

**34-й Международный математический Турнир городов**  
**2012/13 учебный год**  
**Весенний тур**

**Решения задач подготовлены Л.Медниковым и А.Семёновым  
при участии И.Рубанова и А.Шаповалова**

**Базовый вариант, 8-9 классы**

1. [3] На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)? (*Г. Жуков*)

**Ответ:** не всегда. Контрпример: вершины и середины сторон произвольного треугольника.

2. [4] Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа  $A$  при помощи таких операций можно получить число  $A + 1$ ? (Если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.) (*Е. Бакаев*)

**Ответ:** из любого. **Решение.** Припишем к числу  $A + 1$  слева 8 единиц. Полученное число  $B$  при делении на 9 дает тот же остаток, что и  $A$ , поэтому его можно получить из  $A$  прибавлением девяток. Стерев затем 8 единиц, получим число  $A + 1$ .

3. [4] Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов. (*А. Толыго*)

**Решение.** Упорядочим гири по весу:  $a_1 < a_2 < \dots < a_{11}$ . Заметим, что веса соседних гирь отличаются не меньше, чем на 1, поэтому  $a_n \geq a_m + (n - m)$  при  $m < n$ . По условию  $a_1 + a_2 + \dots + a_6 > a_7 + a_8 + \dots + a_{11} \geq (a_2 + 5) + \dots + (a_6 + 5)$ , откуда  $a_1 > 25$ . Значит,  $a_{11} \geq a_1 + 10 > 35$ .

4. [5] На доске  $8 \times 8$  стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по пол-клетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы. (*Е. Бакаев*)

**Решение.** Ладья  $A$  бьет всего 15 клеток – в своей вертикали и своей горизонтали. Рассмотрим другую клетку  $C$  в этой горизонтали. Ее бьет еще ровно одна ладья  $B$ , находящаяся с ней в одной вертикали. Эта же ладья бьет одну клетку  $D$ , находящуюся с ней в одной вертикали.  $A, B, C, D$  – угловые клетки клетчатого прямоугольника. Если этот прямоугольник – квадрат, ладьям  $A$  и  $B$  достанется по половине от клеток  $C$  и  $D$ . Если же он не квадрат, то одна из клеток  $C$  и  $D$  достанется ладье  $A$ , а другая – ладье  $B$ . Отсюда ясно, что ладье  $A$  всего достанется 8 клеток: та, на которой она стоит, и половина от оставшихся 14 клеток. То же верно для каждой ладьи.

5. [5] В четырёхугольнике  $ABCD$  угол  $B$  равен  $150^\circ$ , угол  $C$  прямой, а стороны  $AB$  и  $CD$  равны. Найдите угол между стороной  $BC$  и прямой, проходящей через середины сторон  $BC$  и  $AD$ . (Н. Стрелкова)

**Ответ:**  $60^\circ$ . **Решение.** Пусть  $M$  – середина  $BC$ ,  $N$  – середина  $AD$ . Построим параллелограмм  $ABMK$  и прямоугольник  $CDLM$ . Тогда  $AKDL$  – тоже параллелограмм (стороны  $AK$  и  $LD$  равны и параллельны). Значит,  $N$  является и серединой диагонали  $KL$ . В треугольнике  $KML$   $\angle KML = \angle KMC - \angle LMC = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ , а  $KM = ML$ , следовательно, он равнобедренный. Поэтому медиана  $MN$  служит и биссектрисой, то есть  $\angle KMN = 30^\circ$ , а  $\angle BMN = \angle 60^\circ$ .

## Базовый вариант, 10-11 классы

1. [3] См. задачу 2 для младших классов.

2. [4] На катетах прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  вовне построили квадраты  $ACKL$  и  $BCMN$ . Пусть  $CE$  – высота, опущенная на гипотенузу  $AB$ . Докажите, что угол  $LEM$  прямой. (И. Рудаков)

**Решение.** Из очевидного подобия треугольников  $AEC$  и  $ACB$   $\frac{CE}{EA} = \frac{CB}{CA} = \frac{CM}{AL}$ .

Поэтому при повороте на  $90^\circ$  и последующей гомотетии с центром  $E$  и коэффициентом  $\frac{CE}{CA}$  отрезок  $EA$  переходит в  $EC$ , прямая  $AL$  в прямую  $CM$ . Значит, отрезок  $AL$  переходит в  $CM$ , а  $EL$  – в  $EM$ . Следовательно, угол  $LEM$  – прямой.

