35-й Международный математический Турнир городов

2013/14 учебный год

Решения задач

Авторы решений: *И. Рубанов, А. Семёнов, А. Шаповалов, Л. Медников*

Осенний тур

Базовый вариант, младшие классы

1. [3] В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?

Ответ. Один. **Решение**. Самый сильный обязательно станет призёром. Покажем что может быть ровно один призёр. Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В первом туре проведём поединки 1 – 2, 3 – 4, …, 99 – 100, во втором – 100 – 1, 2 – 3, …, 98 – 99. Тогда каждый, кроме самого сильного, в одном из туров проиграет.

2. [4] Найдется ли такое десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырёхзначное число?

Ответ. Найдется. **Решение**. Таково, например, число 1397245680. В самом деле, если не вычеркнута хотя бы одна из последних шести цифр, то оставшееся четырёхзначное число чётно или делится на 5, а если все они вычеркнуты, то осталось число 1379, кратное 11.

Другой пример: 1379245680, поскольку 1379 кратно 11.

3. [4] Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b). Пусть натуральное число n таково, что $(n, n + 1) < (n, n + 2) < \ldots < (n, n + 35)$. Докажите, что $(n, n + 35) < (n, n + 36)$.

Решение. Заметим, что $(n, n + k) = (n, k) \le k$, то есть $(n, n + 1) \le 1$, $(n, n + 2) \le 2, \ldots,$ $(n, n + 35) \le 35$. Поэтому неравенства из условия задачи могут выполняться тогда и только тогда, когда $(n, n + 1) = 1$, $(n, n + 2) = 2, \ldots,$ $(n, n + 35) = 35$. Но тогда $(n, n + 4) = 4$, $(n, n + 9) = 9$, то есть n делится на $4\cdot 9 = 36$, откуда $(n, n + 36) = 36 > 35 = (n, n + 35)$.

4. [5] На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки K и L так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60°$. Докажите, что $KL = BC$.

Решение. Построим параллелограмм $BCLM$. Треугольники AKL и BMK равны: $BM = LC = AK$, $BK = AL$, $\angle KBM = 180° - 2\angle B = \angle A$. Значит, в треугольнике LKM $KL = KM$, а $\angle LKM = \angle BKM + \angle LKB = \angle ALK + \angle LKB = 60°$. Следовательно, этот треугольник – равносторонний, и $KL = ML = BC$.

5. [6] На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются «одновременно», то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)

Решение. Ладью из первой строки переставим во вторую строку, из второй – в первую. Аналогично обойдёмся с ладьями из третьей и четвёртой, пятой и шестой, седьмой и восьмой строк. Ладью из первого столбца переставим во третий, из третьего – в первый. Аналогично обойдёмся с ладьями из второго и четвёртого, пятого и седьмого, шестого и восьмого столбцов. Тогда каждая ладья будет переставлена ходом коня, и в каждых строке и столбце будет по ладье, так что они не будут бить друг друга.

Базовый вариант, старшие классы

1. [3] См. задачу 2 младших классов.

2. [4] На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника: YBA и ZAC – во внешнюю сторону, а XBC – внутрь (соответственные вершины перечисляются в одинаковом порядке). Докажите, что $AYXZ$ – параллелограмм.

Решение. Поскольку треугольники XBC и ZAC подобны, $CX:CZ = CB:CA$. Кроме того, $\angle XCZ = \angle BCA - \angle BCX + \angle ACZ = \angle BCA$. Поэтому треугольник XCZ подобен треугольнику BCA, откуда $CX:XZ = CB:BA$. А из подобия треугольников XBC и YBA следует, что
$CX:YA = CB:BA$. Таким образом, $CX:YA = CB:BA = CX:XZ$, откуда $YA = XZ$. Аналогично доказывается, что $YX = AZ$. Итак, у четырёхугольника $YXZA$ противоположные стороны попарно равны, то есть он – параллелограмм.

3. [4] Наименьшее общее кратное натуральных чисел a, b будем обозначать $[a, b]$. Пусть натуральное число n таково, что $[n, n + 1] > [n, n + 2] > \ldots > [n, n + 35]$. Докажите, что $[n, n + 35] > [n, n + 36]$.

Решение. Заметим, что

$(n, n + k) = \dfrac{n(n+k)}{[n,n+k]} < \dfrac{n(n+k)}{[n,n+k+1]} < \dfrac{n(n+k+1)}{[n,n+k+1]} = (n, n + k + 1)$ при $1 \le k \le 34$. Поэтому согласно задаче 3 младших классов $(n, n + 35) < (n, n + 36)$. Следовательно,

$[n, n + 35] = \dfrac{n(n+35)}{(n,n+35)} < \dfrac{n(n+36)}{(n,n+36)} = [n, n + 36]$.

