37-й Международный математический Турнир городов
2015/16 учебный год
Решения задач (*Л. Медников, А Семенов, А. Шаповалов*)

Осенний тур

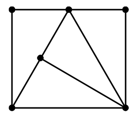
Базовый вариант, младшие классы

1. [4] Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1? (*Е. Бакаев*)

Ответ. Верно. **Решение**. Числа, начинающиеся с 1, умножим на 1, с 2 или 3 – на 5, с 4 – на 3 (или на 4), остальные – на 2.

2. [4] Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник? (*Е. Бакаев*)

Ответ. Не обязательно. **Решение**. Например, возьмём равносторонний треугольник и приложим к двум его сторонам гипотенузами прямоугольные треугольники с углом 60° при общей вершине (см. рис.). Осталось разрезать равносторонний треугольник высотой из другой вершины.



3. [5] Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3. (*Е. Бакаев*)

Решение. Пусть в раунде показано k «камней» и n «ножниц». Нетрудно убедиться, что общее количество баллов в этом раунде по модулю 3 сравнимо с $n – k$. Суммируя по всем раундам, получим, что сумма баллов по модулю 3 сравнима с 0, так как всего «камней» и «ножниц» показано поровну.

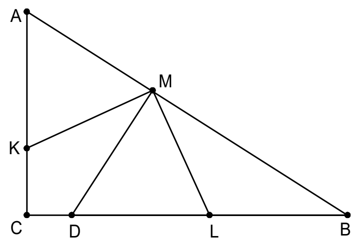
Замечание. Как видно из решения, достаточно потребовать равенства количеств двух элементов по модулю 3. Впрочем, остальные равенства по модулю 3 из этого следуют.

4. [5] На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB – точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$. (*Е. Бакаев*)

Решение 1. Предположим, что $a > b$. Тогда из треугольника AKM получаем, что $\angle AMK > \angle A$. Следовательно, $\angle B = 90° - \angle A > 90° - \angle AMK = \angle BML$, и из треугольника BML получаем, что $b > a$. Противоречие.

Аналогично, к противоречию приводит предположение $a < b$.

Решение 2. При повороте вокруг M на 90° точка K перейдёт в L, точка A – в некоторую точку D. При этом $AM \perp DM$, $AK \perp DL$. Отсюда следует, что D лежит на прямой BC, а ML – медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника DMB. Значит, она равна половине гипотенузы DB, что и требовалось.



Замечание. Точка D может лежать на луче LC и за пределами отрезка LC.

5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелёт. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелёт из А в Б стоит столько же, сколько перелёт из Б в А. Средняя стоимость перелёта равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелётов, начав и закончив в своём родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

а) [3] $m = 99$;

б) [3] $m = 100$? (*Е. Бакаев*)

а) Ответ. Не всегда. **Решение**. Пусть все 99 рейсов из родного города стоят по 49,6 тугриков. Это возможно, поскольку суммарная стоимость всех рейсов (без учёта направлений) равна $99 \cdot 50$ тугриков. Тогда, чтобы вылететь из родного города, а потом вернуться в него, надо уже потратить больше 99 тугриков.

б) Ответ. Всегда. **Решение**. Рассмотрим все 99! вариантов кольцевых маршрутов. Суммарно в них каждый возможный перелёт (с учётом направлений) использован по 98! раз. Следовательно, стоимость всех этих маршрутов равна $98! \cdot 99 \cdot 100$ тугриков, а средняя стоимость маршрута – 100 тугриков. Значит, найдётся маршрут не дороже 100 тугриков.

Замечание. Условие о равенстве стоимости рейсов туда и обратно – лишнее.