3. [4] См. задачу 4 для младших классов.

4. [4] Имеются 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому приклеена этикетка с указанием его веса. Хулиган Гриша хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках из этого набора. Всегда ли он может это сделать? (Г. Гальперин)

**Ответ:** всегда. **Решение.** Упорядочим камни по возрастанию весов. Затем переклеим этикетки “по кругу” на 1-й камень – этикетку с 2-го, на 2-й – с 3-го, ..., на 100-й с 1-го. Теперь на каждом камне, кроме первого, указан *большший* вес. Если в набор  $A$  камней 1-й камень не входит, то сумма весов, указанных на его этикетках, больше веса набора  $A$ . Если же 1-й камень в набор  $A$  входит, то сумма весов на его этикетках меньше веса набора  $A$ , поскольку вес дополнительного набора  $B$  (составленного из всех камней, не входящих в  $A$ ) больше суммы весов на этикетках из  $B$ .

5. [5] Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни – целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получился трехчлен, не имеющий действительных корней. (Г. Жуков)

Каждому сносному трехчлену  $x^2 + px + q$  с  $p \neq 0$  соответствует *парный* сносный трехчлен  $x^2 - px + q$ . Их сумма равна  $2x^2 + 2q$ . Отсюда видно, что сумма *всех* сносных трехчленов имеет вид  $Ax^2 + C$ . Поэтому достаточно проверить, что сумма  $C$  всех *свободных членов* сносных трехчленов положительна. Посмотрим, какой вклад в  $C$  вносят разные группы сносных трехчленов.

Для каждой пары  $(a, b)$  целых чисел, где  $0 \leq a \leq b \leq 2013$ ,  $ab \leq 2013$ , рассмотрим все сносные трехчлены с корнями, по модулю равными  $a$  и  $b$ . Рассмотрим несколько случаев.

0)  $a = 0$ . У таких трехчленов свободный член равен нулю.

1)  $a = 1, b = 2013$ . Соответствующих сносных трехчленов два:  $x^2 \pm 2012x - 2013$ ; их вклад в  $C$  равен  $-4026$ .

2)  $a = 1 < b < 2013$ . Соответствующих трехчленов четыре:  $x^2 \pm (b + 1)x + b$ ,  $x^2 \pm (b - 1)x - b$ ; их вклад равен 0.

2)  $1 < a < b \leq 2013$ . Тогда  $a < b < 2013/2$ , значит,  $a + b < 2013$ . Поэтому соответствующих трехчленов также четыре; как и в случае 2) их вклад равен 0.

3)  $1 \leq a = b, a^2 < 2013$ . Соответствующих трехчленов три:  $x^2 \pm 2a + a^2, x^2 - a^2$ ; их вклад в  $C$  составляет  $a^2$ .

Итак,  $C = 1^2 + 2^2 + \dots + 44^2 - 4026 > 0$ .

## Сложный вариант Младшие классы

1. [4] На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них – натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске? (*Г. Жуков*)

**Ответ. 2. Решение.** Пусть  $a$  – наибольшее из чисел на доске. Оно находится между какими-то степенями двойки:  $2^n \leq a < 2^{n+1}$ . Прибавив к  $a$  какое-нибудь другое из написанных чисел  $b$ , получим степень двойки  $a + b$ , для которой  $2^n < a + b \leq 2a < 2^{n+2}$ . Значит,  $a + b = 2^{n+1}$ . Итак, все остальные числа равны  $2^{n+1} - a$ , то есть различных среди написанных чисел не более двух. А два числа могут быть, например, 1 и 3.

2. [4] Двадцать детей – десять мальчиков и десять девочек – встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка – сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками. (*Е. Бакаев*)

**Первое решение.** Мальчик, стоящий на  $k$ -м месте слева назовет число  $20 - k$ , поэтому сумма чисел, названных мальчиками, равна  $200 - S_m$ , где  $S_m$  – сумма их мест. Девочка, стоящая на  $n$ -м месте слева назовет число  $n - 1$ , поэтому сумма чисел, названных девочками, равна  $S_d - 10$ , где  $S_d$  – сумма мест девочек. Осталось проверить, что  $200 - S_m = S_d - 10$ . Но это действительно так, поскольку  $S_m + S_d = 1 + 2 + \dots + 20 = 210$ .