4. [5] См. задачу 5 младших классов.

5. [6] Космический аппарат сел на неподвижный астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат проехал по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Всё это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там точно определили трёхмерную траекторию аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ездил аппарат?

Ответ. Может. **Решение**. Рассмотрим куб и сферу, касающуюся всех его рёбер. Пересечением её с поверхностью куба будет объединение шести окружностей, вписанных в грани куба. По такой фигуре можно от каждой её точки добраться до любой другой, в том числе из точки в диаметрально противоположную точку. Если аппарат пройдёт по такой траектории, невозможно будет определить, имеет астероид форму шара или форму куба.

Сложный вариант, младшие классы

1. [5] Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

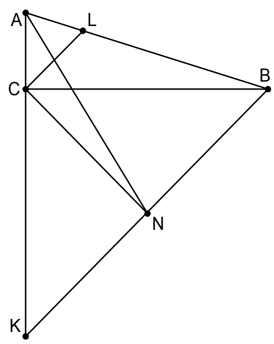
Решение. Пусть к, ж, з – длины самых коротких палочек соответствующего цвета, а К, Ж, З – самых длинных. По условию к + ж > З, ж + з > К, з + к > Ж. Сложение этих неравенств дает 2к + 2ж + 2з > К + Ж + З. Следовательно, удвоенная длина самой короткой палочки какого-то цвета будет длиннее самой длинной палочки этого же цвета. Значит, сумма длин любых двух палочек этого цвета будет больше длины любой палочки этого цвета, что и требовалось.

2. [5] Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

Первое решение. Пусть первый мальчик из первой четверки чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ составит сумму $n(n + 1) + (n + 2)(n + 3) = 2n^2 + 6n + 6$, а второй – $n(n + 3) + (n + 1)(n + 2) = 2n^2 + 6n + 2$. Тогда на первой четвёрке чисел первый мальчик наберет сумму на 4 больше, чем второй, вне зависимости от n. Со второй четвёркой чисел они поступят наоборот, сравняв общую сумму. Затем добавят к ней произведение оставшихся двух чисел и победят.

Второе решение. Пусть из первых шести чисел первый мальчик составит сумму $n(n + 5) + (n + 1)(n + 3) + (n + 2)(n + 4)$, а второй – $n(n + 4) + (n + 1)(n + 5) + (n + 2)(n + 3)$. Обе эти суммы равны $3n^2 + 15n + 11$. Оставшиеся числа мальчики могут одинаково разбить на пары.

3. [6] В треугольнике ABC угол C – прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N – середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.



Решение. Продлим отрезок BN до пересечения с прямой AC в точке K. В треугольнике BCK высота CN является и биссектрисой, поэтому $KN = NB$. Углы BCL и CBK равны 45°, поэтому биссектриса CL параллельна BK. Значит, в треугольнике ABK медиана AN делит пополам и CL.

4. [7] Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка – белого или чёрного?

Ответ. За два вопроса. **Решение**. Чтобы определить цвет точки за один вопрос, нужна ломаная, по отношению к которой все квадратики одного цвета лежат внутри, а другого – снаружи. Но тогда она содержит все отрезки, разделяющие соседние клетки, и значит, самопересекается.

Покажем, как отгадать за два вопроса. Построим ломаную, внутрь которой попадут из квадрата все нечётные горизонтали и только они. Это можно сделать, соединив первую и третью горизонтальные линии решетки за пределами квадрата справа, третью и пятую – слева, и т.д. Тогда первым вопросом мы узнаем чётность горизонтали, содержащей загаданную точку. Аналогичным вторым вопросов узнаем чётность содержащей ее вертикали. Осталось заметить, что цвет клетки определяется чётностью суммы её “координат”.

5. [9] В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение).

