении $n:(n+1)$, а затем меньший кусок поделим на n частей, а больший – на $n + 1$ часть.

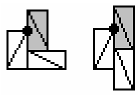
3.3. [8] На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее 25 встреч. *(Б.Френкин)*

Решение. Пусть S – длина трека, $v_1 < v_2 < \ldots < v_{10}$ – скорости велосипедистов, $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{10} - v_9\}$. Велосипедисты с номерами $i < j$ встречаются через промежутки времени $\dfrac{S}{v_j - v_i}$. Ясно, что самый большой из промежутков равен $\dfrac{S}{u}$, и нам придется ждать до конца этого промежутка, чтобы каждый встретился со всеми остальными. Поскольку $v_j - v_i \geq (j - i)u$, то за это время велосипедисты с номерами i и j успеют встретиться не менее $j - i$ раз. Значит, у 5-го велосипедиста будет не менее $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ встреч с теми, у кого номер меньше, и не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ встреч – с теми, у кого больше. Итого не менее 25 встреч. Для 6-го оценка та же, а у остальных еще больше.

3.4. [8] Клетчатый прямоугольник разбит на двуклеточные доминошки. В каждой доминошке провели одну из двух диагоналей. Оказалось, что никакие диагонали не имеют общих концов. Докажите, что ровно два из четырех углов прямоугольника являются концами диагоналей. *(А.Шаповалов)*

Решение. Достаточно доказать, что в любых двух доминошках, граничащих по отрезку, проведенные диагонали выходят либо обе из правых нижних, либо обе из левых нижних углов. Предположим противное и найдем *плохую пару*: две соприкасающиеся доминошки с диагоналями разных направлений. Ясно, что общий отрезок не может быть целой стороной обеих доминошек. Принципиально возможны лишь два случая – см. верхний рис. В обоих случаях однозначно определяются *центр* (конец диагонали на середине стороны) и *направление пары* (направление от центра к концу другой диагонали на той же стороне) – на рис. это *жирная точка и стрелка*. Рассмотрим плохую пару, чей центр ближе всего к стороне, на которую показывает направление пары. Заметим, что положение доминошки, примыкающей к плохой паре в ее центре, и диагональ в этой доминошке тоже определены однозначно (см. нижний рис.). Но тогда возникает новая плохая пара, чей центр ближе к указанной стороне. Противоречие доказывает, что плохих пар нет.





2-е решение. 1) Пусть левый нижний угол не является концом диагонали доминошки. Рассмотрим следующую доминошку, примыкающую к нижней стороне. Легко видеть, что диагональ в ней имеет то же “направление”, что и в угловой. Это верно и для следующей справа доминошки и т.д. Следовательно, из *правого нижнего угла* выходит диагональ.

Итак, доказано, что *хотя бы из одного угла* диагональ доминошки выходит.

2) Пусть из левого нижнего угла A выходит диагональ AB *первой* доминошки. К пер-вой доминошке обязательно примыкает (по стороне или половине стороны) *вторая* доминошка, для которой B также служит вершиной. Поэтому диагональ второй доминошки имеет то же направление, что и AB. Заметим также, что сумма “координат” правой верхней вершины (C) у второй доминошки больше, чем у первой. Ко второй доминошке примыкает *третья*, для которой C является вершиной, и рассуждения можно повторить. В результате будет построена *цепь* из доминошек с диагоналями одного направления, соединяющая левый нижний и правый верхний углы прямоугольника. Следовательно, в правый верхний угол также входит диагональ доминошки.

3) Пусть из правого нижнего угла также выходит диагональ. Тогда можно построить цепь доминошек, соединяющую правый нижний и левый верхний углы прямоугольника. Эта цепь должна “пересечься” с ранее построенной цепью, то есть имеет с ней общую доминошку. Противоречие, так как диагонали доминошек второй цепи “направлены” не так, как в первой.

3.5. Имеется пятиугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2. *(Г.Гальперин)*

Решение. Каждая сторона меньше суммы остальных, поэтому сумма остальных больше полупериметра. Значит, заменив каждый знаменатель на полупериметр, мы увеличим сумму. Но теперь она равна 2.