**Второе решение.** Поменяем местами соседних мальчика и девочку. При этом указанные суммы одновременно либо увеличатся на 1, либо уменьшатся на 1. Действуя таким образом, мы можем получить любую расстановку детей. А в каждой расстановке, где мальчики стоят симметрично девочкам относительно центра, равенство указанных сумм очевидно.

3. [5] Можно ли в клетках таблицы  $19 \times 19$  отметить несколько клеток так, чтобы во всех квадратах  $10 \times 10$  было разное количество отмеченных клеток? (*Е. Бакаев*)

**Ответ. Можно. Решение.** Отметим все клетки верхних девяти полос, а в центральной полосе отметим центральную клетку и все клетки слева от нее. Тогда в десяти самых нижних квадратах  $10 \times 10$  будет отмечено от 1 до 10 клеток. Сдвигая квадрат на одну полосу вверх, мы выкидываем из него полосу неотмеченных клеток и добавляем полосу отмеченных клеток, увеличивая количество отмеченных клеток в нем на 10. Следовательно, в следующих снизу квадратах будет отмечено от 11 до 20 клеток, ..., а в самых верхних – от 91 до 100 клеток.

**Замечание.** Центральную клетку можно и не отмечать, тогда количество отмеченных в квадратах  $10 \times 10$  клеток будет меняться от 0 до 99.

4. [5] По кругу расставили 1000 ненулевых чисел и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел. Чему может быть равна сумма всех 1000 чисел? (Б. Френкин)

**Ответ.** 375. **Первое решение.** Пусть  $a, b, c, d, e$  – пять идущих подряд чисел, где  $a$  – черное. По условию  $b = ac$ ,  $d = ce$ ,  $c = b + d = ac + ce = c(a + e)$ .  $c \neq 0$ , поэтому  $a + e = 1$ . Таким образом, сумма двух черных чисел, идущих в последовательности черных чисел через одно, равна 1. Поскольку 500 черных чисел можно разбить на 250 таких пар, сумма всех черных чисел равна 250. Осталось заметить, что сумма всех черных чисел вдвое больше суммы всех белых.

**Второе решение.** Возьмем черное число  $a$  и рядом с ним белое число  $ab$ . По этим числам следующие шесть восстанавливаются однозначно:  $b, b - ab, 1 - a, (1 - a)(1 - b), 1 - b, a(1 - b)$ . Сумма этих 8 чисел равна 3. Имеющиеся 1000 чисел разбиваются на 125 таких восьмерок, отсюда ответ.

**Замечание.** Следующими числами в выписанной строчке будут черное  $a$  и белое  $ab$ , поэтому числа по кругу повторяются с периодом 8.

5. [6] Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты – целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено ровно два узла. Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон. (А. Полянский)

**Первое решение. Лемма.** Пусть точки  $X, Y$  принадлежат треугольнику  $ABC$ , но не совпадают с его вершинами, и отрезок  $XY$  не параллелен ни одной из сторон треугольника. Тогда от одной из вершин треугольника  $ABC$  можно отложить отрезок, равный и параллельный  $XY$ , так, что второй его конец окажется внутри треугольника.

**Доказательство.** Проведем через вершины треугольника  $ABC$  прямые, параллельные  $XY$ . Одна из этих прямых лежит между двумя другими. Если, например, эта прямая проходит через вершину  $A$ , то она пересечет сторону  $BC$  в некоторой точке  $D$ , и разобьет  $ABC$  на треугольники  $ABD$  и  $ACD$ . Отрезок  $XY$  лежит в одном из них, и параллелен стороне  $AD$ , поэтому он короче  $AD$ . Значит, если отложить от точки  $A$  внутрь треугольника отрезок  $AZ$ , параллельный и равный  $XY$ , его конец  $Z$  окажется внутри треугольника  $ABC$ .

Вернемся к задаче. Пусть  $X$  и  $Y$  – два узла внутри треугольника  $ABC$ . Если прямая  $XY$  параллельна одной из сторон треугольника, все в порядке. В противном случае, точка  $Z$ , построенная согласно лемме, также является узлом. По условию она совпадает с одной из точек  $X$  или  $Y$ . Но тогда точки  $X$  и  $Y$  лежат на прямой, проходящей через соответствующую вершину треугольника.