Решение. Проведём все большие диагонали A_1A_{51}, A_2A_{52}, … 101-угольника $A_1A_2...A_{101}$ (мы считаем, что $A_{102} = A_1$, $A_{103} = A_2$, …). Получится звезда со 101 ребром. Окрасим диагональ A_kA_{k+50} в синий цвет, если дуга $A_kA_{k+1}A_{k+50}$ меньше половины окружности (то есть угол, на неё опирающийся, – острый), и в красный цвет в противном случае. Обойдём звезду по рёбрам. Заметим, что два красных ребра не могут идти подряд, так как сумма ста подряд идущих дуг, соответствующих сторонам 101-угольника, меньше полной окружности. Чередоваться цвета не могут из-за нечётности числа 101. Значит, где-то две синие диагонали идут подряд. Пусть это, например, диагонали $A_{52}A_1$ и A_1A_{51}. Тогда в треугольнике $A_{52}A_1A_{51}$ углы $A_1A_{52}A_{51}$ и $A_1A_{51}A_{52}$ – острые, следовательно высота, опущенная из вершины A_1, попадает на сторону $A_{52}A_{51}$.

6. [10] Число $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если $3n + 1$ – простое число, то числитель получившейся дроби делится на $3n + 1$.

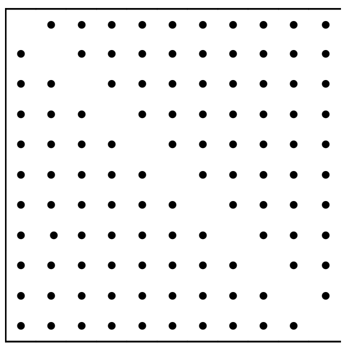
Решение. Добавим к нашей сумме S сумму $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}\right)$ и вычтем равную сумму $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$. Тогда

$$S = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n} - \left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

Если $3n + 1$ – простое, то n чётно, и мы можем сгруппировать слагаемые парами: первое с последним, второе с предпоследним и т.д. После приведения к общему знаменателю каждой пары все числители станут равными $3n + 1$. Значит, числитель суммы всех этих дробей делится на простое число $3n + 1$, а знаменатель, очевидно, не делится.

7. [12] Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Ответ. Вася. **Решение**. Расположим камни как показано на рисунке, где кучи соответствуют столбцам. Петя должен брать несколько камней из одного столбца, а Вася – из разных. Стратегия Васи – делать ходы, симметричные Петиным относительно пустой диагонали. Изначально картинка симметрична. Поскольку строка, симметричная столбцу, не имеет с ним общих камней, то Вася каждый раз сможет восстанавливать нарушенную симметрию, то есть у него всегда есть ход. Так как игра конечна, то когда-то Петя проиграет.



Сложный вариант, старшие классы

1. [5] См. задачу 4 младших классов.

2. [6] Найдите все n, для которых верно утверждение: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^l, где $0 \le k, l \le n$, что графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^l$ не будут иметь общих точек.

Ответ. $n = 1$ и все неотрицательные чётные n. **Решение**. Графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^l$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда многочлен $P(x) + ax^k - Q(x) - bx^l$ не имеет корней. Иными словами, надо у многочлена $R(x) = P(x) - Q(x)$ так изменить не больше двух коэффициентов, чтобы у получившегося многочлена не было корней.

Если $n \le 1$, то любой из любого многочлена R мы можем сделать многочлен, тождественно равный 1.

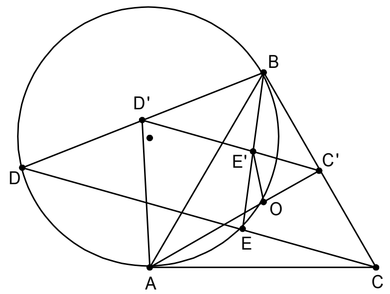
Пусть $n > 1$. Если n нечётно, то нам «случайно» может достаться многочлен $R(x) = x^n + x$.

Тогда, с одной стороны, надо "убить" x^n, так как многочлен нечётной степени всегда имеет корень, а с другой – добавить ненулевую константу a, чтобы не было нулевого корня. Но полученный многочлен $x + a$ имеет корень.

Если n чётно, то, добавив, если надо, одночлен степени n, превратим R в многочлен чётной степени с положительным старшим коэффициентом. Такой многочлен имеет наименьшее значение M. Добавив константу $1 - M$, получим положительный многочлен.

3. [6] Дан правильный треугольник ABC с центром O. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает описанную окружность треугольника AOB в точках D и E. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BD, BE лежат на одной окружности.

Решение. Пусть C' – середина BC, а E лежит между C и D. Тогда точка E' лежит на средней линии $C'D'$ треугольника CBD. В правильном треугольнике ABC вершина A, центр O и точка C' также лежат на одной прямой. Угол ABC равен половине дуги AOB, поэтому BC – касательная. Тогда $C'E' \cdot C'D' = {}^1/_4\, CE \cdot CD = {}^1/_4\, CB^2 = {}^1/_4\, C'B^2 = C'O \cdot C'A$. Отсюда по теореме, обратной к теореме о произведении отрезков секущих, и следует вписанность четырёхугольника $AOE'D'$.