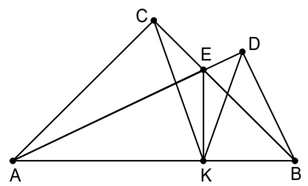
Базовый вариант, старшие классы

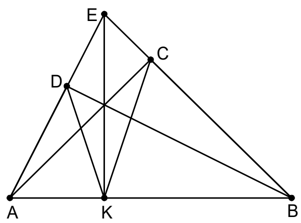
1. [3] Пусть p – простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p + n$? (*Б. Френкин*)

Ответ. Одно. **Решение**. Пусть $pn = (p + n)k$, тогда $p^2 = p^2 + pn - (p + n)k = (p + n)(p - k)$. Так как $p - k < p$, то оно на p не делится. Поэтому $p + n = p^2$, то есть $n = p^2 - p$. Очевидно, оно подходит.

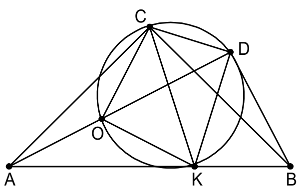
2. [4] Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну сторону от прямой AB). Пусть DK – биссектриса треугольника ABD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD. (*Е. Бакаев, А. Зимин*)

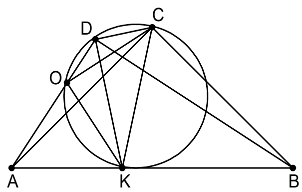
Решение 1. Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке E (см. рис.; случай $D = C$ очевиден). Так как $\angle ADK = 45° = \angle EBK$, то точки B, E, D, K лежат на одной окружности. Угол BDE – прямой, значит, и угол BKE – прямой. Следовательно, отрезок AE виден из точек C и K под прямым углом, то есть является диаметром описанной окружности треугольника ACK. Следовательно, центр этой окружности лежит на прямой AE, совпадающей с AD.

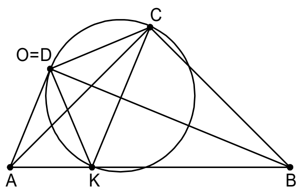


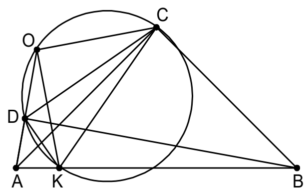


Решение 2. Заметим, что точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Если $D = C$, то всё очевидно. Если нет, то угол CDK прямой, поскольку состоит из двух углов по 45° (см. рис.). Пусть O – вторая точка пересечения прямой AD и описанной окружности треугольника CDK. Тогда угол COK тоже прямой и $\angle OCK = \angle ADK = 45°$. Значит, треугольник COK – прямоугольный и равнобедренный. Так как угол CAK в два раза меньше угла COK и точки A и O лежат по одну сторону от CK, то точка A лежит на окружности с центром O и радиусом $OC = OK$.

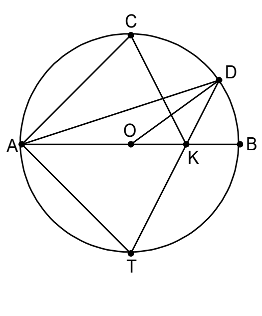


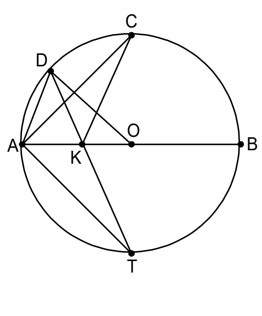






Решение 3. Построим окружность на диаметре AB. Точка C делит пополам дугу ADB, биссектриса DK делит пополам другую дугу AB точкой T. Поэтому углы C и T (см. рис.) симметричны относительно AB.





Так как ещё и углы CAK и TDA опираются на равные дуги, то треугольники CAK и TDA подобны. Центр O описанной окружности треугольника TDA лежит на луче, отложенном в сторону точки T от луча DA на угол ADO. Соответственно, центр описанной окружности треугольника CAK лежит на луче, отложенном в сторону точки C от луча AK на такой же угол. Осталось заметить, что углы ADO и OAD – равные углы равнобедренного треугольника AOD.