3.6. [8] В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A' и C' – середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP, в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C. *(Ф.Ивлев)*

Решение 1. Проведем в треугольниках ABP и CBP средние линии $C'C''$ и $A'A''$. Они равны по длине, и они перпендикулярны AC (так как обе параллельны отрезку BP и равны его половине). Проведем из точки K отрезок KK', сонаправленный с $C'C''$ и $A'A''$ и равный им по длине. Тогда $KC'C''K'$ и $KA'A''K'$ – параллелограммы, откуда $K'C''$ и $K'A''$ – срединные перпендикуляры к сторонам AP и CP треугольника APC. Значит K' – центр описанной окружности этого треугольника и лежит на срединном перпендикуляре к AC. Но тогда там лежит и точка K (так как прямая KK' перпендикулярна AC).

Решение 2. Рассмотрим гомотетию (с центром в точке пересечения медиан), переводящую треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, образованный его средними линиями. Эта гомотетия переводит высоты треугольника APC, опущенные из вершин A и C, в параллельные им прямые – указанные в условии перпендикуляры. Следовательно, ортоцентр треугольника APC переходит в точку K. Значит, K – ортоцентр треугольника $A'B'C'$, то есть лежит на высоте этого треугольника, опущенной из вершины B', а это – серединный перпендикуляр к отрезку AC.

3.**7**. [12] За круглым столом заседают N рыцарей. Каждое утро чародей Мерлин сажает их в другом порядке. Начиная со второго дня Мерлин разрешил рыцарям делать в течение дня сколько угодно пересадок такого вида: два сидящих рядом рыцаря меняются местами, если только они не были соседями в первый день. Рыцари стараются сесть в том же порядке, что и в какой-нибудь из предыдущих дней: тогда заседания прекратятся. Какое наибольшее число дней Мерлин гарантированно может проводить заседания? (Рассадки, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. Мерлин за столом не сидит.) *(М.Прасолов)*

Решение. Занумеруем в первый день сидящих рыцарей по часовой стрелке от 1 до N. Порядок за столом будем описывать строкой этих номеров, перечисляя рыцарей по часовой стрелке. Назовем *избранными* порядки вида $k, k-1, \ldots, 2, 1, k+1, k+2, \ldots, N$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, N-1$ (N-й избранный порядок совпадает с (N–1)-м, поэтому он не нужен). Докажем, что из любого порядка можно пересесть в избранный. Для этого осуществим пересадку, при которой *левая* группа $k, k-1, \ldots, 2, 1$ *максимальная из возможных*. Покажем, что остальные рыцари при этом автоматичеески сидят в нужном порядке ($k+1, k+2, \ldots, N$). Пусть это не так. Будем двигать число $k+1$ по часовой стрелке. Если по пути $k+1$ упрется в $k+2$, будем двигать эту пару. Упершись парой в $k+3$, будем двигать тройку и т. д. В итоге до k доедет «поезд» $k+1, k+2, \ldots, k+m$. При этом $k+m < N$ (иначе никакого движения вообще не было). Прогоним все числа поезда, кроме $k+1$, сквозь левую группу, а $k+1$ присоединим к ней. Противоречие с максимальностью левой группы.

Ясно, что пересаживаясь каждый день в избранном порядке, рыцари повторятся не позднее, чем на N-й день.

Пусть для произвольного порядка Мерлин выполнит такой обход: двигаясь все время по часовой стрелке, пройдет от 1-го до 2-го, затем до 3-го, до 4-го, …, до N-го и снова до 1-го. Свяжем с порядком *число оборотов* Мерлина вокруг стола. Легко убедиться, что при разрешенной пересадке двух рыцарей число оборотов не меняется. Однако числа оборотов избранных порядков различны (для k-го порядка число оборотов равно k), поэтому избранные порядки с разными k пересадками друг из друга не получаются. Рассаживая рыцарей в очередном избранном порядке, Мерлин может получить первое повторение не ранее N-го дня.

Сложный вариант, старшие классы

4.**1**. В некой стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей).

а) [2] Одна запись стерлась. Всегда ли можно однозначно восстановить ее по остальным?

б) [3] Пусть стерлись k записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем k всегда можно однозначно восстановить стершиеся записи? *(И.Богданов)*

Решение. **а**) Не всегда. Пусть 98 точек лежат на одной прямой l, а две точки A и B – вне нее (где A и B не симметричны относительно l). Если неизвестно расстояние между A и B, то восстановить его нельзя: при замене точки B на B', симметричную B относительно l, остальные расстояния не изменятся, а расстояние AB' будет отличаться от AB.

б) При $k = 96$.

Решение 1. Покажем, что если количество городов $n \geq 4$, то $k = n$-4. Для n=4 утверждение легко проверяется. Пусть оно верно для n, докажем его для n+1.