4. [7] Каждое ли целое число можно записать как сумму кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

Ответ. Каждое. **Решение**. Заметим, что $(n + 7)^3 - (n + 6)^3 - (n + 5)^3 + (n + 4)^3 - (n + 3)^3 + (n + 2)^3 + (n + 1)^3 - n^3 = 48$. С другой стороны, число $(48k + 1)^3$ при любом k даёт при делении на 48 остаток 1. Складывая такие кубы, мы можем получить сумму с любым наперёд заданным остатком от деления на 48, а потом, прибавляя или вычитая нужное количество раз комбинацию, равную 48, получить любое число с таким остатком.

5. Существуют ли такие две функции f и g, принимающие только целые значения, что для любого целого x выполнены соотношения:

а) [3] $f(f(x)) = x$, $g(g(x)) = x$, $f(g(x)) > x$, $g(f(x)) > x$?

б) [5] $f(f(x)) < x$, $g(g(x)) < x$, $f(g(x)) > x$, $g(f(x)) > x$?

а) **Ответ**. Не существуют. **Решение**. $f(x) = f(g(g(x)) > g(x)$. Но точно также доказывается, что $g(x) > f(x)$. Противоречие.

б) **Ответ**. Существуют. **Решение**. Достаточно задать значения функций только в целых числах: для остальных значений их можно определить произвольно.

Первый способ. Назовем чётные числа “своими”, а нечётные – “чужими” для функции f, а для g – всё наоборот. Пусть эти функции своё число x переводят в $-|x|-2$, а чужое – в $|x|+1$. Заметим, что каждая функция каждое число переводит в своё. Проверим два неравенства, где внутренняя функция – f. Ясно, что $|f(x)| > |x|$. Поэтому $f(f(x)) = -|f(x)| - 2 < -|x| - 2 < x$, а $g(f(x)) = |f(x)| + 1 > |x| + 1 > x$. Оставшиеся два неравенства проверяются аналогично.

Второй способ. Занумеруем все целые числа натуральными (например, так: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = -2$ и т.д.). Будем строить значения $f(x_n)$, $g(x_n)$ по индукции; причём все они будут различны. Обозначим $V_n = \{f(x_1), \dots f(x_n), g(x_1), \dots, g(x_n)\}$.

База. $f(x_1)$ и $g(x_1)$ – произвольные различные целые числа.

Шаг индукции. Пусть все элементы V_n уже построены. Если $x_{n+1} \notin V_n$, то в качестве $f(x_{n+1})$ и $g(x_{n+1})$ возьмём произвольные различные целые числа, не входящие в V_n.

Если же $x_{n+1} \in V_n$, то $x_{n+1} = f(x_i)$ или $x_{n+1} = g(x_i)$, где $i \le n$. В первом случае в качестве $f(x_{n+1})$ возьмём целое число, меньшее x_i и не входящее в V_n, а в качестве $g(x_{n+1})$ – целое число, большее x_i и не входящее в V_n. Тогда $f(f(x_i)) < x_i$, $g(f(x_i)) > x_i$. Во втором случае поступим наоборот, обеспечив неравенства $g(g(x_i)) < x_i$, $f(g(x_i)) > x_i$.

В результате все значения функций будут построены и все неравенства будут выполнены.

6. [9] См. задачу 7 младших классов.

7. [14] На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причём через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и звеньев с общим отрезком.)

Ответ. Не может. **Решение**. Ломаная разбивает плоскость на части. Как известно, эти части можно покрасить в чёрный и белый цвета так, чтобы части одинакового цвета не имели общих отрезков границы. Пусть бесконечная часть белая. Расставим на сторонах частей стрелки так, чтобы все чёрные части обходились против часовой стрелки. Выберем произвольную точку O, не лежащую ни на звеньях ломаной, ни на их продолжениях. Для каждой ориентированной стороны AB сосчитаем ориентированную площадь треугольника OAB и сложим все такие площади. Сумма по каждому чёрному многоугольнику даст его площадь, значит, общая сумма положительна. С другой стороны, каждое звено исходной ломаной разбито на два равных отрезка, проходимых в противоположных направлениях, поэтому сумма площадей по каждому звену равна 0. Противоречие.

http://www.ashap.info/Turniry/TG/index.html