3. [4] См. задачу 3 для младших классов.

4. [2+2] См. задачу 5 для младших классов.

5. [5] Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые её несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией? (*Г. Жуков*)

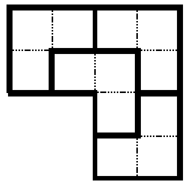
Ответ. Могла. **Пример 1**.

$$1,\ 2+3+4,\ 5+\ldots+13,\ \ldots,\ \frac{3^n+1}{2}+\ldots+\frac{3^{n+1}-1}{2},\ \ldots\ = 1, 9, 81, \ldots, 9^n, \ldots$$

Пример 2. $3,\ 5+7,\ \ldots,\ (2^n+1)+\ldots+(2^{n+1}-1),\ \ldots\ = 3, 12, \ldots, 3\cdot 4^{n-1}, \ldots$

Сложный вариант, 8-9 классы

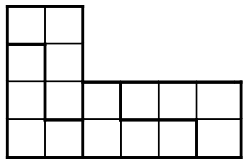
1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток – выдающийся многоугольник (это видно из рисунка справа).



а) [2] Придумайте выдающийся многоугольник из четырёх клеток.

б) [3] При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток? (*Е. Бакаев*)

а) Решение. Например, уголок из четырёх клеток (см. рисунок).



б) Ответ. При любых. **Решение**. Рассмотрим такой уголок из n клеток, что из двух его копий складывается прямоугольник $2\times n$. Из таких прямоугольников можно сложить квадрат $2n\times 2n$, а из этих квадратов – уголок, подобный исходному с коэффициентом $2n$.

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

а) [2] $k = 9$;

б) [4] $k = 8$? (*А. Шаповалов*)

а) Ответ. Необязательно. **Решение**. Удалим числа 1, 2, ..., 9. Тогда сумма даже девяти наименьших из оставшихся чисел ($10 + 11 + ... + 18 = 126$) больше 100.

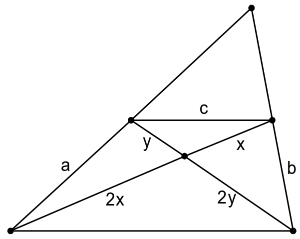
б) Ответ. Обязательно. **Решение**. Рассмотрим 12 пар чисел, дающих в сумме 25: (1, 24), (2, 23), ..., (12, 13). После удаления 8 чисел останется не меньше четырёх нетронутых пар. Они и дадут в сумме 100.

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника

а) [3] не больше ¾ P, где P – периметр этого треугольника;

б) [5] не меньше ¾ p, где p – полупериметр этого треугольника. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть a и b – половины сторон (см. рис.). Тогда c – средняя линия и равна половине третьей стороны. Напомним, что медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1. Запишем по три неравенства треугольников и сложим их.



а) $3x < a + c$, $3y < b + c$, $c < x + y$. Откуда $2(x + y) < a + b + c$. Осталось умножить на $^3/_2$.

б) $a < 2x + y$, $b < x + 2y$, $c < x + y$. Откуда $a + b + c < 4(x + y)$. Осталось умножить на $^3/_4$.

4. [8] Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки – одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник? (*А. Шаповалов*)

Ответ. Вася. **Решение**. Заметим, что перед Васиным ходом всегда будет оставаться *нечётное* число спичек. Понятно, что выиграет тот, кому достанется позиция, когда квадратиков один или два смежных (по стороне). Поэтому Васе достаточно не оставлять после себя такой позиции, и тогда он выиграет, поскольку ничья невозможна. Покажем, как он может делать это в разных случаях.

1) Осталось больше трёх квадратиков. Он возьмёт крайнюю спичку, испортив не более одного квадратика.

2) Осталось три квадратика. Он возьмёт спичку не из них, а если таких спичек нет, то из-за нечётности числа спичек ясно, что два квадратика смежны, а третий несмежен с ними, тогда он испортит один из смежных квадратиков.

