

Двудольные графы

Разминка

Зад1. В прошлом учебном году в Заборске прошли такие мат.олимпиады: городская, областная, и турнир городов. В каждой из них участвовало нечетное число учеников маткласса, причем участник участвовал в нечетном числе олимпиад. Всего в матклассе 20 учеников. Докажите, что кое-кто из них не был ни на одной олимпиаде.

Определения. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. *Пример:* любое дерево.

Упр2. Рассмотрим графы правильных многогранников. Какие из них – двудольные?

Зад3. Докажите, что следующие графы – двудольные.

а) Вершины графа – расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.

б) Вершины – перестановки из n чисел, ребра – расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух чисел.

в) Тоже, что (а) для n фишек.

Зад4. Несколько равносторонних треугольников на плоскости не перекрываются. Всегда ли можно раскрасить их в два цвета так, чтобы треугольники с общим отрезком границы были разного цвета?

Максимальное число ребер

Упр5. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе **а)** с $2n$ вершинами; **б)** с $2n+1$ вершиной?

Зад6. В строке из 11 целых чисел для каждой группы подряд идущих чисел (включая группы из одного числа тоже) подсчитана ее сумма. Каково наибольшее количество нечетных сумм?

Обходы, чередование

Упр7. Докажите, что в двудольном графе нет нечетных циклов.

Зад8. Отмечены вершины и центры граней куба и проведены диагонали всех граней.

Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Лемма 9. Пусть Γ – двудольный граф с черными и белыми вершинами.

а) Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета – поровну.

б) Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то что число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.

Зад10. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

Нечетные циклы.

Теорема 11. (*критерий двудольного графа*) Граф – двудольный $\Leftrightarrow$ в графе нет нечетных циклов.

Зад12. а) В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \dots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел? **б)** Тот же вопрос для доски 9×9 .

Для самостоятельного решения

ДГ1. Все грани многогранника – многоугольники с четным числом сторон. Докажите, что граф многогранника – двудольный.

ДГ2. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

ДГ3. Гриша записал в клетки шахматной доски числа $1, 2, \dots, 64$ в неизвестном порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может точно определить, где какое число записано.

ДГ4. Вершины конечного графа как-то пронумеровали от 1 до n , затем на каждом ребре записали сумму номеров в его концах, а номера в вершинах стерли. Докажите, что

- а)** Если граф не двудольный, то нумерация однозначно восстанавливается.
- б)** Если нумерация однозначно не восстанавливается, то этот граф двудольный с равным количеством вершин обоих цветов.

ДГ5. а) Найдется ли правильный треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки?

б) Вершины графа – это узлы клетчатой бумаги, ребра – отрезки фиксированной длины L . Докажите, что получившийся граф – двудольный.

Интернет-кружок 11 класса, 1543 школа. Рук. А.Шаповалов, октябрь 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2010-11/index.html