Увидеть граф

Позиции и ходы

1. На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает через какого-то другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?

2. В ряд расположены n пронумерованных фишек. За один ход разрешается прыгнуть фишкой вправо ровно через k фишек. Известно, что при данных n и k такими ходами можно, стартовав из позиции А, расставить номера по возрастанию. То же верно для позиции В. Докажите, что такими ходами можно из А получить В.

3. На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка – единственная.

Пары. Разбиение на циклы

4. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку.
а) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.
б) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

5. За одну операцию можно поменять местами два любых числа. За какое наименьшее число ходов можно гарантировано в любой строке расставить числа по возрастанию?

Считаем ребра и вершины

6. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Известно, что среди попарных сумм a_i+a_j ($i \neq j$) как минимум 37 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ – целые.

7. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 55 другими. Найдите n. (Укажите все возможности.)

8. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

Граф границ

9. **а)** Ладья, делая ходы по вертикали и горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски и вернулась на исходное поле. Докажите, что найдутся три хода подряд все в разных направлениях (то есть «вперед, вбок, назад»).
б) Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?

10. Клетки прямоугольной клетчатой доски покрашены в синий и желтый цвета так, что крайняя нижняя горизонталь – синяя. Известно, что ладья не может пройти с нижнего края до верхнего по синим клеткам не прыгая через желтые. Докажите, что
а) червяк может проползти по границам синих и желтых клеток от левого края до правого.
б) король может пройти по желтым клеткам от левого края до правого.

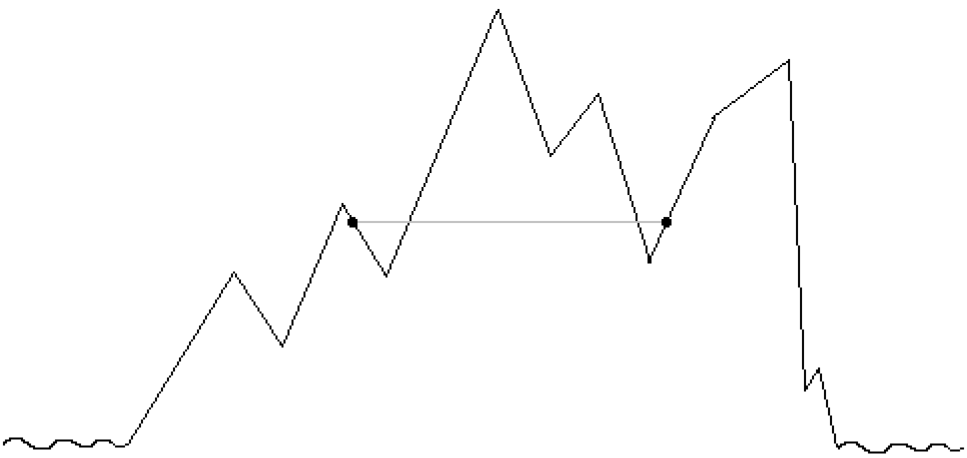
Для самостоятельного решения

УГ1. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

УГ2. Дана таблица $(n–2)\times n$, $n > 2$, в каждой клетке которой записано целое число от 1 до n, причем в каждой строке все числа различны и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что эту таблицу можно дополнить до квадрата $n\times n$, записав в каждую новую клетку какое-нибудь целое число от 1 до n так, чтобы по-прежнему в каждой строке и в каждом столбце числа были различны.

УГ3. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.
а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.
б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Докажите, что если из расположения А можно получить расположение Б, то из Б можно получить А.
в) В условиях (б) докажите, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

УГ4. Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» – один по левому склону, другой по правому. Гора везде выше уровня моря, а ее поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы двигаются «непрерывно».



а) Нарисуем горизонтальную числовую ось так, что вершина проектируется в 0. Пусть x и y – проекции флатландцев. Отметим на координатной плоскости множество точек, соответствующее положениям флатландцев на одинаковой высоте. Докажите, что получится набор отрезков.
б) Рассмотрите этот набор отрезков как граф, и найдите на нем все вершины нечетной степени.
в) Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.