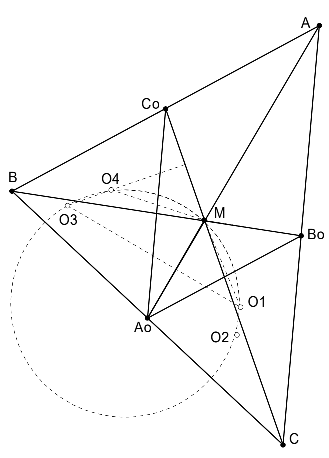
3) Осталось два квадратика и они несмежны. Из-за нечётности есть спичка, в них не входящая, которую и возьмёт Вася.

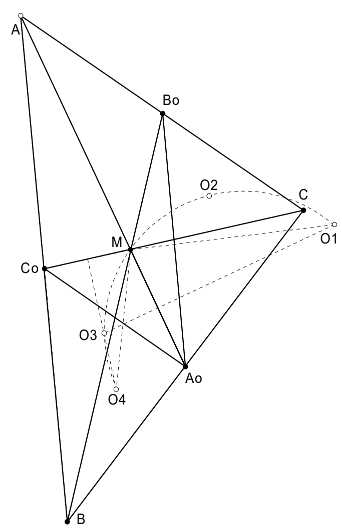
Все позиции рассмотрены.

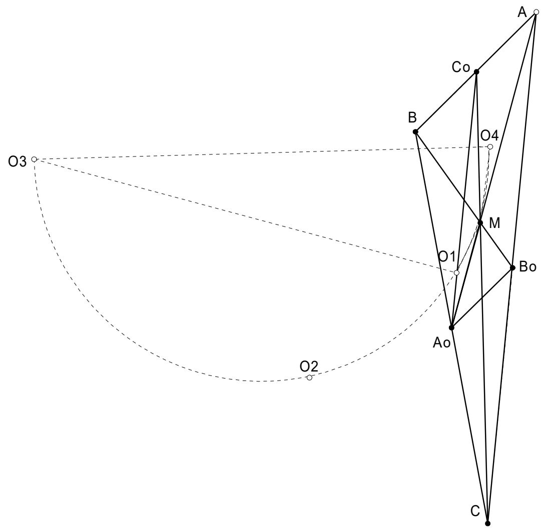
5. [8] В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности. (*П. Кожевников*)

Решение. Пусть ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 – указанные в условии окружности (в порядке их перечисления), а O_1, O_2, O_3, O_4 – их центры. Чтобы избежать разбора случаев, считаем все углы ориентированными. Так как невыпуклый четырёхугольник $MB_0A_0C_0$ не может быть вписанным, то точки O_1 и O_3 различны. Прямая O_1O_3 – серединный перпендикуляр к MA_0, поэтому MO_1O_3 – треугольник с описанной окружностью ω. Докажем, что O_4 лежит на ω. Угол MO_1O_3 равен половине центрального угла MO_1A_0 окружности ω_1, то есть вписанному в неё углу MB_0A_0. Если O_4 совпадает с O_3, то всё доказано, иначе прямая O_4O_3 – серединный перпендикуляр к отрезку MC_0, поэтому угол MO_4O_3 равен половине центрального угла MO_4C_0 окружности ω_4, то есть вписанному в неё углу MBC_0. А углы MB_0A_0 и MBC_0 равны из параллельности B_0A_0 и BC_0. Поэтому $\angle MO_1O_3 = \angle MO_4O_3$, то есть O_4 лежит на ω. Аналогично, O_2 лежит на ω.

На рисунках приведёны различные случаи расположения точек.







6. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «±», а также обычные знаки «+», «–», «×» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «±» либо «+», либо «–» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0{,}5) \pm 0{,}5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) [3] числа 1, 2, 4;

б) [7] любые 100 различных действительных чисел? (*Koh, Bong-Gyun*)

Ответ. Возможно. **Решение**. **а**) $(1{,}5 \pm 0{,}5)\times(1{,}5 \pm 0{,}5)$.