Если для некоторого города A стёрты его расстояния для n-2 городов, то его можно симметрично отразить – с сохранением всех известных расстояний – относительно прямой, соединяющей остальные два города (назовем их B и C). Неизвестные нам расстояния при этом изменятся, так как на прямой, соединяющей B и C, не находится никакой другой город. Поэтому $k \geq n$-3.

Пусть стёрто не более n-3 записей. Выберем город A, для которого стёрто хотя бы одно расстояние до другого города, и рассмотрим остальные n городов. Между ними стёрто не более n-4 расстояний, и по предположению индукции можно восстановить все эти расстояния, а тогда и взаимное расположение этих городов (углы между соединяющими их отрезками). Для города A известны расстояния по крайней мере до 3 городов, и это позволяет однозначно восстановить его расположение на плоскости, а тем самым и расстояния до остальных городов.

Решение 2.

Найдется точка A, расстояния от которой по крайней мере до 98 других точек известны (в противном случае известно не более $100 \cdot 97:2 < 4950 - 96$ расстояний). Найдутся также две точки B и C из этих 98, расстояние между которыми известно. Итак, есть треугольник ABC с известными сторонами. Расположим его на плоскости и докажем, что расположение остальных точек определяется однозначно.

Найдется точка D, для которой известны расстояния до всех вершин треугольника ABC (иначе неизвестны не менее 97 расстояний). Тем самым положение точки D определено однозначно.

Найдется не менее 48 точек, расстояния от которых по крайней мере до трех из точек A, B, C, D известны (иначе неизвестны не менее $49 \cdot 2 = 98$ расстояний). Тем самым положения эти точек также определены.

Теперь для всех точек, кроме одной, известны расстояния по крайней мере до трех из уже “расставленных” 52 точек (иначе неизвестны не менее $2 \cdot 52 = 104$ расстояния).

Наконец для последней точки известны расстояния по крайней мере до трех остальных. Значит, и ее положение определено однозначно.

Увеличить k до 97 нельзя. Пусть неизвестны расстояния от точки A до всех точек, кроме B и C. Тогда положение точки A определено с точностью до симметрии относительно прямой BC, значит, расстояния от нее до остальных точек не восстанавливаются.

Решение для знатоков. Рассмотрим граф со 100 вершинами и 96 ребрами, соответствующими *стертым* записям. Этот граф содержит не менее 4 компонент связности. Зафиксируем по вершине (A, B, C, D) в каждой из этих 4 компонент. Все расстояния между этими вершинами известны.

Рассмотрим произвольную вершину первой компоненты. Известны ее расстояния до точек B, C, D, следовательно, положение соответствующего города на плоскости определено однозначно. Аналогична ситуация с вершинами оставшихся компонент.

4.2. [6] На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее N^2 встреч. *(Б.Френкин)*

Решение. Пусть S – длина трека, $v_1 < v_2 < \ldots < v_{2N}$ – скорости велосипедистов, $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{2N} - v_{2N-1}\}$. Велосипедисты с номерами $i < j$ встречаются через промежутки времени $\dfrac{S}{v_j - v_i}$. Ясно, что самый большой из промежутков равен $\dfrac{S}{u}$, и нам придется ждать до конца этого промежутка, чтобы каждый встретился со всеми остальными. Поскольку $v_j - v_i \geq (j - i)u$, то за это время велосипедисты с номерами i и j успеют встретиться не менее $j - i$ раз. Значит, у N-го велосипедиста будет не менее $1 + 2 + \ldots + (N - 1) = \frac{N(N-1)}{2}$ встреч с теми, у кого номер меньше, и не менее $1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$ встреч – с теми, у кого больше. Итого не менее N^2 встреч. Для $(N+1)$-го оценка та же, а у остальных еще больше (при сдвиге номера от середины в короткой сумме отнимается меньше, чем прибавляется в длинной).

4.3. [6] Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2. *(Г.Гальперин)*

Решение. Каждая сторона меньше суммы остальных, поэтому сумма остальных больше полупериметра. Значит, заменив каждый знаменатель на полупериметр, мы увеличим сумму. Но теперь она равна 2.

4.4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида “уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника”, где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

а) [2] конечно;

б) [5] бесконечно? *(И.Митрофанов)*

Решение. а) Нет. Пусть первый маг всегда применяет заклинание с наибольшей разностью $b - a$. Тогда после ответного хода разность высот первого и второго как минимум 0. В результате после нескольких ходов разность всегда неотрицательна и, значит, второй не выигрывает.