**Второе решение (для знатоков).** Если прямая  $XY$  не проходит через вершины треугольника  $ABC$ , то она *не пересекает* одну из его сторон, например,  $BC$ . Тогда по формуле Пика площади треугольников  $XBC$  и  $YBC$  равны. Значит, в них равны высоты, опущенные на  $BC$ , то есть прямая  $XY$  параллельна  $BC$ .

6. [8] Пусть  $I$  – центр вписанной окружности прямоугольного треугольника  $ABC$ , касающейся катетов  $AC$  и  $BC$  в точках  $B_0$  и  $A_0$  соответственно. Перпендикуляр, опущенный из  $A_0$  на прямую  $AI$ , и перпендикуляр, опущенный из  $B_0$  на прямую  $BI$ , пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что прямые  $CP$  и  $AB$  перпендикулярны. (Д. Швецов)

**Решение.** Пусть  $\angle IAC = \alpha$ ,  $\angle IBC = \beta$ . Очевидно,  $\alpha + \beta = 45^\circ$  и  $IA_0CB_0$  – квадрат.  $\angle PA_0C = \angle IAC = \alpha$  как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Аналогично,  $\angle PB_0C = \beta$ . Из треугольника  $A_0B_0P$  находим, что  $\angle A_0PB_0 = 180^\circ - (\alpha + 45^\circ) - (\beta + 45^\circ) = 45^\circ$ . Рассмотрим окружность  $\Omega$  с центром  $C$  и

радиусом  $CA_0$ . Вписанные углы, опирающиеся на дугу  $A_0B_0$  этой окружности равны  $45^\circ$ , следовательно, точка  $P$  лежит на  $\Omega$ . Поэтому  $\angle PCB_0 = 2\angle PA_0B_0 = 2\alpha + 90^\circ$ , а смежный угол составляет  $90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - \angle CAB$ . Это и значит, что  $CP \perp AB$ .

7. [9] В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитариев состоит из  $n$  человек, команда математиков – из  $m$ , причем  $m \neq n$ , а стол для игры всего один. Поэтому было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд играют между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры тот, кто стоит первым в очереди, заменяет за столом члена своей команды и играет с оставшимся за столом. А человек, которого заменили, становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием. (А. Бердников, И. Митрофанов)

**Решение.** Пронумеруем отдельно гуманитариев и отдельно математиков в порядке, определенном исходной очередью (в первой партии играют  $M_1$  и  $\Gamma_1$ ). Заметим, что математики (гуманитарии) отдельно (считая того, кто за столом) всегда находятся в очереди в том же циклическом порядке: никто друг друга не обгоняет. Математик может сметиться в очереди относительно гуманитария, но только за столом: например, математик  $M$  может выйти к столу *раньше* гуманитария  $\Gamma$ , а выйти из-за стола *позже* него.

Разобьем все игры на *циклы* по  $m + n - 2$  игры. За время первого цикла из-за стола выйдут  $m + n - 2$  игрока, то есть все стоящие в очереди, кроме  $M_m$  и  $\Gamma_n$ . Значит, они стоят за столом в начале второго цикла. По тем же соображениям в начале третьего цикла за столом стоят  $M_{m-1}$  и  $\Gamma_{n-1}$ , и т. д.: с каждым циклом номера играющих в его первой партии смещаются «по кругу» на 1. Поэтому каждый математик за  $m$  циклов *выйдет из-за стола* ровно  $m - 1$  раз, а за  $mn$  циклов –  $n(m - 1)$ . Аналогично, каждый гуманитарий за  $mn$  циклов *выйдет из-за стола* ровно  $m(n - 1)$  раз.

Пусть, например,  $m > n$ . Тогда  $n(m - 1) - m(n - 1) = m - n \geq 1$ . Рассмотрим произвольных математика  $M$  и гуманитария  $\Gamma$ . Как показано выше, за  $2mn$  циклов  $M$  выходил из-за стола по крайней мере на 2 раза больше, чем  $\Gamma$ . Отсюда следует, что между какими двумя «выходами»  $M$  у  $\Gamma$  выходов из-за стола не было. Допустим,  $\Gamma$  ни разу не сыграл с  $M$ . Тогда  $\Gamma$  между этими выходами  $M$  оставался в очереди. Но после первого выхода он был впереди  $M$ , а когда  $M$  снова дошел до стола – позади него. Противоречие, так как  $\Gamma$  не мог обогнать  $M$  в очереди.