б) Одно значение можно получить и без операций. Для добавления значения a к набору значений, получаемых выражением T, подойдёт выражение $a + (0{,}5 \pm 0{,}5)(T - a)$. Так можно получить любой набор значений.

7. [10] У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый – по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов? (*М. Евдокимов*)

Ответ. Всегда. **Решение**. Возьмём ребёнка A с наименьшим количеством сортов. Если у него n сортов, то всё в порядке. Если нет, то какого-то сорта у него больше одной конфеты. Значит, у какого-то ребёнка B нет этого сорта вовсе. Но тогда у B найдётся сорт, которого нет у A. Пусть A и B обменяются этими сортами. Тогда у A количество сортов увеличится, а у B – не уменьшится. В результате сумма количеств сортов у детей увеличится. Значит, повторяя этот процесс, когда-нибудь доведём её до максимума, когда у каждого будет по n сортов.

Сложный вариант, 10-11 классы

1. [3] Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа. (*Б. Френкин*)

Решение. Пусть a – первый член прогрессии, а несократимая дробь $^m/_n$ – её знаменатель (из условия ясно, что он рационален). Тогда последний член равен $am^{36}n^{-36}$, то есть a делится на n^{36}: $a = bn^{36}$. По условию числа bn^{36} и bm^{36} взаимно просты, значит, $b = 1$. Следовательно, 19-й член равен $m^{18}n^{18}$.

2. [6] Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны. (*П. Кожевников*)

Решение. У многоугольников разбиения площадь равна 5. При этом сумма их периметров равна $40 + 2\cdot80 = 200$, значит, средний периметр – 10. Поэтому достаточно доказать, что существует единственный пятиклеточный многоугольник с периметром не больше 10.

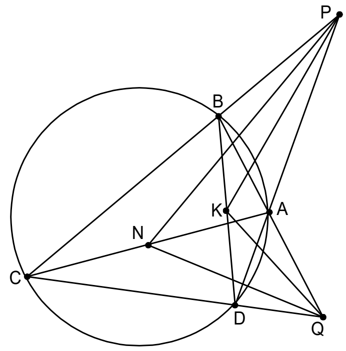
Первый способ. Периметр такого многоугольника равен сумме периметров 5 клеток минус удвоенное количество общих границ, соединяющих клетки. Значит, на 5 клеток приходится не менее 5 соединений. Поэтому найдётся цикл из клеток многоугольника. Но тогда он содержит квадрат 2×2, любое добавление клетки к которому даст один и тот же многоугольник периметра 10.

Второй способ. По формуле Пика площадь многоугольника с вершинами в узлах клетчатой доски равна $a + {}^b/_2 - 1$, где a – количество узлов *внутри* многоугольника, а b – на его *границе*. В нашем случае b равно периметру. Подставляя данные в формулу, получим $b \geq 1$. Значит, наш многоугольник содержит квадрат 2×2 с центром во внутреннем узле.

3. [6] Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше, чем $^1/_{2016}$. (*А. Храбров*)

Решение. Покажем, что число $0 < x \leq {}^1/_{2016}$ не является корнем данного многочлена $P(x)$. Можно считать, что его свободный член положителен (иначе поделим на нужную степень x и, если нужно, на –1). Тогда $P(x) > 1 - 2015\left(\frac{1}{2016} + \frac{1}{2016^2} + \ldots\right) = 0$.