б) Да, это возможно. Рассмотрим произвольную убывающую последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, где $a_n < 50$, (например $a_n = {}^1/_n$) и пусть в n-м заклинании $a = a_n$, $b = 100 - a_n$. Ответив на n-е заклинание заклинанием с номером $m > n$, второй маг выиграет: высота первого станет равной $a_m - a_n < 0$, а высота второго $a_n - a_m > 0$.

4.5. [8] Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причем точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC. *(Ф.Ивлев)*

Решение. Пусть R – радиус окружности, P – середина AC, Q – середина BD, O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников AOC и BOD соответственно.

Опустим перпендикуляр O_1N на радиус OA. Из подобия треугольников AOP и O_1ON получаем $OP:OA = ON:OO_1$, то есть $OP\cdot OO_1 = {}^1/_2 R^2$. Аналогично $OQ\cdot OO_2 = {}^1/_2 R^2$.

Поэтому $OP:OQ = OO_2:OO_1$, значит, треугольники OPO_2 и OQO_1 подобны (у них общий угол при вершине O). По условию угол OQO_1 прямой, следовательно, и угол OPO_2 прямой, что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. Прямые AC и BD – поляры соответственно точек O_1 и O_2 относительно окружности радиуса ${}^R/_2$ с центром O. Поэтому утверждение задачи есть переформулировка известной теоремы:

если точка X лежит на поляре точки Y, то точка Y лежит на поляре точки X.

Выше как раз приведено одно из доказательств этой теоремы.

Решение для знатоков. Утверждение задачи есть частный случай следующего утверждения.

Пусть центр окружности Ω_1 лежит на радикальной оси окружностей Ω_2 и Ω_3, а центр окружности Ω_2 лежит на радикальной оси окружностей Ω_1 и Ω_3. Тогда центр окружности Ω_3 лежит на радикальной оси окружностей Ω_1 и Ω_2.

(В нашем случае Ω_1, Ω_2 и Ω_3 – описанные окружности треугольников *ABC*, *AOC* и *BOD* соответственно.)

Доказательство сводится к тривиальной проверке следствия:

$$O_1O_2^2 - r_2^2 = O_1O_3^2 - r_3^2,\ O_2O_1^2 - r_1^2 = O_2O_3^2 - r_3^2 \quad \Rightarrow \quad O_3O_1^2 - r_1^2 = O_3O_2^2 - r_2^2.$$

4.6. [12] В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что каждом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один невычеркнутый нуль. *(А.Ромащенко)*

Решение. Будем по одному *выбирать* некоторые ряды – столбцы и строки. *Плохой* столбец пересекается со всеми выбранными строками по нулям, *плохая* строка – с всеми выбранными столбцов по единицам. Вначале ничего не выбрано, и вся ряды плохие. Без ограничения общности можно считать, что в таблице единиц не меньше, чем нулей. Тогда выберем строку, где единиц не меньше половины. Количество плохих столбцов уменьшится как минимум вдвое. Если найдется строка, у которой в пересечении с плохими столбцами единиц не меньше, чем нулей, выберем ее. Так продолжаем выбирать, пока возможно. Далее есть 3 варианта.

1) Выбрано менее 10 строк, и плохих столбцов не осталось. Добавляем к выбранным любые строки до 10, остальные вычеркиваем.

2) Выбрано 10 строк. Тогда осталось менее $1000:2^{10}$ плохих столбцов, то есть их не осталось вообще. Вычеркиваем все строки, кроме избранных.

3) Выбрано менее 10 строк, и у каждой строки на пересечении с плохими столбцами нулей больше, чем единиц. Тогда в плохих столбцах и всего нулей больше, чем единиц. Будем выбирать плохие столбцы по тому же принципу: берем столбец, если на его пересечении с плохими строками нулей не меньше, чем единиц. Если в итоге плохие строки закончатся, мы победили. Предположим однако, что плохие строки остались, и на пересечении каждого столбца с ними единиц больше, чем нулей. Но тогда получается противоречие: если считать по строкам, то в клетках, стоящих на пересечении плохих строк с плохими столбцами, больше нулей, а если считать по столбцам, – больше единиц.

2-е решение. Индукцией по $m + n$ докажем более общее утверждение.

Пусть в каждой клетке таблицы, где менее 2^m строк и менее 2^n столцбов, стоит ноль или единица. Тогда можно либо оставить не более m столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один нуль. либо оставить не более n строк так, что каждом столбце будет хотя бы одна единица.