**Замечания. 1.** На самом деле каждая пара противников сыграет между собой уже за  $mn$  циклов. Действительно, если  $m$  и  $n$  взаимно просты, то, как видно из вышеизложенного, они встретятся за столом в первой партии одного из циклов. В противном случае  $|m - n| \geq 2$ , и конец доказательства проходит уже для  $mn$  циклов.

**2.** При  $n = m > 2$  утверждение неверно. Например, если математики будут чередоваться с гуманитариями, то каждый всегда будет играть только со своими соседями по кругу, порядок в котором меняться не будет.

## Сложный вариант, 10-11 классы

1. [3] См. задачу 1 для младших классов.

2. [4] На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. Затем по одному пришли еще 20 детей, и каждый садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. В итоге оказалось, что мальчики и девочки на скамейке чередуются. Можно ли наверняка сказать, сколько отважных среди детей на скамейке? (Е. Бакаев)

**Ответ.** Можно. **Решение.** Группы мальчиков чередуются с группами девочек. Изначально было две группы. Когда садился неотважный ребенок, то он подсаживался к группе, и количество групп не менялось. Когда садился отважный ребенок, он разбивал группу другого пола на две и составлял новую группу из самого себя, увеличивая общее количество групп на 2.

В конце оказалось 22 группы. Значит, отважных ребят было  $(22 - 2):2 = 10$ .

3. [6] Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты – целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два каких-то узла внутри треугольника, которая либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон. (А. Полянский)

**Решение.** Обозначим через  $A_1, B_1, C_1$  соответственно середины сторон  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . Возьмем два произвольных узла  $X$  и  $Y$  внутри треугольника. Пусть один из них лежит вне треугольника  $A_1B_1C_1$ , например,  $X$  лежит внутри треугольника  $AB_1C_1$ . Построим отрезок  $AW$ , серединой которого является точка  $X$ . Тогда  $W$  – также узел, он находится внутри  $ABC$ , и прямая  $XW$  проходит через  $A$ .

Пусть теперь оба узла  $X$  и  $Y$  принадлежат треугольнику  $A_1B_1C_1$ . Если прямая  $XY$  параллельна одной из сторон треугольника, все в порядке. В противном случае применим лемму из решения задачи 5 для младших классов к треугольнику  $A_1B_1C_1$ . Пусть, например, конец  $Z_1$  отрезка  $A_1Z_1$ , равного и параллельного  $XY$ , лежит внутри треугольника  $A_1B_1C_1$ . Тогда отрезок  $AZ$ , симметричный  $A_1Z_1$  относительно середины  $B_1C_1$ , также равен и параллелен  $XY$ . Поэтому  $Z$  – узел, лежащий внутри  $AB_1C_1$ . Как показано выше, на прямой  $AZ$  есть еще один узел.

4. [6] Числа 1, 2, ..., 100 стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50?

(А. Шаповалов)

**Ответ.** Не может. **Решение.** Предположим, условия выполнены. Назовем числа от 26 до 75 *средними*, а остальные – *крайними*. Два крайних числа подряд идти не могут (модуль их разности меньше 25 или больше 50). Но крайние числа составляют ровно половину общего количества чисел. Поэтому средние и крайние числа должны чередоваться. Но рядом со средним числом 26 может стоять только одно крайнее число – 76. Противоречие.

5. [7] На бесцветной плоскости покрасили три произвольные точки: одну – в красный цвет, другую – в синий, третью – в желтый. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки двух из этих цветов и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке “красный, синий, желтый” (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может иметь одновременно несколько цветов). Докажите, что сколько бы ходов ни было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой. (Е. Бакаев)

**Решение.** Слово «поворот» везде означает «поворот на  $60^\circ$  по часовой стрелке». Обозначим данные точки  $K$ ,  $C$  и  $G$ . Построим точку  $K'$  по точкам  $C$  и  $G$ , и точку  $C'$  по  $G$  и  $K$ . Тогда при повороте вокруг  $G$  отрезок  $K'K$  переходит в  $CC'$ . (Если хоть один из этих отрезков вырождается в точку, то  $KCG$  – правильный треугольник и его вершины указаны по часовой стрелке, тогда новых точек вообще не появляется.) Итак, прямая  $KK'$  переходит в  $CC'$  при повороте вокруг их общей точки  $O$ . Назовем первую прямую *красной*, вторую – *синей*, а прямую, которая получается поворотом синей вокруг  $O$ , – *желтой*. Заметим, что при повороте вокруг любой точки  $K_1$  на красной прямой синяя прямая переходит в желтую, так как расстояния от  $K_1$  до них одинаковые. Поэтому при построении точки  $G_1$  по произвольной точке  $C_1$ , лежащей на синей прямой, и точке  $K_1$  мы попадаем на желтую прямую. Поскольку  $G$  получается из  $C$  поворотом вокруг  $K'$ , то и  $G$  лежит на желтой прямой. Аналогично доказывается, что и для других пар цветов вновь окрашиваемая точка лежит на прямой своего цвета.