4. [7] Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180°. (*М. Дидин*)



Решение. Обозначим точки как на рисунке. Треугольники ACP и BDP подобны, поскольку у них углы C и D опираются на одну дугу, а угол P общий. Поэтому соответственные медианы в них отсекают подобные треугольники ANP и BKP. Следовательно, углы ANP и BKP равны. Аналогично, подобие треугольников ACQ и DBQ влечёт равенство углов ANQ и DKQ. Следовательно,

$$\angle PKQ + \angle PNQ = \angle PKQ + \angle BKP + \angle DKQ = \angle BKD = 180°.$$

5. [2+6] См. задачу 6 мл. классов.

6. Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез – это сегмент круга, h – высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

а) [6] h = 17 см;

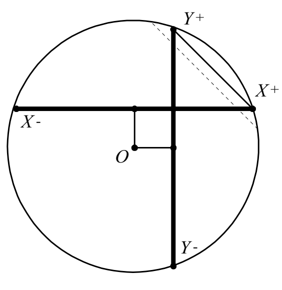
б) [6] h = 18 см? (*М. Евдокимов*)

Ответ. Не обязательно. **Решение**. Если арбуз распался на части, то и его поверхность распалась на части. Поэтому достаточно провести на сфере три дуги нужных размеров так, чтобы она не распалась на части. Точки пересечения пар плоскостей надрезов со сферой назовём *узлами*, у нас их будет шесть. Очевидно, дуги могут соединяться только в узлах.

а) Пусть плоскости трёх надрезов проходят через центр O шара. Они пересекают сферу по большим окружностям. Узлы делят каждый из них на четыре равные части. Пусть концы дуги одного разреза – A и B. Треугольник OAB – равнобедренный с боковыми сторонами 10 и высотой 7. Половина его основания равна $\sqrt{51} > 7$, поэтому угол AOB – тупой. Значит, надрез можно провести так, чтобы он прошел только через два узла.

Разобьём узлы на пары соседних. Тогда дуги вообще не пересекутся, значит, сфера не распадётся.

б) Пусть одна плоскость надреза проходит через центр O шара, а две другие – на расстоянии $\sqrt{10}$ от O. Первая пересекает шар по кругу радиуса 10, две другие – по кругам радиуса $3\sqrt{10} > 9$. Эти два малых круга пересекают большой круг перпендикулярными диаметрами X^+X^- и Y^+Y^- (см. рис.).



Дуга назреза в большом круге должна опираться на хорду длины 12, что больше расстояния $4\sqrt{5}$ между узлами X^+ и Y^+. Поэтому надрез в нём можно провести так, чтобы он проходил только через узлы X^- и Y^-. В одном малом круге проведём надрез, не проходящий через узел Z^-, в другом – Z^+. Это возможно, поскольку их диаметры больше 18. Тогда все дуги надрезов, не считая незначащих хвостов, образуют криволинейную ломаную $X^+Z^+X^-Y^-Z^-Y^+$ без самопересечений. Значит, сфера не распадётся.

Замечание. Легко проверить, что конструкция п. б) позволяет проводить надрезы даже глубиной h = 18,9 см без разделения арбуза на части. Можно показать, что при h = 19 см уже никакая конструкция не поможет – арбуз развалится.

7. [12] Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N - 1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо. (*Н. Гладков*)

Решение. Выберем любое число h и всех ребят ростом меньше h назовём *карликами*, а остальных – *великанами*. Место между соседями, левый из которых карлик, а правый – великан, назовём *стыком*. *Весом* стыка назовём количество карликов слева и великанов справа от него (не обязательно подряд). Вес может принимать значения от 2 до N. До операции всякий стык мог быть только внутри группы, причём не более одного в группе. А после операции – только на границе бывшей группы, которая содержала стык. Веса обоих возможных стыков на границах группы будут меньше веса бывшего стыка этой группы. Поэтому максимум весов уменьшается при операции (если, конечно, стыки ещё появляются). Значит, после $N - 1$ операции стыков не останется. То есть все великаны будут стоять левее всех карликов.

Рассматривая нужные h, получим, что первый будет выше всех, первые двое – выше всех остальных, и т.д. То есть ребята выстроятся по убыванию.