База (таблица 1×1) очевидна. *Шаг индукции*. Пусть в таблице Т нулей не меньше, чем единиц. Тогда есть строка , где нулей меньше половины. Отметим эту строку и оставим только столбцы, где в ней стоят единицы (если таких нет то все доказано). В полученной таблице T_1 стобцов меньше, чем 2^{n-1}, и по предположению индукции в T_1 можно оставить не более m "хороших" столбцов (которые будут такими и для Т) или не более $n - 1$ "хорошей" строки. В последнем случае, вернув этим строкам исходную длину и добавив отмеченную строку, получим "хороший" набор строк для Т.

4.7. [14] Квадрат *ABCD* разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми длинами сторон. Фигура *F* является объединением всех прямоугольников, имеющих общие точки с диагональю *AC*. Докажите, что *AC* делит площадь фигуры *F* пополам. *(В.Произволов)*

Решение. Разобьем квадрат на единичные клетки. Каждый прямоугольник накрывает только целые клетки. Рассмотрим все составленные из клеток прямоугольники нужного размера. Если такой прямоугольник имеет общие точки с *AC*, назовем его *важным*. Ниже показано, как вписать в клетки числа, чтобы для каждого важного прямоугольника сумма вписанных в него чисел была равна разности площадей его частей над *AC* и под *AC*, а для каждого не важного и у квадрата в целом такая сумма равна нулю. Так как дополнение фигуры F разбивается на не важные прямоугольники, то и сумма чисел внутри F будет равна нулю, что равносильно утверждению задачи.

Рассмотрим (клетчатые) диагонали, параллельные AC. Числа в клетках каждой диагонали будут одинаковы. Пусть размер прямоугольника $m\times n$. В клетки диагонали AC впишем нули, в ближайшие $m + n - 1$ диагоналей над ней – единицы, симметрично AC – минус единицы. Теперь для важных прямоугольников сумма какая надо. Рассмотрим ближайшую к AC незаполненную диагональ. Накроем любую ее клетку прямоугольником так, чтобы она была в нем единственной не заполненной. Нетрудно убедиться, что число клеток в его пересечении с заполненной диагональю не зависит ни от выбора незаполненной клетки, ни от положения прямоугольника. Тогда и сумма в заполненных клетках прямоугольника от этого не зависит. Впишем эту сумму с обратным знаком в каждую клетку диагонали и перейдем к заполнению следующей диагонали. Так действуем, пока все клетки не будут заполнены. В симметричных относительно AC клетках, очевидно, стоят противоположные числа, поэтому общая сумма равна нулю. Сумма в каждом не важном прямоугольнике равна нулю, так как в нем последней заполнялась самая дальняя от AC клетка.

В таблице приведен пример заполнения клеток квадрата 12×12 для прямоугольников 3×4:

0	1	1	1	1	1	1	–11	13	1	**–11**	1
–1	0	1	1	1	1	1	1	–11	13	1	–11
–1	–1	0	1	1	1	1	1	1	–11	13	1
–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1	1	–11	13
–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1	1	**–11**
–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1
11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1
–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1
–1	–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1
11	–1	–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1
–1	11	–1	–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0

2-е решение. Разобьем квадрат на единичные клетки. Занумеруем диагонали, параллельные AC, начиная с левого нижнего угла B. Назовем *кирпичами k-го сорта* те прямоугольники разбиения, у которых левая нижняя клетка принадлежит k-й диагонали.

Лемма. Количество кирпичей каждого сорта не зависит от разрезания.

Доказательство. Заметим, что кирпич n-го сорта независимо от своего положения занимает определенное число клеток k-й диагонали (зависящее только от n и k).

Кирпич 1-го сорта один. Пусть для кирпичей первых $k - 1$ сортов утверждение уже доказано. Тогда и количество клеток, занимаемых ими на k-й диагонали, от разбиения не зависит. А число кирпичей k-го сорта равно числу оставшихся на этой диагонали клеток.

Вернемся к задаче. *Под* диагональю AC лежат кирпичи нескольких первых сортов. Значит, их количество не зависит от разбиения. Повернув квадрат на 180°, мы получим новое разбиение с тем же числом кирпичей *под* диагональю AC. Следовательно, в исходном разбиении количество кирпичей *под* диагональю равно количеству кирпичей *над* диагональю. Отсюда, очевидно, следует утверждение задачи.

www.ashap.info