6. Даны пять различных положительных чисел, сумма квадратов которых равна сумме всех десяти их попарных произведений.

а) [4] Докажите, что среди пяти данных чисел найдутся три, которые не могут быть длинами сторон одного треугольника.

б) [5] Докажите, что таких троек найдется не менее шести (тройки, отличающиеся только порядком чисел, считаем одинаковыми). (И. Богданов)

**Решение.** Расположим числа в порядке возрастания:  $a < b < c < d < e$ .

а) Пусть это не так, тогда  $a + b > e$ . Следовательно,  
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 < ab + bc + cd + de + (a + b)e$ . Противоречие.

б) Рассмотрим несколько случаев.

1)  $b + c \leq d$ . Тогда каждая из шести троек, где два числа взяты из набора  $\{a, b, c\}$ , а третье – из набора  $\{d, e\}$ , не образует треугольник.

2)  $c + d \leq e$ . Тогда каждая из шести троек, содержащих  $e$ , не образует треугольник.

3)  $b + d \leq e$  и  $a + b \leq d$ . Тогда каждая из троек  $\{a, b, d\}$ ,  $\{a, b, e\}$ ,  $\{a, c, e\}$ ,  $\{a, d, e\}$ ,  $\{b, c, e\}$ ,  $\{b, d, e\}$  не образует треугольник.

Пусть все три разобранных варианта не выполнены, то есть  $b + c > d$ ,  $c + d > e$  и верно одно из неравенств  $b + d > e$  или  $a + b > d$ . Покажем, что оба эти случая невозможны.

4)  $b + c > d$ ,  $b + d > e$ . Тогда  
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 < ab + bc + ce + (b + c)d + (b + d)e$ . Противоречие.

5)  $c + d > e$ ,  $a + b > d$ . Тогда  
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 < ab + bc + cd + (a + b)d + (c + d)e$ . Противоречие.

**Замечание.** Более шести “плохих” троек гарантировать нельзя. Возьмем  $a, b, c, d$  близкими к 1, тогда  $e$  найдется из квадратного уравнения (его свободный член близок к – 2, поэтому оно имеет положительный корень). При этом каждая тройка чисел из набора  $\{a, b, c, d\}$  – хорошая.



7. Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста – число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать.

а) [5] Могут ли они гарантировать результат более 500?

б) [7] Могут ли они гарантировать результат не менее 999?

(А. Шаповалов, К. Кноп)

**Ответ.** Могут (в обоих случаях).

**Решение.** а) Пусть задний мудрец назовет остаток от деления на 1001 суммы чисел, которые он видит (называя 1001, если остаток 0). Тогда следующий может вычислить свое число, отняв от названного сумму того, что видит. Так продолжается, пока чье-то вычисленное число не совпадет с тем, что назвал задний. Тогда этот *неудачник* вместо своего числа назовет число самого переднего мудреца. По договоренности остальные поймут, что он имел в виду число заднего, и будут далее действовать исходя из этого. В итоге ответят правильно все мудрецы, кроме, возможно, заднего, неудачника и переднего.

б) Пусть спрятанный колпак лежит за спиной заднего мудреца. Тогда номера колпаков образуют перестановку. Задний не видит двух номеров, и для них есть два варианта расположения. В одном из вариантов перестановка четная (а в другом – нет). В соответствии с этим вариантом задний свой номер и называет (ошибаясь с вероятностью 50%). В полученной четной перестановке второй сзади не знает расположения только двух номеров: своего и того, который, по мнению первого, лежит позади. Есть два варианта расположения неизвестных номеров, и лишь в одном из них перестановка четна. В соответствии с этим второй правильно вычисляет свой номер. Точно так же все остальные последовательно вычисляют свои номера. В результате правильно ответят все, кроме, быть может, заднего.

<http://www.ashap.info/Turniry/TG/index.html>