

Испытания и жадный алгоритм

- а) Зритель задумывает одну из 100 карточек. За один ход фокусник может разложить карточки на 10 кучек и узнать у зрителя, в какой из групп находится карточка. За какое наименьшее число вопросов фокусник может наверняка определить задуманную карту?
б) То же, но раскладывает на 5 кучек.

Пусть надо выявить один случай из N , и каждый вопрос делит все случаи на k групп, выясняя, в какую из групп попал искомым случай. Тогда жадный алгоритм состоит в том, чтобы делить на группы, размером как можно ближе к среднему.

- Петя загадал натуральное число A от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число X , и Петя отвечает, верно ли, что X делится на A . Может ли Витя угадать A после трёх таких вопросов?
- Есть 7 серебряных монет и 2 золотые (они отличаются по виду от серебряных). Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (учтите, что настоящая серебряная монета может отличаться по весу от настоящей золотой!). Если фальшивая монета серебряная, то она легче настоящих монет, а если золотая – то тяжелее. Как найти фальшивую монету за два взвешивания?
- На блюде лежат 10 кусков сыра. Сначала Вася может разрезать каждый кусок на два. Затем Петя берет себе один из полученных кусков, потом Вася – один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т.д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Бывает полезно ввести вспомогательную величину для оптимизации.

- За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний?
- На плоскости нарисован черный равносторонний треугольник. Имеется десять треугольных плиток того же размера и той же формы. Нужно положить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного треугольника (хотя бы одну точку *внутри* него). Как это сделать?

Отклонение от жадности.

Часто можно показать, что жадный алгоритм не достигает результата. Доказав недостижимость, подумайте, нельзя ли из этого извлечь указания, и достичь результата, следующего за жадным.

- $ABCD$ – квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C ?
- В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?
- На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу – белые, вверху – черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые – вверху?
- Назовем треугольники *сходными*, если у них совпадают по длине по две стороны. За один ход можно заменить треугольник на сходный. За какое наименьшее число ходов можно из правильного треугольника со стороной 10 получить правильный треугольник со стороной 1?

Количество информации

«Жадности» может помочь «анализ с конца».

- а) Незамкнутая цепочка составлена из 31 звена. Известно, что одно из звеньев – фальшивое, легче остальных. Докажите, что при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено, разрезав не более $\frac{31}{4}$ звеньев.
б) Незамкнутая цепочка составлена из 95 звеньев. Известно, что одно из звеньев – фальшивое, отличающееся по весу от остальных (неизвестно, легче или тяжелее). Докажите, что при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено, разрезав не более шести звеньев.
- Десять монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г, выложены в ряд. Известно, что каждая настоящая лежит левее любой фальшивой. Как за два взвешивания определить все фальшивые монеты?

Для самостоятельного решения

1. На блюде лежат 15 кусков сыра двух весов. Сначала Вася может разрезать некоторые из этих кусков (но не все) каждый на две части. Затем Петя берет себе один из кусков, потом Вася – один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т.д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
2. В этой задаче Петя может отвечать на вопросы «да», «нет» или «не знаю». Он загадал целое число от 1 до 81. Придумайте, как за четыре вопроса угадать это число.
3. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида “уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника”, где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?
4. На первой горизонтали шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а на последней – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, по одному ферзю за ход.
5. Пусть среди 24 монет ровно половина – золотые. Одна из этих монет фальшивая, причем, как и раньше, серебряная ФМ должна быть легче настоящей серебряной монеты, а золотая – тяжелее. Если на чашу весов положить больше четырех золотых монет или больше четырех серебряных монет, весы сломаются (а если положить на каждую чашу ровно по 4 тех и других – то выдержат). Как найти ФМ за три взвешивания?
6. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже **написанных** одинаковых числа n и написать вместо них числа $n + 1$ и $n - 1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005?

Интернет-кружок 11 класса, 1543 школа. Рук. А.Шаповалов, ноябрь 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2010-11/index.html